

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2005/2006
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 5

1. Sia K il campo di spezzamento su \mathbb{Q} di uno dei seguenti polinomi:

$$X^4 - 9X^2 + 20; \quad X^4 - 4X^2 + 2; \quad X^4 - 2X^2 - 1.$$

Determinare un elemento primitivo per K ed il gruppo degli automorfismi di K .

2. Determinare esplicitamente tutti gli automorfismi del campo K quando K è il campo di spezzamento su \mathbb{Q} di uno dei seguenti polinomi:

$$X^5 - 1, \quad X^6 + 3, \quad X^8 - 2.$$

3. Sia $m(X)$ il polinomio minimo su \mathbb{Q} di $\sqrt[3]{5} + i$. Determinare tutte le radici complesse di $m(X)$.

4. Costruire esplicitamente il gruppo degli automorfismi dell' n -simo ampliamento ciclotomico di \mathbb{Q} per $n = 6, 8, 9, 10, 12$ e determinare la sua struttura.

5. Sia $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva settima dell'unità e siano $\alpha := \xi + \xi^{-1}$, $\beta := \xi^3 + \xi^5 + \xi^6$.

Determinare i polinomi minimi di α e β su \mathbb{Q} e le loro radici. Quali di esse sono reali?

Determinare inoltre i polinomi minimi di ξ su $\mathbb{Q}(\alpha)$ e $\mathbb{Q}(\beta)$.

6. Siano $p(X) = X^2 + X + 1$, $q(X) = X^2 - X + 1 \in \mathbf{F}_5[X]$.

Costruire un campo di spezzamento di $p(X)$ e campo di spezzamento di $q(X)$, mostrare che essi sono isomorfi e determinare tutti gli isomorfismi tra di loro.

7. Determinare esplicitamente tutti gli automorfismi del campo K quando K è il campo di spezzamento su \mathbf{F}_3 di uno dei seguenti polinomi:

$$X^4 + 2X^3 + 2X + 2, \quad X^5 + X^2 + 2X + 1.$$

Determinare inoltre la struttura del gruppo $\text{Aut}(K)$.