Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2015/2016
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Esercizi 9

1. Esplicitare la corrispondenza di Galois per il polinomio $X^3 - 5$.

2. Mostrare che il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ è un gruppo diedrale di grado 4. Determinare inoltre tutti i sottocampi del campo di spezzamento di $f(x)$ che sono normali su $\mathbb{Q}$.

   Suggerimento: Notare che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$ è contenuto nel campo di spezzamento di $f(x)$.

3. Esplicitare la corrispondenza di Galois per i seguenti polinomi :

   $$f(X) = X^4+30X^2+45, \quad g(X) = X^4+2X^2+9, \quad h(X) = X^4-3 \in \mathbb{Q}[X].$$

4. Sia $\mathbb{Q} \subseteq K$ un ampliamento di Galois di grado 4. Mostrare che K è un ampliamento biquadratico di $\mathbb{Q}$ se e soltanto se il suo gruppo di Galois è un gruppo di Klein.

5. Si ponga $K := \mathbb{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{14}, \sqrt{35})$.

   (1) Si calcoli $[K : \mathbb{Q}]$, giustificando la risposta;

   (2) Si trovino tutti i campi intermedi fra $\mathbb{Q}$ e K.

6. Esplicitare la corrispondenza di Galois per il k-esimo ampliamento ciclotomico per $k = 5, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 21$.

7. Determinare un ampliamento ciclotomico contenente $\sqrt{d}$, per

   $$d = 3, 6, 11, 12, -15.$$

   Suggerimento: Ricordare che se $MCD(m, n) = 1$, allora $\mathbb{Q}(\xi_{mn}) = \mathbb{Q}(\xi_n, \xi_m)$.

8. Sapendo che per ogni $n \geq 2$ esiste un numero primo p tale che $p \equiv 1 \mod n$ (Dirichlet), dimostrare che per ogni $n \geq 1$ esiste un polinomio di grado n irriducibile su $\mathbb{Q}$ il cui gruppo di Galois è ciclico di ordine n.

Suggerimento: Applicare la corrispondenza di Galois al p-esimo ampliamento ciclotomico.

9. Mostrare il p-esimo ampliamento ciclotomico, $p \geq 3$ primo, non contiene alcun ampliamento biquadratico.

10. Dimostrare che per ogni numero positivo $n \geq 3$ esiste un polinomio di grado $\frac{\varphi(n)}{2}$ irriducibile su $\mathbb{Q}$ che ha tutte radici reali.

    Suggerimento: Lavorare nell'n-esimo ampliamento ciclotomico.

11. Determinare due polinomi irriducibili su $\mathbb{Q}$ di grado 3 e 5 rispettivamente che hanno tutte radici reali.

12. Applicare la corrispondenza di Galois all'ampliamento $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$, $p \geq 2$ primo e $n \geq 2$.

13. Siano $f(X), g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ con campi di spezzamento L ed M rispettivamente. Mostrare che:

    (1) LM è il campo di spezzamento del polinomio prodotto $f(X)g(X)$;

    (2) Se $L \cap M = \mathbb{Q}$, risulta $Gal_{\mathbb{Q}}LM \cong Gal_{\mathbb{Q}}L \times Gal_{\mathbb{Q}}M$ (prodotto diretto).

    Suggerimento: Verificare che l'applicazione

    $$Gal_{\mathbb{Q}}LM \longrightarrow Gal_{\mathbb{Q}}L \times Gal_{\mathbb{Q}}M\,; \varphi \mapsto (\varphi|_L, \varphi|_M)$$

    è un isomorfismo.

14. Si consideri il polinomio $f(T) := T^4 - 10T^2 + 20 \in \mathbb{Q}[T]$ e sia $K \subseteq \mathbb{C}$ il suo campo di spezzamento.

    (1) Si calcoli $[K : \mathbb{Q}]$ e un elemento primitivo di K su $\mathbb{Q}$;

    (2) Si determini il gruppo di Galois di $f(T)$ su $\mathbb{Q}$;

    (3) Si determini il gruppo di Galois dei seguenti polinomi

    $$f(T)(T^2 - 5)\,; \qquad f(T)(T^2 + 5)\,; \qquad f(T)(T^3 - T - 2).$$