Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2005/2006

TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 4

1. Siano a, b due interi positivi. Mostrare che
$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}),$$
per ogni x, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

2. Determinare l'inverso (razionalizzato) del numero $1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

3. Si dimostri che, se $n = 2^h$, con $h \geq 2$, le $\varphi(n)$ radici complesse primitive dell'unità non costituiscono una base dell'n-esimo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$.

4. Sia $n \geq 2$ e $\xi_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$.

   (a) Mostrare che $\mathbb{Q}(\xi_n) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_{2n})$.

   Mostrare inoltre che vale l'uguaglianza se n è dispari e dare un esempio in cui l'inclusione è stretta.

   (b) Mostrare che, se $MCD(m, n) = 1$, allora $\zeta := \xi_m\xi_n$ è una radice primitiva mn-sima dell'unità.

5. Costruire il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ dei polinomi
$$X^2 - 5\,, \quad X^5 + 2\,.$$
e determinarne il grado.

6. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico di grado n su $\mathbb{Q}$ e sia $\varphi_\alpha : \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$ l'applicazione di $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali definita da $x \to \alpha x$.

   Mostrare che il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e il polinomio caratteristico di φ_α coincidono.

7. Determinare esplicitamente tutti gli isomorfismi di K in $\mathbb{C}$ quando K è uno dei seguenti campi.
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}}).$$
Stabilire inoltre quali di questi sono automorfismi.