Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2005/2006
AL2 - Algebra 2 - gruppi, anelli e campi
Prova di Esame - Appello A
24 gennaio 2006

*Cognome*__________________ *Nome*____________________

*Numero di matricola*__________________

AVVERTENZA: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

ATTENZIONE Il compito dell'appello A è costituito dagli esercizi contrassegnati con $\heartsuit$. Il recupero del primo esonero è costituito dagli esercizi 1, 2, 3. Il recupero del secondo esonero è costituito dagli esercizi 4, 5, 6, 7.

1. ♡ (12 pti) Siano H, K sottogruppi di un gruppo G tali che $|H| = 3$ e $|K| = 5$.

   (a) Dimostrare che $H \cap K = \{e\}$;

   (b) Determinare il minimo ordine n che deve avere G perché esistano due tali sottogruppi;

   (c) Costruire un esempio esplicito di un gruppo G di ordine minimo con due tali sottogruppi.

2. (12 pti) Sia D_5 il gruppo delle isometrie del pentagono regolare.

   (a) Determinare tutti gli omomorfismi $\phi : D_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$;

   (b) Determinare il nucleo e l'immagine di ognuno di tali omomorfismi;

   (c) Per ogni omomorfismo ϕ, definire esplicitamente l'omomorfismo canonico $\dfrac{D_5}{\ker \phi} \longrightarrow \mathrm{Im}\phi$ dato dal teorema fondamentale.

3. ♡ (6 pti) Dimostrare che il prodotto diretto di gruppi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ è un gruppo ciclico e determinare i suoi generatori.

4. ♡ (12 pti) Sia ξ una radice complessa primitiva ottava dell'unità.

   (a) Determinare il polinomio minimo di ξ su $\mathbb{Q}$;

   (b) Determinare esplicitamente gli elementi di $\mathbb{Q}(\xi)$ (in forma generica);

   (c) Determinare una base di $\mathbb{Q}(\xi)$ su $\mathbb{Q}$.

5. $\heartsuit$ (6 pti) Determinare gli ideali primi e massimali dell'anello quoziente $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(30+10i)}$.

6. ♡ (6 pti) Dare un esempio di due polinomi $f, g \in \mathbb{R}[X, Y]$ per i quali non esiste un'identità di Bézout.

7. (6 pti) Sia $f(X) = X^5 - 3X^4 + 10X^3 - 30X^2 - 5X + 15$.

   (a) Determinare le radici razionali di $f(X)$;

   (b) Scomporre $f(X)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$ e in $\mathbb{R}[X]$.