Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2005/2006

TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 7

1. Determinare per quali valori di $n \leq 30$ il poligono regolare di n lati è costruibile con riga e compasso.

2. Stabilire se gli angoli di ampiezza uguale a 10 e 24 gradi sono costruibili con riga e compasso.

3. Mostrare che ogni polinomio a coefficienti razionali ha lo stesso gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ di un opportuno polinomio monico irriducibile.

4. Sia $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e $\chi : \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \to \bar{\alpha}$ l'omomorfismo di coniugio.

   Mostrare che, se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un ampliamento normale, χ è un automorfismo di $\mathbb{Q}(\alpha)$ di ordine 2 e che il campo fissato da $G = \langle \chi \rangle$ è $\mathbb{Q}(\alpha + \bar{\alpha}, \alpha\bar{\alpha})$.

5. Sia $f(X) = X^4 + X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare esplicitamente un omomorfismo iniettivo di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f(x))$ in $\mathbf{S_4}$.

6. Mostrare che l'ampliamento $F \subseteq K$ è biquadratico se e soltanto se il suo gruppo di Galois su F è un gruppo di Klein.

7. Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

8. Esplicitare la corrispondenza di Galois per gli ampliamenti ciclotomici $\mathbb{Q}(\xi_8)$, $\mathbb{Q}(\xi_{10})$ e $\mathbb{Q}(\xi_{15})$.

9. Mostrare che i coniugati su $\mathbb{Q}$ di $\cos(\frac{2\pi}{n})$ sono tutti reali.

10. Sia G il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $X^5 - 2$. Costruire esplicitamente un omomorfismo iniettivo di G in $\mathbf{S_5}$.