Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2005/2006

TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 3

1. Sia F un campo reale oppure $F = \mathbf{F}_p$ con $p \equiv 3 \bmod (4)$. Mostrare che l'insieme delle matrici
$$\mathcal{M}_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \; ; \, a, b \in F \right\}$$
è un campo, sottoanello dell'anello delle matrici quadrate di dimensione 2 a coefficienti in F.

   Se $F = \mathbf{F}_p$, quanti elementi ha $\mathcal{M}_{a,b}$?

2. Costruire esplicitamente i seguenti campi e calcolarne il grado su $\mathbb{Q}$:
$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{5} + 2i)\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})\,, \quad \mathbb{Q}(\pi, 2 + i).$$

3. Determinare il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi e calcolarne il grado su $\mathbb{Q}$:
$$X^4 - X^3 + 4X^2 - 3X + 3\,, \quad X^9 - 1\,, \quad X^7 - 2.$$
$$X^4 + X^2 - 1\,, \quad X^4 + 30X^2 + 45\,, \quad X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

4. Sia $c > 0$. Determinare il grado su $\mathbb{Q}$ del campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ del polinomio $X^3 + cX + 1$.

5. Sia ξ una radice primitiva nona dell'unità e sia $\alpha := \xi + \xi^{-1}$. Mostrare che il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è $m(X) := X^3 - 3X + 1$. Poiché la scelta di ξ è arbitraria, dedurne che le radici di $m(X)$ sono $\alpha, \beta := \xi^2 + \xi^{-2}, \gamma := \xi^4 + \xi^{-4}$ e perciò $m(X)$ ha tre radici reali. Mostrare inoltre che $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

6. Determinare il campo di spezzamento dei seguenti polinomi e il calcolarne il grado su $\mathbb{F}_p$.
$$X^5 + X + 1 \in \mathbb{F}_2; \quad X^4 + 2X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{F}_3; \quad X^3 + 3X + 3 \in \mathbb{F}_5.$$