Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2003/2004

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

SECONDA PROVA D'ESONERO (09-06-04)

CORREZIONE

ESERCIZIO 2.

2.1. Grafico dell'energia potenziale. Risulta

$$V(x) = \frac{1}{|x|} + x + \alpha \log x^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + x + \alpha \log x^2, & x > 0, \\ -\dfrac{1}{x} + x + \alpha \log x^2, & x < 0, \end{cases}$$

$$V'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + 1 + \dfrac{2\alpha}{x}, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2} + 1 + \dfrac{2\alpha}{x}, & x < 0, \end{cases}$$

$$V''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2\alpha}{x^2}, & x > 0, \\ -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2\alpha}{x^2}, & x < 0. \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to 0^\pm} V(x) = +\infty.$$

Consideriamo prima il caso $\alpha > 0$.
Per $x > 0$ si ha $V'(x) = 0$ se

$$V'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x^2 + 2\alpha x - 1\right) = 0 \Rightarrow x = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1} \Rightarrow x = x_0 \equiv \sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha,$$

poiché solo la determinazione positiva deve essere presa. Inoltre

$$V''(x) = \frac{2}{x^3}\left(1 - \alpha x\right),$$

quindi $V''(x) = 0$ per $x = 1/\alpha$, $V''(x) > 0$ per $x < 1/\alpha$ e $V''(x) < 0$ per $x > 1/\alpha$. Quindi la funzione $V(x)$ è decrescente per $x \in (0, x_0)$, ha un minimo isolato in $x = x_0$ ed è crescente per $x \in (x_0, \infty)$. Inoltre $V(x)$ è convessa per $x \in (0, 1/\alpha)$ e cambia concavità in $x = 1/\alpha$, diventando concava in $x \in (1/\alpha, \infty)$.

Per $x < 0$ si ha $V'(x) = 0$ se

$$V'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x^2 + 2\alpha x + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}, & \alpha > 1, \\ x = -1, & \alpha = 1, \\ \text{nessuna radice}, & \alpha < 1, \end{cases}$$

mentre

$$V''(x) = -\frac{2}{x^3}\,(1 + \alpha x)\,,$$

così che $V''(x) = 0$ per $x = -1/\alpha$, $V''(x) > 0$ per $x > -1/\alpha$ e $V''(x) < 0$ per $x < -1/\alpha$. Quindi la funzione $V(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ per $\alpha < 1$ ed è decrescente con un punto di flesso orizzontale in $x = -1$ per $\alpha = 1$. Per $\alpha > 1$ ha un punto di massimo relativo in $x = x_-$ e un punto di minimo relativo in $x = x_+$. Che tali punti siano di massimo e minimo, rispettivamente, si può dedurre o calcolando esplicitamente il valore di $V''(x)$ in $x = x_\pm$ (e verificando che risulta $V''(x_-) < 0$ e $V''(x_+ > 0)$ o, più semplicemente, tenendo conto dei valori asintotici di $V(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to 0^-$.

La situazione nei tre casi $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ e $\alpha > 1$ è illustrata nelle Figure 1, 2 e 3, rispettivamente.

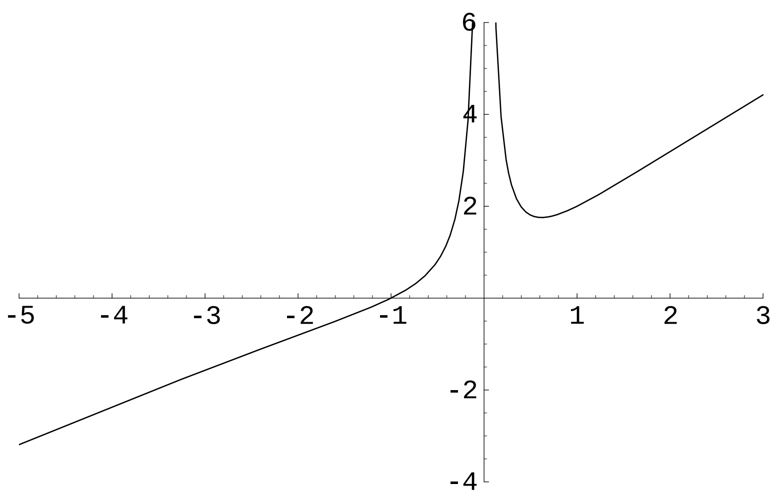

Figura 1. Grafico della funzione $V(x)$ per $0 < \alpha < 1$.

Consideriamo ora il caso $\alpha < 0$.

Se $x > 0$ la derivata della funzione $V(x)$ si annulla in $x = x_0 = \sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha$, mentre la derivata seconda è sempre positiva. Quindi $V(x)$ ha un punto di minimo per $x = x_0$ ed è convessa.

Per $x < 0$ si ha $V'(x) > 0$ e $V''(x) > 0$, quindi la funzione $V(x)$ è crescente e convessa.

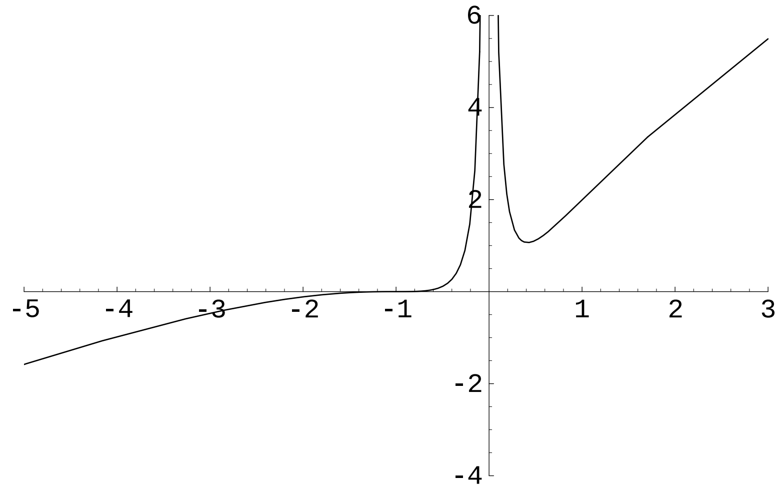

Figura 2. Grafico della funzione $V(x)$ per $\alpha = 1$.

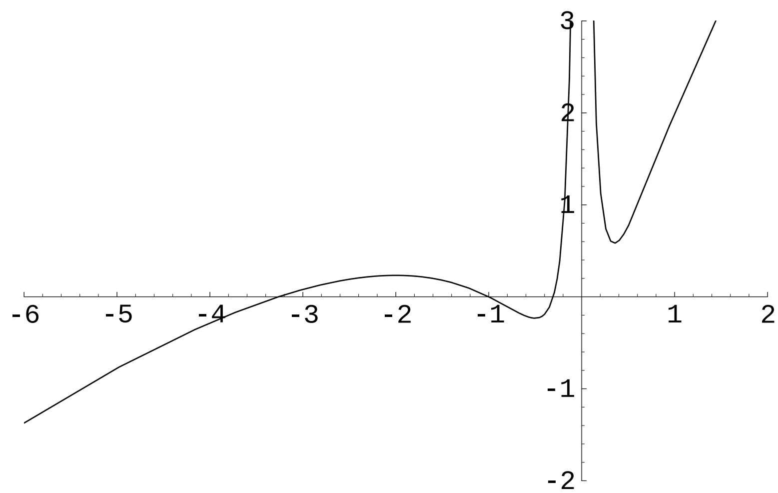

Figura 3. Grafico della funzione $V(x)$ per $\alpha > 1$.

Il grafico di $V(x)$ per $\alpha < 0$ è rappresentato in Figura 4.

Infine per $\alpha = 0$ si ha $V'(x) = 0$ solo per $x = 1$. Inoltre $V''(x) > 0$. Quindi la funzione è convessa, ha un asintoto verticale $x = 0$, ha un punto di minimo in $x = 1$

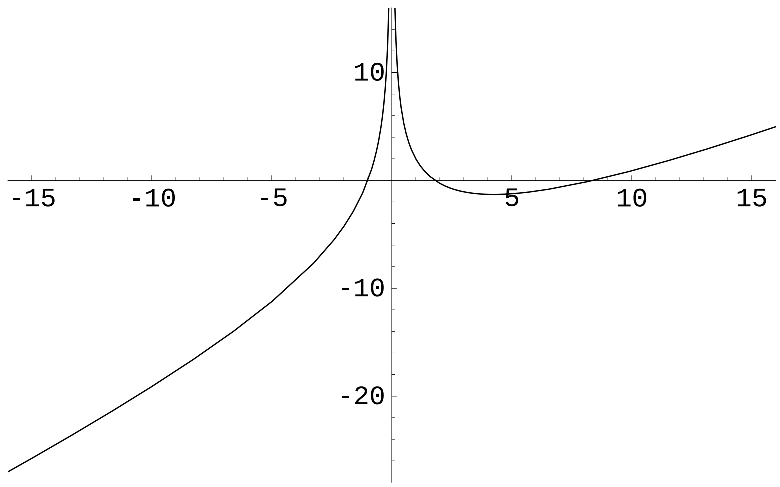

Figura 4. Grafico della funzione $V(x)$ per $\alpha < 0$.

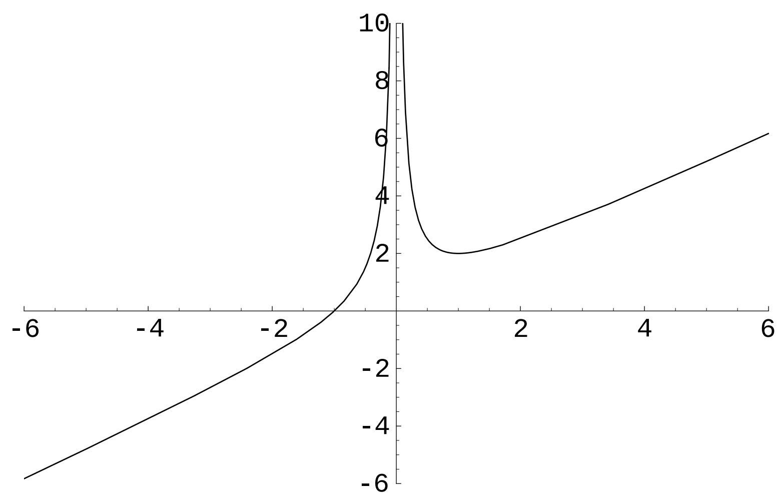

Figura 5. Grafico della funzione $V(x)$ per $\alpha = 0$.

ed è asintotica alla retta $y = x$ per $x \to \pm\infty$. Cfr. la Figura 5.

2.2. Punti d'equilibrio. I punti d'equilibrio, per il sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases}$$

sono della forma $(x, y) = (x_0, 0)$ dove $V'(x_0) = 0$.

La situazione è allora la seguente:
(1) $\alpha > 1 \Rightarrow$ tre punti d'equlibrio x_0, x_- e x_+;
(2) $\alpha = 1 \Rightarrow$ due punti d'equlibrio $x_0 = \sqrt{2} - 1$ e $x = -1$;
(3) $\alpha < 1 \Rightarrow$ un solo punto d'equlibrio x_0.

2.3. Stabilità dei punti d'equilibrio.
Si ha:
(1) $\alpha > 1 \Rightarrow x_0$ e x_+ sono stabili per il teorema di Dirichlet, in quanto punti di minimo isolati per l'energia potenziale, mentre x_- è un punto d'equilibrio instabile poiché è un punto di massimo;
(2) $\alpha = 1 \Rightarrow x = -1$ è un punto d'equilibrio instabile in quanto punto di flesso orizzontale, mentre x_0 è di equilibrio stabile per il teorema di Dirichlet;
(3) $\alpha < 1 \Rightarrow x_0$ è un punto d'equilibrio stabile, di nuovo per il teorema di Dirichlet.

2.4. Analisi qualitativa. Le orbite si ricavano immediatamente dallo studio dell'energia potenziale, graficando al variare del valore dell'energia E la funzione

$$y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}.$$

Si ottiene allora lo scenario rappresentato nelle Figure 6, 7, 8, 9 e 10, per i rispettivi valori di α.

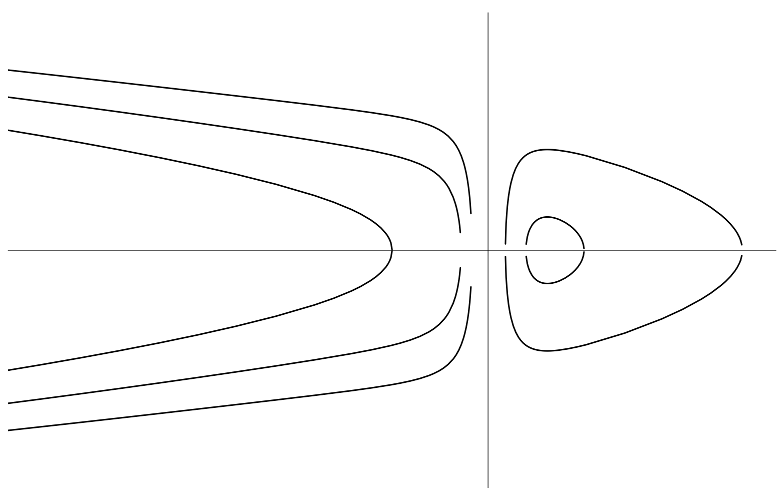

Figura 6. Analisi qualitativa per $0 < \alpha < 1$.

Nel caso della Figura 8 si tenga conto che in x_- si ha

$$V''(x_-) = -\frac{2}{x_-^3}\left(1 - \alpha\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)\right),$$

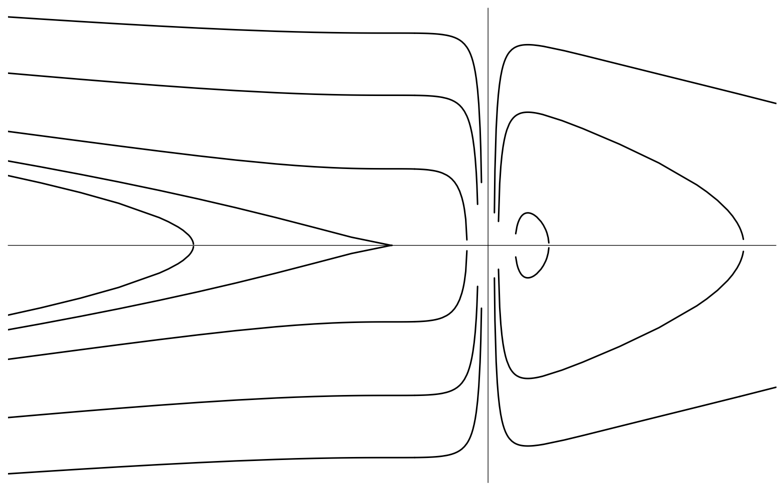

Figura 7. Analisi qualitativa per $\alpha = 1$.

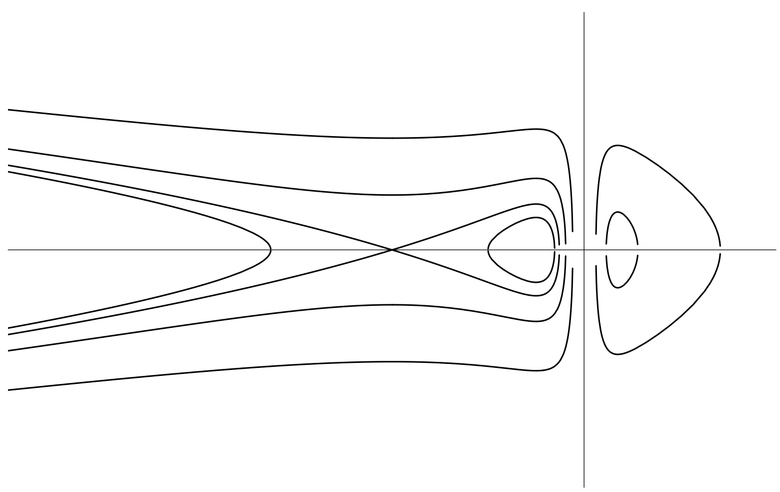

Figura 8. Analisi qualitativa per $\alpha > 1$.

dove, tenuto conto che $x_- < 0$ e $\alpha > 1$, si ha

$$-\frac{2}{x_-^3} > 0, \qquad 1 - \alpha\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right) < 1 - \alpha^2 < 0,$$

e quindi $V''(x_-) < 0$: quindi la curva $y = y(x) = \sqrt{2(E - V(x))}$ ha tangente obliqua

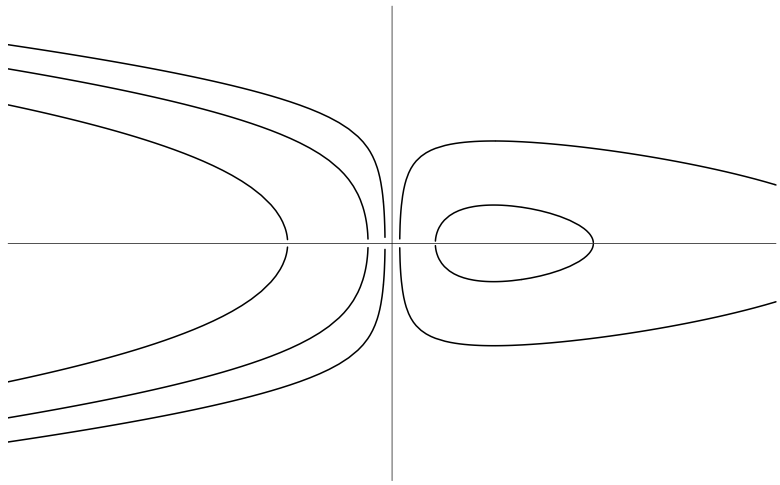

Figura 9. Analisi qualitativa per $\alpha < 0$.

in $x = x_-$ per $E = V(x_-)$.

2.5. Traiettora con dato iniziale assegnato. Per $\alpha = 0$ e dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 3/\sqrt{2})$ si ha

$$E = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 + 1 + 0 = \frac{17}{4}.$$

Poiché $V(x_0) = V(1) = 2 < 17/4$ la traiettoria con quel dato iniziale si svolge su una curva chiusa (cfr. la Figura 10), ed è quindi periodica.

2.6. Periodo. Possiamo scrivere il periodo T come integrale definito

$$T = 2\int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\left(\frac{17}{4} - \frac{1}{x} - x\right)}},$$

dove $E = 17/4$ e $x_\pm(E)$ sono le due radici positive dell'equazione $V(x) - E = 0$. Per $x > 0$ si ha $V(x) = (1/x) + x$ (per $\alpha = 0$), quindi si deve considerare l'equazione

$$\frac{17}{4} - \frac{1}{x} - x = 0,$$

che corrisponde all'equazione di secondo grado (poiché $x > 0$)

$$x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = 0,$$

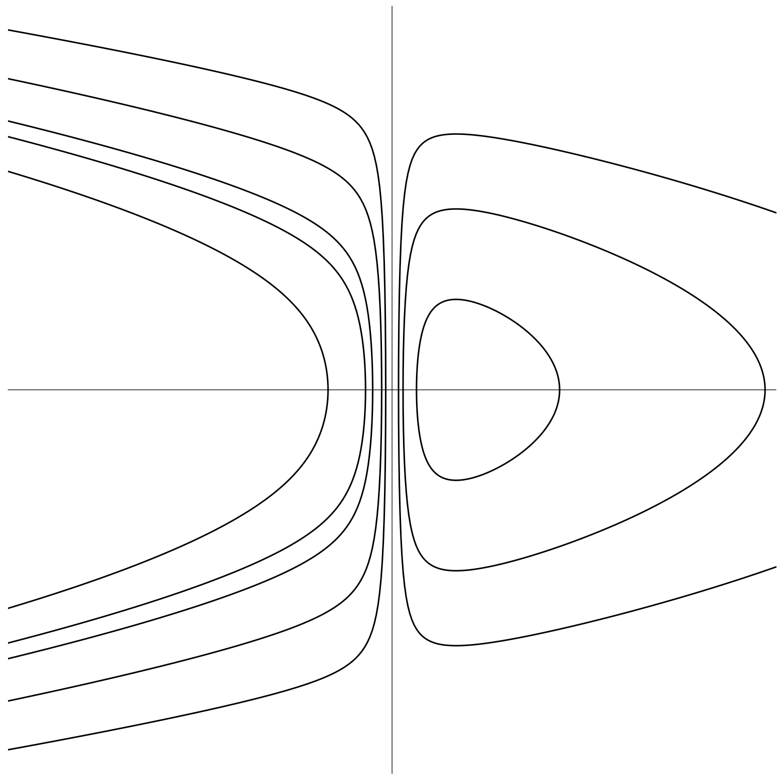

Figura 10. Analisi qualitativa per $\alpha = 0$.

che ammette soluzioni

$$\begin{aligned} x_{\pm}(E) &= \frac{1}{2}\left(\frac{17}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^2 - 4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{4} \pm \frac{\sqrt{289-64}}{4}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(17 \pm \sqrt{225}\right) = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} 4, \\ 1/4, \end{cases} \end{aligned}$$

quindi $x_-(E) = 1/4$ e $x_+ = 4$. In conclusione risulta

$$T = 2\int_{1/4}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\left(\frac{17}{4} - \frac{1}{x} - x\right)}}.$$

Scrivendo

$$2\left(\frac{17}{4} - \frac{1}{x} - x\right) = \frac{2}{x}\left(\frac{17}{4}x - 1 - x^2\right) = \frac{2}{x}\left(x - \frac{1}{4}\right)(4 - x)\,,$$

si vede che $1/2 \leq 2/x \leq 8$ per $x \in [1/4, 4]$. Quindi, utilizzando il fatto che si ha

$$\int_{1/4}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{17}{4}x - 1 - x^2\right)}} = \int_{1/4}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)(4-)}} = \pi,$$

possiamo concludere che valgono le stime

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} < T < 2\sqrt{2}\pi.$$