Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2005/2006
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 2

1. Dimostrare che per S_4 il teorema di Lagrange si inverte, e precisamente che S_4 ammette:
   (a) un sottogruppo di ordine 12 e uno solo;
   (b) tre sottogruppi di ordine 8, diedrali;
   (c) quattro sottogruppi di ordine 6 isomorfi a S_3;
   (d) sette sottogruppi di ordine 4, tre ciclici e quattro di Klein;
   (e) quattro sottogruppi di ordine 3;
   (f) nove sottogruppi di ordine 2.
2. Dimostrare che in A_4 il teorema di Lagrange non si inverte.
3. I 2-cicli generano S_n e i 3-cicli generano A_n. Quali sottogruppi di S_n sono generati dagli r-cicli per $r > 3$?
4. Determinare:
   (a) le classi di coniugio di S_5;
   (b) le classi di coniugio di A_5;
   (c) due elementi di A_5 coniugati in S_5 ma non in A_5 (*Sugg.* considerare un 5-ciclo e il suo quadrato);
5. Usando 4b, dimostrare che A_5 è semplice.
6. Prendiamo X come l'insieme di sostegno di G, e facciamo agire G su X per coniugio:
   (a) verificare che il coniugio è una azione;
   (b) determinare lo stabilizzatore e l'orbita di un elemento;
   (c) usando 6b dimostrare che per ogni $g \in G$, $\|Z(g)\| = [G : C_G(g)]$, dove $Z(g) = \{h \in G : hg = gh\}$ è il centro di G;
   (d) determinare il nucleo dell'azione.
7. Dimostrare che un elemento di ordine p di S_p è un p-ciclo.