

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2003/2004

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PRIMA PROVA D'ESONERO (05-04-2004)

ESERCIZIO 1. Dimostrare che l'esponenziale di un operatore lineare è invertibile.

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2(2y^2 - 1) - 1), \\ \dot{y} = -2xy^2(y^2 - 1), \end{cases}$$

(2.1) Si verifichi che la funzione

$$H(x, y) = (y^2 - 1)(x^2y^2 - 1)$$

è una costante del moto.

(2.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema.

(2.3) Se ne discuta la stabilità.

(2.4) Indicando con Γ_E la curva di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E \right\},$$

si studi la curva di livello Γ_0 , e si analizzino i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(2.5) Lo stesso per $E = 1$.

(2.6) Si studino qualitativamente le altre curve di livello.

(2.7) Si trovi esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 1)$.

[(2.8) Si dia un argomento per escludere l'esistenza di traiettorie periodiche.]

ESERCIZIO 3. Enunciare e dimostrare il teorema di Ljapunov.