Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2005/2006
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 1

1. Sia A un dominio e K il suo campo dei quozienti. Mostrare che il campo dei quozienti di $A[X_1, \dots, X_n]$ è il campo delle funzioni razionali $K(X_1, \dots, X_n)$.

2. Calcolare i lati di un rettangolo la cui area è di 204 m^2 e il cui perimetro è di 80 m.

3. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ e siano $\rho \in \mathbb{R}$, σ, τ le sue radici. Mostrare che $\sigma + \tau = -\rho$ e $\sigma\tau = -\frac{1}{\rho}$.

4. Mostrare che un polinomio $f(X) \in K[X]$ è irriducibile se e soltanto se lo è la sua forma ridotta.

5. Mostrare che un polinomio e la sua forma ridotta hanno lo stesso discriminanate.

6. Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado usando le formule di Tartaglia-Cardano:
$$X^3 + 9X - 10\,,\ X^3 + 6X - 20\,,\ X^3 + 6X - 7.$$

7. Calcolare il discriminante dei seguenti polinomi di terzo grado su $\mathbb{Q}$:
$$X^2-2\,,\ X^3+27X-4\,,\ X^3-21X+17\,,\ X^3+X^2-2X-1\,,\ X^3+X^2-2X+1.$$

8. Mostrare $f(X) \in K[X]$ ha una radice multipla se e soltanto se il suo discriminante è nullo.

9. Mostrare che se $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ha tutte radici reali, allora il suo discriminante è non negativo.

10. Mostrare che un polinomio di terzo grado su $\mathbb{Q}$ ha una sola sola radice reale se e soltanto se il suo discriminante è negativo.

11. Sia A un dominio e siano $f(X), g(X) \in A[X_1, \ldots, X_n]$ due polinomi simmetrici. Verificare che $f(X) + g(X)$ e $f(X)g(X)$ sono polinomi simmetrici. Dedurne che i polinomi simmetrici formano un sottoanello di $A[X_1, \ldots, X_n]$.

12. Esprimere in funzione dei polinomi simmetrici elementari i polinomi:

$$(X+Y)(X+Z)(Y+Z)\,, \quad X^3Y^3 + X^3Z^3 + Y^3Z^3$$

13. Mostrare, per induzione su n, che il determinante di Vandermonde in n indeterminate è uguale a

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (X_i - X_j).$$