Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 8

1. Determinare un elemento primitivo per i seguenti ampliamenti:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}).$$

2. Siano $\alpha := \sqrt[3]{2}$, $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva terza dell'unià e sia $K := \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$. Dimostrare che $\alpha + \alpha\xi$ è un elemento primitivo per K mentre $\alpha - \alpha\xi$ non lo è.

3. Si determini un'immersione $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ che non sia un automorfismo di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ e si estenda φ ad un automorfismo di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

4. Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento del polinomio $X^3 - 2$. Costruire esplicitamente un isomorfismo tra $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ ed $\mathbf{S_3}$.

5. Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento del polinomio $X^4 + 30X^2 + 45$. Costruire esplicitamente un'immersione di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ in $\mathbf{S_4}$.

6. Sia $K = \mathbb{Q}(\xi)$ il p-esimo ampliamento ciclotomico. Costruire un'immersione di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ in $\mathbf{S_p}$.

7. Sia $K = \mathbb{Q}(\xi)$ l'ottavo ampliamento ciclotomico. Vedendo K come il campo di spezzamento dei polinomi $X^8 - 1$ e $\Phi_8(X) = X^4 + 1$ rispettivamente, costruire un'immersione di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} K$ in $\mathbf{S_8}$ e $\mathbf{S_4}$.

8. Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ dei seguenti polinomi $f(X)$ ed un sottogruppo di S_n (con $n = \deg f(X)$) ad esso isomorfo:

   $x^3 - 5; \quad (x^2 - 2)(x^3 - 3); \quad x^3 - 10x^2 - 8x + 64; \quad X^4 + 30X^2 + 45;$

   $x^4 - 2; \quad x^6 + 3; \quad x^8 - 2. \quad X^n - 1;$

9. Sia $n > 2$ e $f(x) = x^n - 2$. Mostrare che se $M.C.D.(n, \phi(n)) = 1$, allora il gruppo di Galois di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ ha ordine $n\phi(n)$.

10. In ciascuno dei seguenti casi si calcoli il campo di spezzamento e il gruppo di Galois del polinomio dato:

(a) $(x^2+x+1)(x^3+x^2+1) \in \mathbb{F}_2[x]$;

(b) $(x^3+x+1)(x^6+x+1) \in \mathbb{F}_3[x]$;

(c) $(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^2+x+1)(x^3+x+1) \in \mathbb{F}_2[x]$;

(d) $(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)(x^9+x^6+1)(x^27+2x^9+1) \in \mathbb{F}_3[x]$.

11. Siano K un campo e G il gruppo degli automorfismi di K. Se $S \subseteq G$ è un sottoinsieme, definiamo $K^S = \{x \in K; \varphi(x) = x \text{ per ogni } \varphi \in S\}$ (campo fisso di S).

    Mostrare che il campo fisso di S e quello del sottogruppo $\langle S \rangle \subseteq G$ generato da S sono uguali.

12. Mostrare che le applicazioni

$$\varphi : \mathbb{Q}(\pi) \longrightarrow \mathbb{Q}(\pi)\,, \quad \pi \mapsto 1-\pi$$

$$\psi : \mathbb{Q}(\pi) \longrightarrow \mathbb{Q}(\pi)\,, \quad \pi \mapsto 1-\pi^{-1}$$

sono automorfismi di $\mathbb{Q}(\pi)$ e calcolare il campo fisso di φ e ψ.