Capitolo 2. Equazioni differenziali lineari

5. Equazioni differenziali lineari omogenee del primo ordine

5.1. Introduzione. Come anticipato nel paragrafo §2 ci occupiamo ora del problema di risolvere un sistema di equazioni lineari differenziali ordinarie definite su uno spazio vettoriale E, della forma $\dot{x} = Ax$, con $x \in E$ e $A \in L(E)$. Vedremo nel prossimo capitolo che si possono considerare casi più generali in cui le equazioni non siano lineari, *i.e.* $\dot{x} = f(x)$, con $f\colon E \to W \subset E$; a differenza del caso generale, comunque, se il sistema è lineare, la soluzione esiste sempre ed è unica. Perché tale risultato valga anche nel caso $\dot{x} = f(x)$, occorrerà imporre delle condizioni di regolarità sulla funzione f.

5.2. DEFINIZIONE (EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE DEL PRIMO ORDINE). *Sia E uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $A \in L(E)$. Chiameremo*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in E, \tag{5.1}$$

un sistema di n equazioni differenziali lineari omogenee del primo ordine a coefficienti costanti *o semplicemente un'*equazione (vettoriale) differenziale lineare omogenea del primo ordine a coefficienti costanti.

5.3. LEMMA. *Risulta*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A, \tag{5.2}$$

per ogni $A \in L(E)$.

5.4. *Prima Dimostrazione del lemma 5.3.* Per la definizione 2.5 di esponenziale abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{(At)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k A^k t^{k-1}}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{At}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

dove si è utilizzata la proposizione 2.6 che, assicurando la convergenza assoluta, e quindi uniforme, della serie, consente di derivare sotto il segno di serie (cfr. la nota bibliografica). ■

5.5. *Seconda Dimostrazione del lemma 5.3.* Per definizione di derivata come limite del rapporto incrementale abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{At} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{A(t+h)}-e^{At}}{h} = e^{At}\lim_{h\to 0}\frac{e^{Ah}-\mathbb{1}}{h} \\ &= e^{At}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Ah)^k}{k!}-\mathbb{1}\right) = e^{At}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(Ah)^k}{k!} \\ &= e^{At}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(hA+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(Ah)^k}{k!}\right) = e^{At}A,\end{aligned} \tag{5.4}$$

dove si sono usate la proprietà (2) del lemma 2.8, per scrivere $e^{A(t+h)} = e^{At}e^{Ah}$, e la proposizione 2.6, che permette di passare al limite sotto il segno di serie nell'ultimo passaggio. Il fatto che e^{At} e A commutano segue semplicemente dalla definizione 2.5 di esponenziale e dal fatto, ovvio, che ogni operatore A commuta con se stesso. ■

5.6. TEOREMA. *Sia E uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia A un operatore lineare in E. Considerato il sistema (5.1) con condizioni iniziali*

$$x(t_0) = x_0, \tag{5.5}$$

allora esiste ed è unica la soluzione, data da

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0; \tag{5.6}$$

inoltre tale soluzione è globale, i.e. è definita per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$.

5.7. *Dimostrazione del teorema 5.6.* Derivando la (5.6) e utilizzando il lemma 5.3 si trova

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{A(t-t_0)}x_0 = Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t), \tag{5.7}$$

quindi la (5.6) è effettivamente una soluzione.

Per dimostrarne l'unicità, supponiamo per assurdo che esista un'altra soluzione $y(t)$, diversa da $x(t)$. Poniamo $z(t) = e^{-A(t-t_0)}y(t)$. Derivando la $z(t)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\dot z(t) &= -Ae^{-A(t-t_0)}y(t) + e^{-A(t-t_0)}\dot y(t) \\ &= -Ae^{-A(t-t_0)}y(t) + e^{-A(t-t_0)}Ay(t) \\ &= e^{-A(t-t_0)}\left[-A+A\right]y(t) = 0,\end{aligned} \tag{5.8}$$

dove si è usato che $y(t)$ è una soluzione (e quindi $\dot y = Ay$). La (5.8) implica che $z(t)$ deve essere costante, *i.e.* $z(t) = z_0$ per ogni t e per qualche vettore costante z_0. Quindi $y(t) = e^{A(t-t_0)}z_0$, ma poiché $y(t)$ deve soddisfare la condizione iniziale (5.5), deve essere $z_0 = x_0$, *i.e.* $y(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$, che però darebbe $y(t) = x(t)$ per ogni t, contro l'assunzione che le due soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ fossero diverse.

Infine il fatto che la soluzione sia globale segue dal fatto che la (5.5) è soluzione per ogni t per cui è definita e, d'altra parte, l'esponenziale in (5.6) è definito per ogni t (come segue dalla proposizione 2.6). ■

5.8. Il teorema 5.6 implica che si può facilmente trovare la soluzione del sistema (5.1) con condizioni iniziali (5.5), per ogni matrice A di cui si sa calcolare l'esponenziale, quindi in particolare per matrici che abbiano autovalori tutti distinti e quindi diagonalizzabili (cfr. l'osservazione 2.10) o per matrici date dalla somma di una matrice diagonale e di una matrice nilpotente che commutano tra loro (cfr. l'esempio 2.12 e si rifletta sul fatto che è generalizzabile a tale caso; cfr. l'esercizio 1). Abbiamo visto nel paragrafo §3 che, in realtà, è sempre possibile ricondursi a uno di questi due casi casi per calcolare l'esponenziale di una matrice.

5.9. ESEMPIO. Sia dato il sistema di equazioni differenziali lineari al primo ordine con coefficienti costanti

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{5.9}$$

dove $x \in \mathbb{R}^2$ e $A \in \mathrm{M}(2)$ (cfr. §1.22). Supponiamo che A abbia autovalori distinti reali $\lambda_1 < \lambda_2$.

Esiste allora una base in cui il sistema ammette la forma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \end{cases} \tag{5.10}$$

così che la soluzione si trova immediatamente ed è data da

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0), \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0), \end{cases} \tag{5.11}$$

dove i dati iniziali $(y_1(0), y_2(0))$ dipendono dai dati iniziali nelle coordinate x, *i.e.* da x_0.

Possiamo quindi scrivere $x(t) = Q^{-1} y(t)$, dove $P = (Q^T)^{-1}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base in cui si usano le coordinate x (base standard) alla base in cui si usano le coordinate y (base degli autovettori).

Imponendo che $x(t)$ soddisfi le condizioni iniziali, si trova quindi la soluzione.

5.10. ESEMPIO. Sia dato il sistema di equazioni differenziali lineari al primo ordine con coefficienti costanti (5.9), di nuovo nel caso $x \in \mathbb{R}^2$ e $A \in \mathrm{M}(2)$. Supponiamo che A abbia autovalori complessi coniugati μ e $\bar{\mu}$, con $\mu = a + ib$, $b \neq 0$.

Esiste allora una base in cui il sistema ammette la forma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \mu y_1, \\ \dot{y}_2 = \bar{\mu} y_2, \end{cases} \tag{5.12}$$

così che se ne può scrivere la soluzione

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\mu t} y_1(0), \\ y_2(t) = e^{\bar{\mu} t} y_2(0), \end{cases} \tag{5.13}$$

con $y(0) \in \mathbb{C}$, e procedere come prima. Ora ovviamente anche Q è complessa e tale che $x(t) = Q^{-1} y(t)$ risulta essere reale, come deve essere.

Oppure si può procedere passando alla base in cui la matrice ammette la rappresentazione (1.65), così che, utilizzando la proprietà (5) del lemma 2.8, troviamo che la soluzione, in tale base, si può scrivere

$$\begin{cases} z_1(t) = e^{at} \left(\cos(bt)\, z_1(0) - \sin(bt)\, z_2(0) \right), \\ z_2(t) = e^{at} \left(\sin(bt)\, z_1(0) + \cos(bt)\, z_2(0) \right). \end{cases} \tag{5.14}$$

La soluzione sarà allora data da $x(t) = Q^{-1} z(t)$, dove Q è la matrice (reale) che fa passare dalle coordinate x alle coordinate z.

6. Sistemi planari lineari

6.1. Introduzione. Il caso dei sistemi bidimensionali (*sistemi planari*) è particolarmente istruttivo perché consente di visualizzare facilmente la struttura delle soluzioni. Lo analizzeremo quindi con un certo dettaglio.

6.2. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{6.1}$$

in $E = \mathbb{R}^2$. Esisterà sempre una base in cui la matrice $A \in \mathrm{M}(2)$ (cfr. §1.22) ha una delle seguenti forme

$$\begin{aligned} &(1) \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda \neq \mu \text{ reali}, \\ &(2) \qquad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a, b \text{ reali }, b \neq 0, \\ &(3) \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \text{ reale}, \\ &(4) \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \text{ reale }. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Infatti, se gli autovalori di A sono distinti, discende dal paragrafo §1 che l'operatore A è diagonalizzabile o semisemplice; nel primo caso esiste una base in cui A è rappresentato dalla matrice (1), nel secondo applichiamo il lemma 1.59 per trovare che esiste una base in cui A è rappresentato dalla matrice (2). Se gli autovalori sono coincidenti (quindi necessariamente reali) allora o la matrice A è diagonale (forma (3) in (6.2)) o ammette la rappresentazione in (4), come risulta dalla discussione nel paragrafo §4.

6.3. Sia $x(t)$ la soluzione del sistema (6.1). Tale soluzione si può considerare una rappresentazione parametrica della curva $x: t \to x(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, nel piano (cfr. la nota bibliografica). In coordinate abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t), \qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Ci si può porre il problema di determinare che forma abbiano tali curve nel piano, e quindi di trovare l'equazione cartesiana delle curve $x_2 = x_2(x_1)$, almeno localmente, *i.e.* prescindendo da eventuali problemi di non univocità (che, comunque, non sorgono: cfr. più avanti).

Lo stesso discorso si può ripetere nelle coordinate $y = (y_1, y_2)$ in cui A ammette una delle rappresentazioni in (6.2). Poiché esiste sempre una base in cui A ha una delle forme elencate in (6.2), possiamo limitarci a considerare matrici che abbiano una delle 4 forme di (6.2): il risultato trovato darà informazioni anche nella base originaria (in cui si usano coordinate $x = (x_1, x_2)$), poiché si può passare da una base all'altra attraverso una matrice invertibile.

Nel seguito quindi studieremo la forma delle curve $y: t \to y(t)$ nel piano $y = (y_1, y_2)$. Per quanto visto in §6.2 la discussione copre il caso generale.

6.4. Autovalori reali distinti. Nella base degli autovettori l'operatore A è rappresentato dalla matrice (1) in (6.2). Quindi

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda t}\, y_{01}, \\ y_2(t) = e^{\mu t}\, y_{02}. \end{cases} \tag{6.4}$$

Si noti innanzitutto che, per $y_{01} \neq 0$, la funzione $y_1(t) = e^{\lambda t} y_{01}$ è strettamente monotona in t e può quindi essere invertita, $t = t(y_1)$, così che si può scrivere $y_2(t) = y_2(t(y_1)) = y_2(y_1)$, (con leggero abuso di notazione).

Se $y_{01} > 0$ possiamo scrivere $y_2(t)$ in funzione di $y_1(t)$ ponendo

$$y_2(t) = \left(e^{\lambda t}\right)^{\mu/\lambda} y_{02} = \left(\frac{y_1(t)}{y_{01}}\right)^{\mu/\lambda} y_{02} = a y_1^{\alpha}(t), \tag{6.5}$$

dove $\alpha = \mu/\lambda$ e $a = y_{02} y_{01}^{-\alpha}$. Quindi l'equazione cartesiana delle curve (6.4) è

$$y_2 = a y_1^{\alpha}, \qquad \alpha = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Se $\alpha = \mu/\lambda > 0$ e $y_{20} > 0$ otteniamo delle curve passanti per l'origine, convesse o concave (nel semipiano $y_2 > 0$), a seconda che sia $|\mu| > |\lambda|$ o $|\mu| < |\lambda|$ (non si può avere $|\lambda| = |\mu|$ poiché in tal caso $\alpha > 0$ implicherebbe $\lambda = \mu$ contro l'ipotesi che i due autovalori siano distinti). Il moto su tali curve sarà "asintotico all'infinito", *i.e.* $\lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty$, se λ e μ sono positivi; al contrario il moto sarà "asintotico all'origine $y = (0, 0)$", *i.e.* $\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$, se λ e μ sono negativi. Se $y_{20} < 0$ si ragiona in modo analogo (le curve sono in tal caso nel semipiano inferiore $y_2 < 0$), mentre se $y_{20} = 0$ allora $y_2(t) = 0$ per ogni t e il moto avviene lungo l'asse y_1.

Diremo nei due rispettivi casi $\lambda, \mu > 0$ o $\lambda, \mu < 0$ che l'origine è un *pozzo* o una *sorgente*. In entrambi i casi diremo che l'origine è un *nodo proprio* (o semplicemente *nodo*): quindi un nodo può essere o un pozzo o una sorgente. Cfr. la figura 6.1.

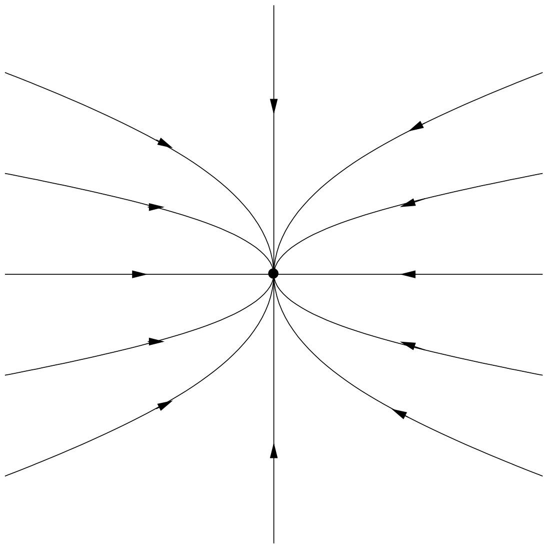

FIGURA 6.1. Nodo proprio (pozzo): caso (1) di (6.2) con $\lambda < \mu < 0$.

Se $\alpha = \mu/\lambda < 0$, *i.e.* se i due autovalori hanno segno opposto, la (6.6) sarà l'equazione di una curva tipo iperbole $y_2 = a y_1^{-\alpha'}$, $\alpha' = -\alpha > 0$, (con assi coincidenti con gli assi coordinati). Se $\lambda > 0 > \mu$ si avrà $\lim_{t\to\infty} y_1(t) = \infty$ e $\lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0$ e quindi il moto sarà "asintotico all'asse y_1". Se invece $\lambda < 0 < \mu$ si avrà $\lim_{t\to\infty} y_1(t) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} y_2(t) = \infty$ e quindi il moto sarà "asintotico all'asse y_2".

Diremo in tal caso che l'origine è un *punto di sella*. Cfr. la figura 6.2.

Il caso $y_{01} < 0$ si tratta analogamente; poiché $y_2(t)$ dipende dal rapporto $y_1(t)/y_{01}$ si vede immediatamente che le curve $y_2 = y_2(y_1)$ sono pari in y_1, quindi le curve nel semipiano $y_1 < 0$ si ottengono da quelle nel semipiano $y_1 > 0$ per riflessione rispetto all'asse y_2. Anche il caso $y_{01} = 0$ si tratta facilmente: in tal caso $y_1(t) \equiv 0$ $\forall t$ e il

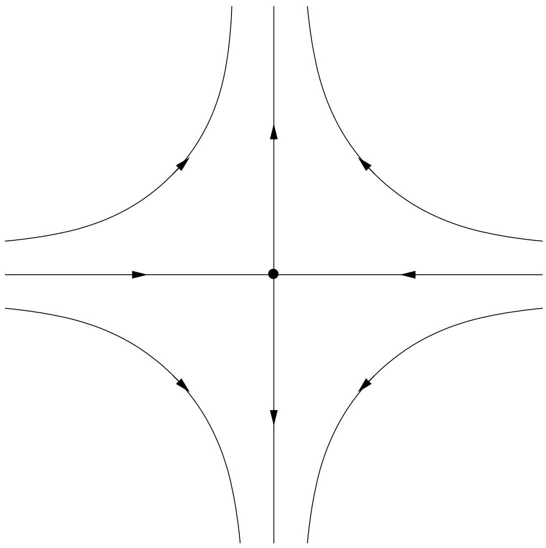

FIGURA 6.2. Punto di sella: caso (1) di (6.2) con $\lambda < 0 < \mu$.

moto avviene lungo l'asse y_2.

6.5. Autovalori complessi coniugati. Nella base in cui A è rappresentata dalla matrice (3) in (6.2) si ha

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{at}\left(\cos(bt)\, y_{01} - \sin(bt)\, y_{02}\right), \\ y_2(t) = e^{at}\left(\sin(bt)\, y_{01} + \cos(bt)\, y_{02}\right), \end{cases} \tag{6.7}$$

se $\mu = a + ib$, con $b \neq 0$.

Se $a = 0$ si vede che

$$|y(t)|^2 = y_1^2(t) + y_2^2(t) = y_{01}^2 + y_{02}^2 \equiv r^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{6.8}$$

con $r > 0$; inoltre $|\dot{y}(t)| = |b|r$. Quindi la curva (6.7) descrive un moto circolare uniforme (lungo la circonferenza di raggio r e centro l'origine) con velocità angolare b (cfr. l'esercizio 2). Diremo in tal caso che l'origine è un *centro*. Cfr. la figura 6.3.

Se $a \neq 0$, si ha $|y(t)|^2 = e^{2at}r^2$, se $r = |y(0)|$: il moto sarà la composizione di un moto circolare e di un'espansione, se $a > 0$, o una contrazione, se $a < 0$, (cfr. l'esercizio 3): al variare di t, $y(t)$ descriverà una spirale intorno all'origine, che, per $t \to \infty$, tende all'origine se $a < 0$ e tende all'infinito se $a > 0$. Cfr. la figura 6.4.

6.6. Autovalori reali coincidenti. Parte I. Supponiamo prima che la matrice A abbia la forma (3) in (6.2). Allora nella base in cui si usano le coordinate y, la soluzione è

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda t}\, y_{01}, \\ y_2(t) = e^{\lambda t}\, y_{02}, \end{cases} \tag{6.9}$$

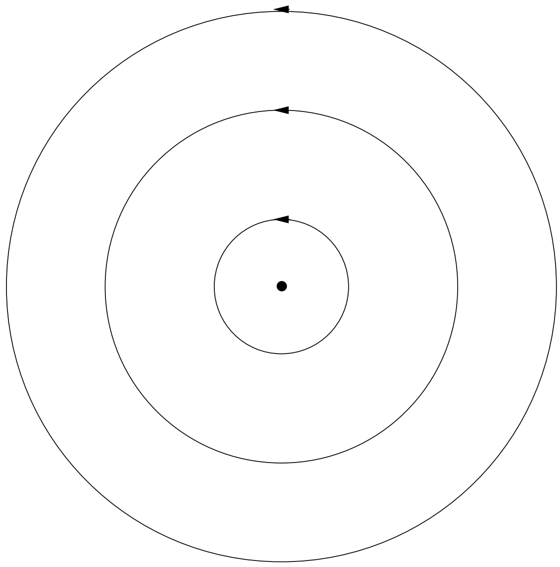

FIGURA 6.3. Centro: caso (2) di (6.2) con $\lambda = ib$ e $\mu = -ib$, dove $b > 0$.

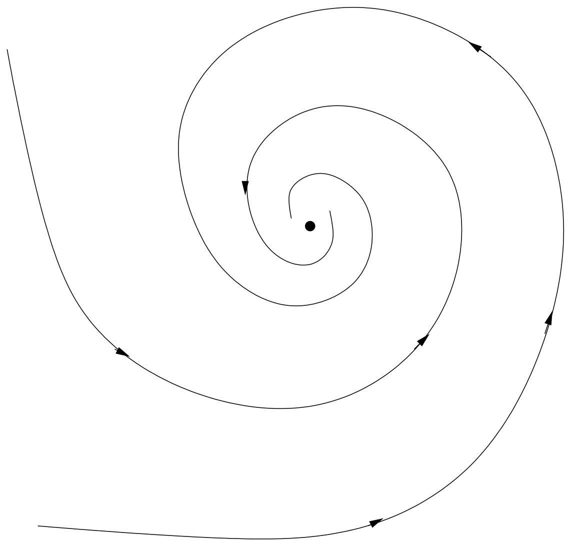

FIGURA 6.4. Spirale: caso (2) di (6.2) con $\lambda = a + ib$ e $\mu = a - ib$, dove $a < 0$ e $b > 0$.

e possiamo ragionare come in §6.4: valgono le stesse formule, con l'unica differenza che ora $\lambda = \mu$, quindi in particolare λ e μ hanno lo stesso segno.

Diremo di nuovo in tal caso che l'origine è un nodo proprio: in particolare può essere o un pozzo o una sorgente. Le traiettorie $t \to y(t)$ sono delle rette passanti per l'origine percorse in direzione dell'origine o in direzione opposta a seconda che l'origine sia, rispettivamente, un pozzo o una sorgente. Cfr. la figura 6.5.

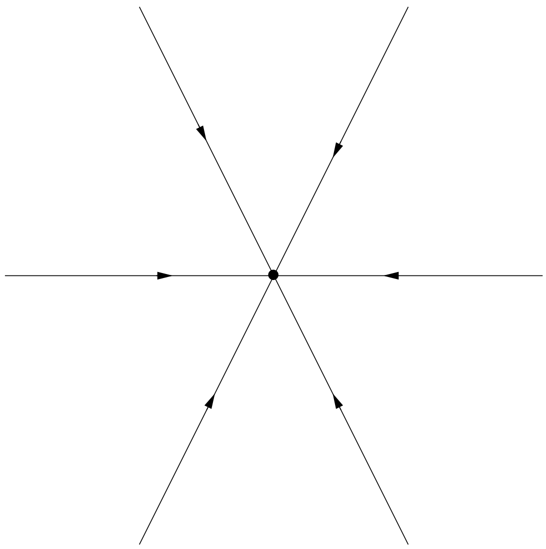

FIGURA 6.5. Nodo proprio (pozzo): caso (3) di (6.2) con $\lambda = \mu < 0$.

6.7. Autovalori reali coincidenti. Parte II. Se invece A ha la forma (4) in (6.2), la soluzione sarà data da

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda t}\, y_{01}, \\ y_2(t) = e^{\lambda t}\,(t\, y_{01} + y_{02})\,, \end{cases} \tag{6.10}$$

come segue dal teorema 5.6 e dall'esempio 2.12, con $a = b = t$.

Consideriamo prima il caso $\lambda \neq 0$. Possiamo quindi scrivere $y_2(t)$ in funzione di $y_1(t)$ utilizzando il fatto che, come discende dalla prima delle (6.10), se $y_{01} \neq 0$, allora $t = \lambda^{-1} \log[y_1(t)/y_{01}]$. Si noti che $y_1(t)$ ha il segno di y_{01} $\forall t$, così che l'argomento del logaritmo è sempre strettamente positivo; possiamo perciò porre $t = \lambda^{-1}(\log|y_1(t)| - \log|y_{01}|)$. Quindi

$$y_2 = y_1\,(a \log|y_1| + b)\,, \tag{6.11}$$

dove $a = \lambda^{-1}$ e $b = y_{02}y_{01}^{-1} - \lambda^{-1}\log|y_{01}|$. La curva (6.11) passa per l'origine e ha tangente verticale nell'origine.

Per determinarne l'andamento per $y_1 > 0$ si ragiona come segue. Supponiamo preliminarmente $y_{01} > 0$. Se $\lambda > 0$, la curva $y_2 = y_2(y_1)$ è convessa, ha un minimo negativo, cambia segno in $a \log y_1 + b = 0$ e tende a $+\infty$ per $y_1 \to \infty$, mentre, se $\lambda < 0$, è concava, ha un massimo positivo, in $a \log y_1 + b = 0$ cambia segno e tende a $-\infty$ per $y_1 \to \infty$. Il caso $y_{01} < 0$ si tratta in modo analogo. Se $y_{01} = 0$, allora, dalle (6.10), si ha $y_1(t) \equiv 0$ e $y_2(t) = e^{\lambda t} y_{02}$: quindi $y_1(t)$ è identicamente nulla e $y_2(t)$ tende a 0 se $\lambda < 0$ e a $\pm\infty$ (a seconda che il dato iniziale y_{02} sia positivo e negativo) se $\lambda > 0$.

Diremo in tal caso che l'origine è un *pozzo* o una *sorgente*, a seconda che il moto sia asintotico all'origine o all'infinito, rispettivamente. Per differenziare tali scenari dai corrispondenti incontrati in §6.4 e in §6.6 per autovalori reali distinti, diremo in tal caso che l'origine è un *nodo improprio*. Cfr. la figura 6.6.

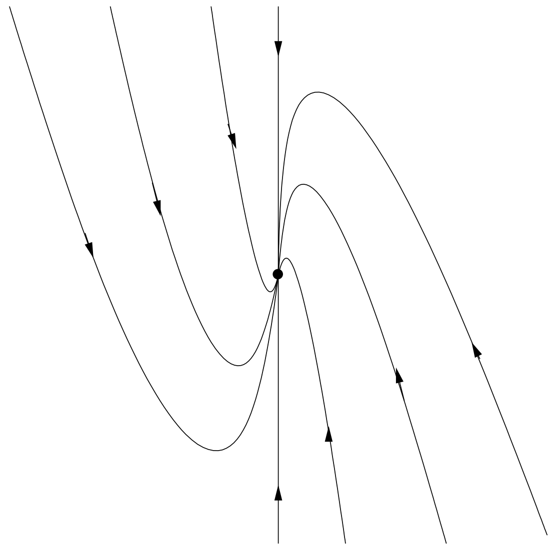

FIGURA 6.6. Nodo improprio (pozzo): caso (4) di (6.2) con $\lambda = \mu < 0$.

Se invece $\lambda = 0$ la (6.10) dà

$$\begin{cases} y_1(t) = y_{01}, \\ y_2(t) = t\, y_{01} + y_{02}. \end{cases} \tag{6.12}$$

Quindi $y_1(t)$ rimane costante, mentre $y_2(t)$ cresce (o diminuisce) lineramente in t. Questo vuol dire che il moto avviene su una retta $y_1 = y_{01}$, parallela all'asse y_2, verso l'alto (*i.e.* verso $y_2 = \infty$) se $y_{01} > 0$ e verso il basso altrimenti.

7. Soluzioni di sistemi lineari del primo ordine

7.1. Introduzione. Nei paragrafi precedenti abbiamo discusso come si calcolano le soluzioni di sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti: in particolare abbiamo visto come il problema si riconduca a calcolare l'esponenziale di un operatore lineare. Nel presente paragrafo consideremo, in grande dettaglio, alcuni esempi concreti, in cui i risultati teorici dei paragrafi precedenti sono applicati per trovare la soluzione.

Per ogni esempio trattato saranno proposti più metodi, sostanzialmente equivalenti, che possono essere seguiti indifferentemente per la determinazione della soluzione (cfr. comunque l'osservazione 7.16 alla fine del paragrafo).

7.2. TEOREMA. *Dato il sistema di equazioni lineari omogenee con condizioni iniziali*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.1}$$

se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *sono gli autovalori di* A *e* $n_1, \ldots, n_r$ *sono le rispettive molteplicità, allora la soluzione* $x(t) = e^{At}x_0$ *è della forma*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k t} P^{(k)}(t), \qquad P^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{n_k - 1} a_j^{(k)} t^j, \tag{7.2}$$

dove $P^{(k)}(t)$ *è un polinomio di grado* $n_k - 1$ *in* t*, con coefficienti* $a_j^{(k)}$ *univocamente determinati.*

7.3. *Dimostrazione del teorema 7.2.* Per il teorema 3.15 possiamo scrivere E come somma diretta degli autospazi generalizzati $E_1, \ldots, E_r$. Sia T l'operatore lineare rappresentato dalla matrice A nelle coordinate x; scrivendo T come in (3.36), si ha $\forall k = 1, \ldots, r$

$$T_k = S_k + N_k, \qquad S_k = \lambda_k \mathbb{1}, \tag{7.3}$$

dove S_k, N_k sono operatori lineari in E_k (cfr. §3.18). Se, per ogni $k = 1, \ldots, r$, indichiamo con

$$\{v_1^{(k)}, \ldots, v_{n_k}^{(k)}\} \tag{7.4}$$

l'insieme dei vettori in E che costituiscono una base per E_k, allora

$$\{v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_{n_2}^{(2)}, \ldots, v_1^{(r)}, \ldots, v_{n_r}^{(r)}\} \tag{7.5}$$

è una base per E; inoltre in tale base l'operatore T è rappresentato da una matrice a blocchi (cfr. l'osservazione 1.33)

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_r \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

dove ogni blocco B_k è una matrice $n_k \times n_k$.

Siano y le coordinate nella base (7.5) e sia Q la matrice del cambiamento di coordinate $x \to y$, *i.e.* $y = Qx$ (cfr. l'osservazione 1.27). Per definizione di somma diretta si può scrivere, per ogni vettore $v \in E$,

$$v = v_1 + \ldots + v_r, \qquad v_k \in E_k \quad \forall k = 1, \ldots, r; \tag{7.7}$$

con leggero abuso di notazione indichiamo con y_k le coordinate del vettore v_k nella base y: *i.e.* y_k non denota la coordinata k-esima di v nella base (7.5), ma l'insieme delle n_k coordinate della componente v_k di v in tale base.

Quindi per costruzione y_k risolve l'equazione

$$\begin{cases} \dot{y}_k = B_k y_k, \\ y_k(t_0) = y_{0k}, \end{cases} \tag{7.8}$$

se

$$y_0 \equiv y(t_0) = Qx(t_0) \equiv Qx_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0k}). \tag{7.9}$$

Poiché $B_k = \lambda_k \mathbb{1} + N_k$, con $N_k^{n_k} = 0$, la soluzione del sistema (7.8) è data da

$$\begin{aligned} y_k(t) &= e^{B_k t} y_{0k} = e^{\lambda_k t} e^{N_k t} y_{0k} = e^{\lambda_k t} \left(\mathbb{1} + N_k t + \ldots + \frac{(N_k t)^{n_k - 1}}{(n_k - 1)!} \right) y_{0k} \\ &\equiv e^{\lambda_k t} \tilde{P}^{(k)}(t), \end{aligned} \tag{7.10}$$

che definisce implicitamente il polinomio $\tilde{P}^{(k)}(t)$ di grado $n_k - 1$ in t. Per scrivere la (7.10) si è utilizzato il fatto che gli operatori $\lambda_k \mathbb{1}$ e N_k commutano, così che, per la proprietà (2) del lemma 2.8, si ha

$$e^{\lambda_k \mathbb{1} t + N_k t} = e^{\lambda_k \mathbb{1} t} e^{N_k t} = \mathbb{1} e^{\lambda_k t} e^{N_k t} = e^{\lambda_k t} e^{N_k t}. \tag{7.11}$$

Dal momento che si ha

$$x(t) = Q^{-1} y(t), \tag{7.12}$$

allora la soluzione $x(t)$ deve essere combinazione lineare delle componenti della soluzione nella base y (con coefficienti dati dagli elementi della matrice Q^{-1}): quindi $x(t)$ deve essere combinazione lineare di prodotti di esponenziali $e^{\lambda_k t}$ per polinomi di grado $n_k - 1$ in t. Da qui segue la (7.3). Il fatto che i coefficienti dei polinomi $P^{(k)}(t)$ debbano essere determinati in modo univoca segue semplicemente dall'unicità della soluzione garantita dal teorema 5.6. ■

7.4. Esempio. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione.

7.5. *Discussione dell'esempio 7.4. I metodo.* Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = (4-\lambda)(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0, \tag{7.14}$$

così che gli autovalori di A sono dati entrambi da $\lambda = 3$, *i.e.* sono coincidenti.

Possiamo allora scrivere

$$A = S + N, \tag{7.15}$$

dove

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad N \equiv A - S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.16}$$

Si verifica immediatamente che

$$\begin{aligned} &(1) \qquad [S, N] \equiv SN - NS = 0, \\ &(2) \qquad N^2 = 0, \end{aligned} \tag{7.17}$$

così che si ha

$$e^{At} = e^{St} e^{Nt} = e^{3t} (\mathbb{1} + Nt) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}, \tag{7.18}$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}, \tag{7.19}$$

che, espressa per componenti, dà

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{3t} \left[(1+t)\, x_{01} - t x_{02} \right], \\ x_2(t) &= e^{3t} \left[t x_{01} + (1-t)\, x_{02} \right], \end{aligned} \tag{7.20}$$

che costituisce la soluzione del sistema con dati iniziali (x_{01}, x_{02}).

7.6. *Discussione dell'esempio 7.4. II metodo.* Come in §7.5 si studia il polinomio caratteristico (7.14) e si trovano due autovalori coincidenti $\lambda = 3$. Cerchiamo una soluzione nella forma

$$x(t) = [a + bt]\, e^{3t}, \tag{7.21}$$

con $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ da determinarsi imponenendo che $x(t)$ risolva l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e soddisfi la condizione iniziale $x(0) = x_0$.

Poiché si ha

$$\dot{x}(t) = [3(a + bt) + b]\, e^{3t} = [(3a + b) + 3bt]\, e^{3t}, \tag{7.22}$$

l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ dà

$$\begin{aligned} [(3a_1 + b_1) + 3b_1 t]\, e^{3t} &= [(4a_1 - a_2) + (4b_1 - b_2)\, t]\, e^{3t}, \\ [(3a_2 + b_2) + 3b_2 t]\, e^{3t} &= [(a_1 + 2a_2) + (b_1 + 2b_2)\, t]\, e^{3t}, \end{aligned} \tag{7.23}$$

che implica le 4 equazioni

$$\begin{cases} 3a_1 + b_1 = 4a_1 - a_2, \\ 3b_1 = 4b_1 - b_2, \\ 3a_2 + b_2 = a_1 + 2a_2, \\ 3b_2 = b_1 + 2b_2. \end{cases} \tag{7.24}$$

Si ottengono quindi 2 equazioni per le componenti di b,

$$\begin{cases} 3b_1 = 4b_1 - b_2, \\ 3b_2 = b_1 + 2b_2, \end{cases} \tag{7.25}$$

che equivalgono all'unica equazione

$$b_1 - b_2 = 0; \tag{7.26}$$

quindi ponendo $b_2 = \beta$, con $\beta \in \mathbb{R}$, si ha $b_1 = \beta$, *i.e.* $b = (\beta, \beta)$.

Per le componenti di a si hanno le 2 equazioni

$$\begin{cases} 3a_1 + b_1 = 4a_1 - a_2, \\ 3a_2 + b_2 = a_1 + 2a_2, \end{cases} \tag{7.27}$$

che equivalgono all'unica equazione

$$\beta = a_1 - a_2; \tag{7.28}$$

ponendo $a_2 = \alpha$ si trova $a_1 = \beta + \alpha$, *i.e.* $a = (\alpha + \beta, \beta)$.

In conclusione si ha

$$\begin{cases} a = (a_1, a_2) = (\alpha + \beta, \alpha), \\ b = (b_1, b_2) = (\beta, \beta), \end{cases} \tag{7.29}$$

con α, β da determinarsi imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali.

Si ha allora

$$x(0) = a = x_0, \tag{7.30}$$

che scritta per componenti diventa

$$\begin{cases} a_1 = \alpha + \beta = x_{01}, \\ a_2 = \alpha = x_{02}, \end{cases} \tag{7.31}$$

che risolta dà

$$\begin{cases} \alpha = x_{02}, \\ \beta = x_{01} - x_{02}, \end{cases} \tag{7.32}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} a = (x_{01}, x_{02}), \\ b = (x_{01} - x_{02}, x_{01} - x_{02}), \end{cases} \tag{7.33}$$

La soluzione è quindi

$$\begin{aligned} x_1(t) &= [a_1 + b_1 t]\, e^{3t} = [x_{01} + (x_{01} - x_{02})\, t]\, e^{3t}, \\ x_2(t) &= [a_2 + b_2 t]\, e^{3t} = [x_{02} + (x_{01} - x_{02})\, t]\, e^{3t}. \end{aligned} \tag{7.34}$$

7.7. Esempio. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.35}$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$.

7.8. *Discussione dell'esempio 7.7. I metodo.* Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare A è

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 1\right] = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) \\ &= (1-\lambda)\,(\lambda - 1 - i)\,(\lambda - 1 + i) \end{aligned} \tag{7.36}$$

così che lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1 + i, \qquad \lambda_3 = 1 - i: \tag{7.37}$$

abbiamo quindi tre autovalori distinti, uno reale ($\lambda_1 = 1$) e due complessi coniugati ($\lambda_2 = 1 + i$ e $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = 1 - i$).

Possiamo scrivere $E = \mathbb{R}^3$ come somma diretta

$$\begin{aligned} &E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \\ &E_1 = \operatorname{Ker}(A - \mathbb{1}), \\ &E_2 = \operatorname{Ker}(A - (1+i)\mathbb{1}), \\ &E_3 = \operatorname{Ker}(A - (1-i)\mathbb{1}), \end{aligned} \tag{7.38}$$

Cerchiamo una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in E costituita dagli autovettori di A: in tale base l'operatore rappresentato da A nella base standard sarà rappresentato dalla matrice diagonale

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \tag{7.39}$$

come segue dal teorema 1.53.

Le componenti dell'autovettore v_1 si determinano cercando le soluzioni (x, y, z) non banali dell'equazione

$$(A - \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \tag{7.40}$$

che fornisce le due relazioni

$$y = 0, \qquad z = 0 \tag{7.41}$$

che insieme, per esempio, ammettono soluzione

$$v_1 = (1, 0, 0)\,. \tag{7.42}$$

Le componenti dell'autovettore v_2 si determinano cercando le soluzioni (x, y, z) non banali dell'equazione

$$(A - (1+i)\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \tag{7.43}$$

che fornisce le relazioni

$$\begin{cases} -ix + y = 0, \\ -iy - z = 0, \\ y - iz = 0. \end{cases} \tag{7.44}$$

La prima e la terza insieme implicano

$$x = z, \tag{7.45}$$

che sostituita nella terza dà

$$y = iz, \tag{7.46}$$

così che, ponendo per esempio $z = 1$, si ottiene la soluzione

$$v_2 = (1, i, 1)\,. \tag{7.47}$$

Analogamente si trova per l'autovettore v_3 l'espressione

$$v_3 = (1, -i, 1)\,, \tag{7.48}$$

che si poteva anche ricavare notando che deve essere $v_3 = \overline{v}_2$ (cfr. la proposizione 1.56).

In conclusione si ha

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 + i \\ \lambda_3 = 1 - i \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{c} v_1 = (1, 0, 0), \\ v_2 = (1, i, 1), \\ v_3 = (1, -i, 1). \end{array} \tag{7.49}$$

Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.50}$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \qquad Q^{-1} = P^T. \tag{7.51}$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.52}$$

così che $\det Q = 2i$. Si ha quindi

$$Q = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}, \tag{7.53}$$

come è immediato verificare.

Si può anche facilmente verificare che risulta

$$\begin{aligned} B = QAQ^{-1} &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2i & 0 & -2i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.54}$$

consistentemente con la (7.39).

Nelle coordinate y il sistema (7.35) diventa

$$\dot{y} = By, \qquad y \in \mathbb{R}^3, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \tag{7.55}$$

con condizioni iniziali $y(0) = Qx_0$, dove

$$\begin{cases} y_{01} = x_{01} - x_{03}, \\ y_{02} = (x_{02} + ix_{03})/2i, \\ y_{03} = (-x_{02} + ix_{03})/2i; \end{cases} \tag{7.56}$$

la soluzione di (7.55) si calcola immediatamente ed è data da

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^t y_{01} = e^t (x_{01} - x_{03}), \\ y_2(t) &= e^t e^{it} y_{02} = e^t e^{it} (x_{02} + ix_{03})/2i, \\ y_3(t) &= e^t e^{-it} y_{03} = e^t e^{-it} (-x_{02} + ix_{03})/2i, \end{aligned} \tag{7.57}$$

che, espressa nelle coordinate x, diventa $x(t) = Q^{-1}y(t)$: quindi si ottiene

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \\
&= e^t \left[x_{01} - x_{03} + \frac{e^{it}}{2i} (x_{02} + ix_{03}) + \frac{e^{-it}}{2i} (-x_{02} + ix_{03}) \right] \\
&= e^t \left(x_{01} - x_{03} + x_{02} \sin t + x_{03} \cos t \right), \\
x_2(t) &= i \left(y_2(t) - y_3(t) \right) = e^t \left[\frac{e^{it}}{2} (x_{02} + ix_{03}) - \frac{e^{-it}}{2} (-x_{02} + ix_{03}) \right] \\
&= e^t \left(x_{02} \cos t - x_{03} \sin t \right), \\
x_3(t) &= y_2(t) + y_3(t) = e^t \left[\frac{e^{it}}{2i} (x_{02} + ix_{03}) + \frac{e^{-it}}{2i} (-x_{02} + ix_{03}) \right] \\
&= e^t \left(x_{02} \sin t + x_{03} \cos t \right).
\end{aligned} \tag{7.58}$$

7.9. *Discussione dell'esempio 7.7. II metodo.* Si procede come in §7.8 per determinare lo spettro di A; invece che nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ si può lavorare nella base $\{v_1, v, u\}$, se poniamo $v_2 = u + iv$, quindi con

$$v = (0, 1, 0), \qquad u = (1, 0, 1), \tag{7.59}$$

come segue dal lemma 1.59; possiamo allora scrivere

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v \\ u \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.60}$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base $\{v_1, v, u\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \qquad Q^{-1} = P^T. \tag{7.61}$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.62}$$

così che $\det Q = 1$. Si ha quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.63}$$

come è immediato verificare.

Si può anche facilmente verificare che risulta

$$\begin{aligned} B = QAQ^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.64}$$

consistentemente con il lemma 1.59.

Nelle coordinate y il sistema (7.35) diventa

$$\dot{y} = By, \qquad y \in \mathbb{R}^3, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.65}$$

con condizioni iniziali $y(0) = Qx_0$, dove

$$\begin{cases} y_{01} = x_{01} - x_{03}, \\ y_{02} = x_{02}, \\ y_{03} = x_{03}; \end{cases} \tag{7.66}$$

la soluzione di (7.65) si calcola immediatamente e (cfr. anche l'esempio 5.10) è data da

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^t y_{01} = e^t \left(x_{01} - x_{03}\right), \\ y_2(t) &= e^t \left(y_{02}\cos t - y_{03}\sin t\right) = e^t \left(x_{02}\cos t - x_{03}\sin t\right), \\ y_3(t) &= e^t \left(y_{02}\sin t + y_{03}\cos t\right) = e^t \left(x_{02}\sin t + x_{03}\cos t\right), \end{aligned} \tag{7.67}$$

che, espressa nelle coordinate x, diventa $x(t) = Q^{-1}y(t)$: quindi si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) + y_3(t) = e^t \left(x_{01} - x_{03} + x_{02}\sin t + x_{03}\cos t\right), \\ x_2(t) &= y_2(t) = e^t \left(x_{02}\cos t - x_{03}\sin t\right), \\ x_3(t) &= y_3(t) = e^t \left(x_{02}\sin t + x_{03}\cos t\right). \end{aligned} \tag{7.68}$$

7.10. *Discussione dell'esempio 7.7. III metodo.* Come in §7.8 si studia il polinomio caratteristico (7.36) e si trova lo spettro (7.37). Cerchiamo allora una soluzione della forma

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^t + be^t e^{it} + ce^t e^{-it} \\ &= ae^t + 2\mathrm{Re}\,(b)\, e^t\cos t - 2\mathrm{Im}\,(b)\, e^t \sin t, \end{aligned} \tag{7.69}$$

con $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$ da determinarsi imponenendo che $x(t)$ risolva l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e soddisfi la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Nel passare dalla prima alla seconda espressione, in (7.69), si è utilizzato il fatto che si deve avere $c = \overline{b}$, dal momento che la soluzione deve essere reale.

Poiché si ha

$$\dot{x}(t) = ae^t + b\,(1+i)\,e^{t+it} + \overline{b}\,(1-i)\,e^{t-it}, \tag{7.70}$$

l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ dà

$$\begin{aligned}
&a_1 e^t + (1+i)\,b_1 e^{t+it} + (1-i)\,c_1 e^{t-it} \\
&\qquad = (a_1+a_2)\,e^t + (b_1+b_2)\,e^{t+it} + (c_1+c_2)\,e^{t-it}, \\
&a_2 e^t + (1+i)\,b_2 e^{t+it} + (1-i)\,c_2 e^{t-it} \\
&\qquad = (a_2-a_3)\,e^t + (b_2-b_3)\,e^{t+it} + (c_2-c_3)\,e^{t-it}, \\
&a_3 e^t + (1+i)\,b_3 e^{t+it} + (1-i)\,c_3 e^{t-it} \\
&\qquad = (a_2+a_3)\,e^t + (b_2+b_3)\,e^{t+it} + (c_2+c_3)\,e^{t-it},
\end{aligned} \tag{7.71}$$

che implica le 9 equazioni

$$\begin{cases}
a_1 = a_1 + a_2, \\
b_1\,(1+i) = b_1 + b_2, \\
c_1\,(1-i) = c_1 + c_2, \\
a_2 = a_2 - a_3, \\
b_2\,(1+i) = b_2 - b_3, \\
c_2\,(1-i) = c_2 - c_3, \\
a_3 = a_2 + a_3, \\
b_3\,(1+i) = b_2 + b_3, \\
c_3\,(1-i) = c_2 + c_3,
\end{cases} \tag{7.72}$$

di cui si possono considerare solo le 6 per a e b (tenendo conto che quelle per c sono semplicemente le complesse coniugate di quelle per b):

$$\begin{cases}
a_1 = a_1 + a_2, \\
b_1\,(1+i) = b_1 + b_2, \\
a_2 = a_2 - a_3, \\
b_2\,(1+i) = b_2 - b_3, \\
a_3 = a_2 + a_3, \\
b_3\,(1+i) = b_2 + b_3.
\end{cases} \tag{7.73}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{cases}
a_2 = 0, \\
ib_1 = b_2, \\
a_3 = 0, \\
ib_2 = -b_3, \\
a_2 = 0, \\
ib_3 = b_2,
\end{cases} \tag{7.74}$$

così che si ha

$$a_2 = a_3 = 0, \qquad b_1 = -ib_2 = b_3; \tag{7.75}$$

possiamo quindi scrivere

$$\begin{cases} a = (a_1, a_2, a_3) = (\alpha, 0, 0), \\ b = (b_1, b_2, b_3) = (\beta, i\beta, \beta), \\ c = (c_1, c_2, c_3) = (\overline{\beta}, -i\overline{\beta}, \overline{\beta}), \end{cases} \tag{7.76}$$

con $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ da determinarsi imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali.

Si ha dunque

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \overline{\beta} = x_{01}, \\ i\left(\beta - \overline{\beta}\right) = x_{02}, \\ \beta + \overline{\beta} = x_{03}, \end{cases} \tag{7.77}$$

dove

$$\beta + \overline{\beta} = 2\mathrm{Re}\,(\beta), \qquad i\left(\beta - \overline{\beta}\right) = -2\mathrm{Im}\,(\beta), \tag{7.78}$$

così che, in (7.69), tenendo conto anche della (7.76), possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\mathrm{Re}\, b = (2\mathrm{Re}\,(\beta), -2\mathrm{Im}\,(\beta), 2\mathrm{Re}\,(\beta)) = (x_{03}, x_{02}, x_{03})\,, \\ 2\mathrm{Im}\, b = (2\mathrm{Im}\,(\beta), 2\mathrm{Re}\,(\beta), 2\mathrm{Im}\,(\beta)) = (-x_{02}, x_{03}, -x_{02})\,, \end{cases} \tag{7.79}$$

mentre

$$a = (\alpha, 0, 0) = (x_{01} - x_{03})\,. \tag{7.80}$$

In conclusione la (7.69) dà

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 e^t + 2\mathrm{Re}\,(b_1)\, e^t \cos t - 2\mathrm{Im}\,(b_1)\, e^t \sin t \\ &= e^t \left(x_{01} - x_{03} + x_{03} \cos t + x_{02} \sin t\right), \\ x_2(t) &= a_2 e^t + 2\mathrm{Re}\,(b_2)\, e^t \cos t - 2\mathrm{Im}\,(b_2)\, e^t \sin t \\ &= e^t \left(x_{02} \cos t - x_{03} \sin t\right), \\ x_3(t) &= a_3 e^t + 2\mathrm{Re}\,(b_3)\, e^t \cos t - 2\mathrm{Im}\,(b_3)\, e^t \sin t \\ &= e^t \left(x_{03} \cos t + x_{02} \sin t\right). \end{aligned} \tag{7.81}$$

7.11. *Discussione dell'esempio 7.7. IV metodo.* Si può procedere come in §7.10, ma cercando direttamente la soluzione nella forma

$$x(t) = a e^t + b e^t \cos t + c e^t \sin t, \tag{7.82}$$

con $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$ da determinarsi imponenendo che $x(t)$ risolva l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e soddisfi la condizione iniziale $x(0) = x_0$.

Poiché si ha

$$\dot{x}(t) = e^t \left[a + (b + c) \cos t + (-b + c) \sin t\right], \tag{7.83}$$

l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ dà

$$\begin{aligned} & e^t \left[a_1 + (b_1 + c_1) \cos t + (-b_1 + c_1) \sin t \right] \\ & \qquad = e^t \left[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t \right], \\ & e^t \left[a_2 + (b_2 + c_2) \cos t + (-b_2 + c_2) \sin t \right] \\ & \qquad = e^t \left[(a_2 - a_3) + (b_2 - b_3) \cos t + (c_2 - c_3) \sin t \right], \\ & e^t \left[a_3 + (b_3 + c_3) \cos t + (-b_3 + c_3) \sin t \right] \\ & \qquad = e^t \left[(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) \cos t + (c_2 + c_3) \sin t, \right] \end{aligned} \tag{7.84}$$

che implica le 9 equazioni

$$\begin{cases} a_1 = a_1 + a_2, \\ b_1 + c_1 = b_1 + b_2, \\ -b_1 + c_1 = c_1 + c_2, \\ a_2 = a_2 - a_3, \\ b_2 + c_2 = b_2 - b_3, \\ -b_2 + c_2 = c_2 - c_3, \\ a_3 = a_2 + a_3, \\ b_3 + c_3 = b_2 + b_3, \\ -b_3 + c_3 = c_2 + c_3, \end{cases} \tag{7.85}$$

che implicano le 6 equazioni indipendenti

$$\begin{cases} a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \\ c_1 = b_2, \\ b_1 = -c_2, \\ c_2 = -b_3, \\ b_2 = c_3, \end{cases} \tag{7.86}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{cases} a = (a_1, a_2, a_3) = (\alpha, 0, 0), \\ b = (b_1, b_2, b_3) = (\beta, \gamma, \beta), \\ c = (c_1, c_2, c_3) = (\gamma, -\beta, \gamma), \end{cases} \tag{7.87}$$

con $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ da determinarsi imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali $x(0) = x_0$. Dalla (7.82) otteniamo

$$x(0) = a + b = x_0, \tag{7.88}$$

che, scritta per componenti, dà

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_{01}, \\ \gamma = x_{02}, \\ \beta = x_{03}, \end{cases} \tag{7.89}$$

così che si deve avere

$$\begin{cases} a = (a_1, a_2, a_3) = (x_{01} - x_{03}, 0, 0), \\ b = (b_1, b_2, b_3) = (x_{03}, x_{02}, x_{03}), \\ c = (c_1, c_2, c_3) = (x_{02}, -x_{03}, x_{02}). \end{cases} \tag{7.90}$$

Introducendo la (7.90) nella (7.82) otteniamo per la soluzione $x(t)$ l'espressione

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^t \left(x_{01} - x_{03} + x_{03} \cos t + x_{02} \sin t \right), \\ x_2(t) &= e^t \left(x_{02} \cos t - x_{03} \sin t \right), \\ x_3(t) &= e^t \left(x_{03} \cos t + x_{02} \sin t \right), \end{aligned} \tag{7.91}$$

come trovato con i metodi precedenti.

7.12. ESEMPIO. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.92}$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione. Scrivere esplicitamente la solzuione con condizioni iniziali $x_0 = (1, 1, 1)$.

7.13. *Discussione dell'esempio 7.12. I metodo.* Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare A è

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2 - \lambda) \left(\lambda^2 - 4 \right) + (-2\lambda - 4) + 2\,(2 + \lambda) \\ &= (2 - \lambda) \left(\lambda^2 - 4 \right) - (2\lambda + 4) + (2\lambda + 4) \\ &= (2 - \lambda) \left(\lambda^2 - 4 \right) = (2 - \lambda)\,(\lambda - 2)\,(\lambda + 2), \end{aligned} \tag{7.93}$$

così che lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -2 \ : \tag{7.94}$$

abbiamo quindi due autovalori distinti $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_3 = -2$ di molteplicità rispettivamente $n_1 = 2$ e $n_3 = 1$.

Possiamo scrivere $E = \mathbb{R}^3$ come somma diretta

$$\begin{aligned} &E = E_1 \oplus E_2, \\ &E_1 = \operatorname{Ker} \left(A - 2\mathbb{1} \right)^2, \\ &E_2 = \operatorname{Ker} \left(A + 2\mathbb{1} \right). \end{aligned} \tag{7.95}$$

Per il teorema di decomposizione primaria A può essere scritta nella forma $A = S + N$, con $A \in \mathrm{M}(3)$ semisemplice e $N \in \mathrm{M}(3)$ nilpotente.

Cerchiamo una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in E costituita da elementi di due basi $\{v_1, v_2\}$ in E_1 e $\{v_3\}$ in E_2: in tale base l'operatore rappresentato da S nella base standard sarà rappresentato dalla matrice diagonale

$$S' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{7.96}$$

Le componenti dei vettori della base $\{v_1, v_2\}$ si determinano cercando le soluzioni (x, y, z) non banali dell'equazione

$$(A - 2\mathbb{1})^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \tag{7.97}$$

Si ha

$$A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \tag{7.98}$$

quindi

$$\begin{aligned} (A - \mathbb{1})^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{7.99}$$

che fornisce l'unica relazione

$$y - 2z = 0, \tag{7.100}$$

che, per esempio, ammette soluzioni

$$v_1 = (1, 0, 0), \qquad v_2 = (0, 2, 1); \tag{7.101}$$

infatti, scegliendo $z = 1$, si deve avere $y = 2$, mentre x può essere arbitrario, *e.g.* $x = 0$, mentre, scegliendo $z = 0$, si deve avere $y = 0$, mentre x può essere arbitrario (purché diverso da 0, altimenti il vettore è nullo), *e.g.* $x = 1$.

Una base $\{v_3\}$ di E_2 è data dall'autovettore associato all'autovalore $\lambda_3 = -2$, *i.e.* dal vettore di componenti (x, y, z) tali che

$$(A + 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \tag{7.102}$$

da cui si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \end{cases} \tag{7.103}$$

così che la somma delle prime due dà

$$5x + 4z = 0, \tag{7.104}$$

mentre la loro differenza dà

$$3x - 2y = 0, \tag{7.105}$$

quindi una soluzione non banale è (fissando $z = -5$)

$$v_3 = (4, 6, -5)\,. \tag{7.106}$$

In conclusione si ha

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right\} & \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} v_1 = (1,0,0), \\ v_2 = (0,2,1), \end{array}\right. \\ \lambda_3 = -2 & \rightarrow \quad v_3 = (4,6,-5). \end{cases} \tag{7.107}$$

Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \tag{7.108}$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \qquad Q^{-1} = P^T. \tag{7.109}$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}. \tag{7.110}$$

così che $\det Q = -16$. Si ha quindi

$$Q = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{7.111}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} S = Q^{-1} S' Q &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -8 & 16 \\ 0 & 10 & 12 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 32 & -16 & 32 \\ 0 & 8 & 48 \\ 0 & 20 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 3 \\ 1 & 5/4 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.112}$$

così che

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 3 \\ 1 & 5/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1/2 & 1 \\ 1 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{7.113}$$

e si verifica immediatamente che

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1/2 & 1 \\ 1 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1/2 & 1 \\ 1 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{7.114}$$

così che N è effettivamente nilpotente.

Si ha allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = e^{t(S+N)} = e^{tS+tN} = e^{tS} e^{tN} = Q^{-1} e^{tS'} Q \, e^{tN}, \tag{7.115}$$

dove

$$\begin{aligned} e^{tS} = Q^{-1} e^{tS'} Q &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16e^{2t} & -4e^{2t} & 8e^{2t} \\ 0 & 5e^{2t} & 6e^{2t} \\ 0 & e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16e^{2t} & -4e^{2t} + 4e^{-2t} & 8e^{2t} - 8e^{-2t} \\ 0 & 10e^{2t} + 6e^{-2t} & 12e^{2t} - 12e^{-2t} \\ 0 & 5e^{2t} - 5e^{-2t} & 6e^{2t} + 10e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.116}$$

e

$$\begin{aligned} e^{tN} = \mathbb{1} + tN &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2t & -t/2 & t \\ t & -t/4 & t/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 - t/2 & t \\ t & -t/4 & 1 + t/2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.117}$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16e^{2t} & -4e^{2t} + 4e^{-2t} & 8e^{2t} - 8e^{-2t} \\ 0 & 10e^{2t} + 6e^{-2t} & 12e^{2t} - 12e^{-2t} \\ 0 & 5e^{2t} - 5e^{-2t} & 6e^{2t} + 10e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 - t/2 & t \\ t & -t/4 & 1 + t/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16e^{2t} & -4\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) & 8\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) \\ 32te^{2t} & (10 - 8t)\, e^{2t} + 6e^{-2t} & (12 + 16t)\, e^{2t} - 12e^{-2t} \\ 16te^{2t} & (5 - 4t)\, e^{2t} - 5e^{-2t} & (6 + 8t)\, e^{2t} + 10e^{-2t} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} e^{2t} & -\left(e^{2t} - e^{-2t}\right)/4 & \left(e^{2t} - e^{-2t}\right)/2 \\ 2te^{2t} & (5 - 4t)\, e^{2t}/8 + 3e^{-2t}/8 & (3 + 4t)\, e^{2t}/4 - 3e^{-2t}/4 \\ te^{2t} & (5 - 4t)\, e^{2t}/16 - 5e^{-2t}/16 & (3 + 4t)\, e^{2t}/8 + 5e^{-2t}/8 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.118}$$

Si noti che, dovendo calcolare prima $Q^{-1}S'Q$ per determinare S e dopo $Q^{-1}e^{tS'}Q$ per determinare e^{tS}, può essere utile in generale calcolare $Q^{-1}DQ$, con D matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ; \tag{7.119}$$

si ottiene allora

$$\begin{aligned} Q^{-1}DQ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16a & -4a & 8a \\ 0 & 5b & 6b \\ 0 & c & -2c \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16a & -4a+4c & 8a-8c \\ 0 & 10b+6c & 12b-12c \\ 0 & 5b-5c & 6b+10c \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{7.120}$$

che per

$$a = 2, \qquad b = 2, \qquad c = -2, \tag{7.121}$$

dà

$$S = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 32 & -16 & 32 \\ 0 & 8 & 48 \\ 0 & 20 & -8 \end{pmatrix} , \tag{7.122}$$

mentre, per

$$a = e^{2t}, \qquad b = e^{2t}, \qquad c = e^{-2t}, \tag{7.123}$$

dà

$$e^{tS} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16e^{2t} & -4e^{2t}+4e^{-2t} & 8e^{2t}-8e^{-2t} \\ 0 & 10e^{2t}+6e^{-2t} & 12e^{2t}-12e^{-2t} \\ 0 & 5e^{2t}-5e^{-2t} & 6e^{2t}+10e^{-2t} \end{pmatrix} . \tag{7.124}$$

Quindi, se $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ è il dato iniziale, la soluzione è data da

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{2t}x_{01} - \left[\left(e^{2t} - e^{-2t}\right)/4\right] x_{02} + \left[\left(e^{2t} - e^{-2t}\right)/2\right] x_{03}, \\ x_2(t) &= 2te^{2t}x_{01} + \left[(5-4t)\, e^{2t}/8 + 3e^{-2t}/8\right] x_{02} \\ &\quad + \left[(3+4t)\, e^{2t}/4 - 3e^{-2t}/4\right] x_{03}, \\ x_3(t) &= te^{2t}x_{01} + \left[(5-4t)\, e^{2t}/16 - 5e^{-2t}/16\right] x_{02} \\ &\quad + \left[(3+4t)\, e^{2t}/8 + 5e^{-2t}/8\right] x_{03}. \end{aligned} \tag{7.125}$$

Se il dato iniziale è $x(0) = (1, 1, 1)$ si ha allora

$x(t) = e^{At}x(0)$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & \left(e^{2t}-e^{-2t}\right)/4 & \left(e^{2t}-e^{-2t}\right)/2 \\ 2te^{2t} & (5-4t)\,e^{2t}/2+3e^{-2t}/8 & (3+4t)\,e^{2t}/4-3e^{-2t}/4 \\ te^{2t} & (5-4t)\,e^{2t}/16-5e^{-2t}/16 & (3+4t)\,e^{2t}/8+5e^{-2t}/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5e^{2t}/4-e^{-2t}/4 \\ (5t/2+11/8)\,e^{2t}-3e^{-2t}/8 \\ (5t/4+11/16)\,e^{2t}+5e^{-2t}/16 \end{pmatrix}, \qquad (7.126)
\end{aligned}
$$

che espressa per componenti dà

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= 5e^{2t}/4-e^{-2t}/4, \\
x_2(t) &= (5t/2+11/8)\,e^{2t}-3e^{-2t}/8, \qquad (7.127) \\
x_3(t) &= (5t/4+11/16)\,e^{2t}+5e^{-2t}/16.
\end{aligned}
$$

7.14. *Discussione dell'esempio 7.12. II metodo.* Si procede come in §7.13 nel determinare la matrice Q del cambiamento di coordinate, nel passare nella nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$, e la sua inversa; cfr. le (7.110) e (7.111).

Nella nuova base la matrice B che rappresenta l'operatore lineare T, che, nella vecchia base, è rappresentato dalla matrice A, è data da

$$
\begin{aligned}
B = QAQ^{-1} &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (7.128)
\end{aligned}
$$

Si ha quindi

$$
B = S_0 + N_0, \qquad S_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (7.129)
$$

dove N_0 è nilpotente, *i.e.* $N_0^2 = 0$, e $[S_0, N_0] = 0$.

Quindi

$$
\begin{aligned}
e^{Bt} &= e^{S_0 t + N_0 t} = e^{S_0 t} e^{N_0 t} = e^{S_0 t}\left(\mathbb{1} + N_0 t\right) \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \qquad (7.130)
\end{aligned}
$$

Se chiamiamo y le coordinate nella nuova base $\{v_1, v_2, v_3\}$, così che $y = Qy$, si ha allora

$$
y(t) = e^{Bt} y_0, \qquad y_0 = Qx_0; \qquad (7.131)
$$

dove

$$\begin{cases} y_{01} = (4x_{01} - x_{02} + 2x_{03})/4, \\ y_{02} = (5x_{02} + 6x_{03})/16, \\ y_{03} = (x_{02} - 2x_{03})/16. \end{cases} \tag{7.132}$$

Quindi, dalla (7.130), si ottiene

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{2t} y_{01}, \\ y_2(t) &= e^{2t}\left(t y_{01} + y_{02}\right), \\ y_3(t) &= e^{-2t} y_{03}, \end{aligned} \tag{7.133}$$

che dà, per le coordinate x,

$$\begin{aligned} x_1(t) = y_1(t) + 4y_3(t) &= \frac{1}{4}\left(4x_{01} - x_{02} + 2x_{03}\right) e^{2t} + 4\frac{1}{16}\left(x_{02} - 2x_{03}\right) e^{-2t} \\ &= e^{2t} x_{01} - \frac{1}{4}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) x_{02} + \frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) x_{03}, \\ x_2(t) = 2y_2(t) + 6y_3(t) &= 2\left[\frac{1}{4}t\left(4x_{01} - x_{02} + 2x_{03}\right) + \frac{1}{16}\left(5x_{02} + 6x_{03}\right)\right] e^{2t} \\ &\qquad + 6\frac{1}{16}\left(x_{02} - 2x_{03}\right) e^{-2t} \\ &= 2te^{2t} x_{01} + \left[\left(\frac{5}{8} - \frac{t}{2}\right) e^{2t} + \frac{3}{8} e^{-2t}\right] x_{02} + \left[\left(\frac{3}{4} + t\right) e^{2t} - \frac{3}{4} e^{-2t}\right] x_{03}, \\ x_3(t) = y_2(t) - 5y_3(t) &= \left[\frac{1}{4}t\left(4x_{01} - x_{02} + 2x_{03}\right) + \frac{1}{16}\left(5x_{02} + 6x_{03}\right)\right] e^{2t} \\ &\qquad - 5\frac{1}{16}\left(x_{02} - 2x_{03}\right) e^{-2t} \\ &= te^{2t} x_{01} + \left[\left(\frac{5}{16} - \frac{t}{4}\right) e^{2t} - \frac{5}{16} e^{-2t}\right] x_{02} + \left[\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}t\right) e^{2t} + \frac{5}{8} e^{-2t}\right] x_{03}. \end{aligned} \tag{7.134}$$

Se il dato iniziale è $x_0 = (1,1,1)$, le (7.134) si riducono, come è facile verificare, alle (7.127).

7.15. *Discussione dell'esempio 7.12. III metodo.* Come in §7.13 si studia il polinomio caratteristico (7.93) e si trova lo spettro (7.94). Cerchiamo allora una soluzione nella forma

$$x(t) = [a + bt]\, e^{2t} + c\, e^{-2t}, \tag{7.135}$$

con $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$ da determinarsi imponenendo che $x(t)$ risolva l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e soddisfi la condizione iniziale $x(0) = x_0$.

Poiché si ha

$$\dot{x}(t) = \left[2\left(a + bt\right) + b\right] e^{2t} - 2c\, e^{-2t} = \left[(2a + b) + 2bt\right] e^{2t} - 2c\, e^{-2t}, \tag{7.136}$$

l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ dà

$$
\begin{aligned}
&[(2a_1 + b_1) + 2b_1 t]\, e^{2t} - 2c_1 e^{-2t} \\
&\qquad = [(2a_1 - a_2 + 2a_3) + (2b_1 - b_2 + 2b_3)\, t]\, e^{2t} + (2c_1 - c_2 + 2c_3]\, e^{-2t}, \\
&[(2a_2 + b_2) + 2b_2 t]\, e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} \\
&\qquad = [(2a_1 + 4a_3) + (2b_1 + 4b_3)\, t]\, e^{2t} + (2c_1 + 4c_3]\, e^{-2t}, \\
&[(2a_3 + b_3) + 2b_3 t]\, e^{2t} - 2c_3 e^{-2t} \\
&\qquad = [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, t]\, e^{2t} + (c_1 + c_2]\, e^{-2t},
\end{aligned}
\tag{7.137}
$$

che implica le 9 equazioni

$$
\begin{cases}
2a_1 + b_1 = 2a_1 - a_2 + 2a_3, \\
2b_1 = 2b_1 - b_2 + 2b_3, \\
-2c_1 = 2c_1 - c_2 + 2c_3, \\
2a_2 + b_2 = 2a_1 + 4a_3, \\
2b_2 = 2b_1 + 4b_3, \\
-2c_2 = 2c_1 + 4c_3, \\
2a_3 + b_3 = a_1 + a_2, \\
2b_3 = b_1 + b_2, \\
-2c_3 = c_1 + c_2;
\end{cases}
\tag{7.138}
$$

si ottengono quindi 3 equazioni per le componenti di c,

$$
\begin{cases}
4c_1 - c_2 + 2c_3 = 0, \\
2c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0, \\
c_1 + c_2 + 2c_3 = 0,
\end{cases}
\tag{7.139}
$$

e 6 equazioni per le componenti di a e b,

$$
\begin{cases}
b_1 = -a_2 + 2a_3, \\
0 = -b_2 + 2b_3, \\
b_2 = 2a_1 - 2a_2 + 4a_3, \\
0 = 2b_1 - 2b_2 + 4b_3, \\
b_3 = a_1 + a_2 - 2a_3, \\
0 = b_1 + b_2 - 2b_3.
\end{cases}
\tag{7.140}
$$

Studiamo prima le equazioni per c. La terza è proporzionale alla seconda, quindi possiamo considerare solo le equazioni

$$
\begin{cases}
4c_1 - c_2 + 2c_3 = 0, \\
c_1 + c_2 + 2c_3 = 0.
\end{cases}
\tag{7.141}
$$

La differenza tra le due equazioni dà

$$
3c_1 - 2c_2 = 0, \tag{7.142}
$$

mentre la loro somma dà

$$5c_1 + 4c_3 = 0; \tag{7.143}$$

quindi, ponendo $c_3 = \gamma$, con $\gamma \in \mathbb{R}$, si ha $c_1 = -4\gamma/5$ e $c_2 = 3c_1/2 = -6\gamma/5$.

Studiamo ora le equazioni per a e b. Abbiamo tre equazioni per la sola b:

$$\begin{cases} 0 = -b_2 + 2b_3, \\ 0 = 2b_1 - 2b_2 + 4b_3, \\ 0 = 2b_1 + b_2 - 2b_3; \end{cases} \tag{7.144}$$

la prima dà

$$b_2 = 2b_3, \tag{7.145}$$

così che la terza dà

$$2b_1 = 2b_3 - b_2 = 0, \tag{7.146}$$

così che, ponendo $b_3 = \beta$, con $\beta \in \mathbb{R}$, si ha $b_1 = 0$ e $b_2 = 2\beta$.

Possiamo quindi studiare le equazioni per a,

$$\begin{cases} b_1 = -a_2 + 2a_3, \\ b_2 = 2a_1 - 2a_2 + 4a_3, \\ b_3 = a_1 + a_2 - 2a_3, \end{cases} \tag{7.147}$$

dove, utilizzando le espressioni appena trovate per le componenti di b, si ottiene

$$\begin{cases} 0 = -a_2 + 2a_3, \\ 2\beta = 2a_1 - 2a_2 + 4a_3, \\ \beta = a_1 + a_2 - 2a_3, \end{cases} \tag{7.148}$$

Quindi, ponendo $a_3 = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, la prima dà $a_2 = 2\alpha$, che inserita nella terza dà $a_1 = \beta - a_2 + 2a_3 = \beta - 2\alpha + 2\alpha = \beta$.

In conclusione si ha

$$\begin{cases} a = (a_1, a_2, a_3) = (\beta, 2\alpha, \alpha), \\ b = (b_1, b_2, b_3) = (0, 2\beta, \beta), \\ c = (c_1, c_2, c_3) = (-4\gamma/5, -6\gamma/5, \gamma), \end{cases} \tag{7.149}$$

con α, β, γ da determinarsi imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali.

Consideriamo per semplicità solo il caso $x_0 = (1, 1, 1)$. Si ha allora

$$x(0) = a + c = x_0, \tag{7.150}$$

che scritta per componenti diventa

$$\begin{cases} a_1 + c_1 = \beta - 4\gamma/5 = 1, \\ a_2 + c_2 = 2\alpha - 6\gamma/5 = 1, \\ \alpha + \gamma = 1. \end{cases} \tag{7.151}$$

Se moltiplichiamo la seconda per 2 e la sottraiamo alla seconda otteniamo

$$2\alpha - \frac{6}{5}\gamma - 2\alpha - 2\gamma = -\frac{16}{5}\gamma = 1 - 2 = -1, \tag{7.152}$$

i.e.

$$\gamma = \frac{5}{16}. \tag{7.153}$$

Quindi la terza dà

$$\alpha = 1 - \gamma = \frac{11}{16}, \tag{7.154}$$

e la prima dà

$$\beta = 1 + \frac{4}{5}\gamma = \frac{5}{4}. \tag{7.155}$$

La soluzione è quindi

$$\begin{aligned} x_1(t) &= [a_1 + b_1 t]\, e^{2t} + c_1 e^{-2t} = \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}, \\ x_2(t) &= [a_2 + b_2 t]\, e^{2t} + c_2 e^{-2t} = \left(\frac{11}{8} + \frac{5}{2}t\right) e^{2t} - \frac{3}{8}e^{-2t}, \\ x_3(t) &= [a_3 + b_3 t]\, e^{2t} + c_3 e^{-2t} = \left(\frac{11}{16} + \frac{5}{4}t\right) e^{2t} + \frac{5}{16}e^{-2t}. \end{aligned} \tag{7.156}$$

7.16. *Osservazione* Dei tre metodi indicati per risolvere il sistema (7.92) quello indicato come I metodo (cfr. §7.13) è forse il più lungo: ha comunque i vantaggi di essere estremamente sistematico e, soprattutto, di fornire un'espressione per l'esponenziale dell'operatore lineare nella base in cui sono scritte le equazioni (cfr. la (7.118)). Se tuttavia si è interessati solo nell'espressione della soluzione $x(t)$ può essere più conveniente utilizzare, per esempio, il II metodo (cfr. §7.14), che risulta apprezzabilmente più rapido.

8. Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

8.1. Introduzione. Finora abbiamo considerato il caso di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, *i.e.* in cui intervenga solo la derivata prima della funzione x da trovare. Vogliamo ora vedere come si può ricondurre a tale caso il caso di equazioni differenziali lineari di ordine più alto. Consideremo esplicitamente il caso in cui x sia una funzione reale: il caso in cui x sia definita in uno spazio vettoriale E di dimensione $\dim(E) > 1$ può essere discusso analogamente.

8.2. Definizione (Equazioni differenziali lineari di ordine n). *Sia E uno spazio vettoriale reale uni-dimensioanle e sia A la matrice che rappresenta un operatore $T \in L(E)$ in una data base. Indicando con $x^{(j)}$ la derivata j-esima di x rispetto* *al tempo, i.e.*

$$x^{(j)}(t) = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} x(t), \qquad x^{(0)} = x, \qquad x^{(1)} = \dot{x}, \qquad x^{(2)} = \ddot{x}, \qquad \dots \tag{8.1}$$

chiameremo

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = 0, \qquad x \in E, \tag{8.2}$$

un'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti.

8.3. PROPOSIZIONE. *L'equazione differenziale lineare di ordine* n *(8.2) è equivalente a un sistema di* n *equazioni differenziali lineari del primo ordine (3.1), in cui l'operatore* A *ha la forma*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

8.4. *Dimostrazione della proposizione 8.3.* Definiamo

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = \dot{x}, \\ \quad \dots \\ x_{n-1} = x^{(n-2)}, \\ x_n = x^{(n-1)}. \end{cases} \tag{8.4}$$

Si ha allora

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \quad \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \ldots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1, \end{cases} \tag{8.5}$$

dove l'ultima riga è stata ottenuta dalle definizioni (8.4) e dalla (8.2). La (8.5) è un sistema lineare della forma (3.1), in cui la matrice A è data dalla (8.3). ■

8.5. TEOREMA. *Il polinomio caratteristico* $p_n(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ *del sistema (3.1) con matrice (8.3) è dato da*

$$p_n(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \right]. \tag{8.6}$$

8.6. *Dimostrazione del teorema 8.5.* La dimostrazione si può fare per induzione su n. Se $n = 2$ un conto esplicito mostra che

$$p_2(\lambda) = -\lambda\,(-a_1 - \lambda) - (-a_2) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2. \tag{8.7}$$

Assumiamo quindi che la (8.6) valga per $n-1$, *i.e.*

$$p_{n-1}(\lambda) = (-1)^{n-1}\left[\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}\right], \tag{8.8}$$

e mostriamo che allora vale per n.

Indichiamo con A_n la matrice (8.3) per sottolinearne la dipendenza da n e con $\mathbb{1}_n$ la matrice identità $n \times n$. Scrivendo

$$\begin{aligned} A_n - \lambda\mathbb{1}_n &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \ldots & A_{n-1} - \lambda\mathbb{1}_{n-1} \\ 0 & \\ -a_n & \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8.9}$$

si vede che il determinante di $A_n - \lambda\mathbb{1}_n$, calcolato sviluppando, per esempio, rispetto la prima colonna, è

$$\begin{aligned} \det(A_n - \lambda\mathbb{1}_n) &= -\lambda\, p_{n-1}(\lambda) - (-1)^{n-1}a_n \\ &= (-1)^n\left(\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda\right) + (-1)^n a_n, \end{aligned} \tag{8.10}$$

che quindi dimostra che la (8.6) vale anche per n. ■

8.7. *Osservazione.* Il teorema 8.5 implica che il polinomio caratteristico del sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine equivalente all'equazione differenziale (8.2) può essere ricavato direttamente dall'equazione stessa, senza bisogno di passare esplicitamente al sistema di equazioni del primo ordine e senza calcolare il determinante della matrice $A - \lambda\mathbb{1}$: è sufficiente considerare l'equazione algebrica che si ottiene dall'equazione differenziale (2.2) sostituendo ogni $x^{(j)}$, $j = 0, \ldots, n$, con λ^j (il segno in evidenza in (8.6) è ovviamente irrilevante ai fini del calcolo degli zeri del polinomio caratteristico).

8.8. ESEMPIO. Discutere l'equazione lineare del secondo ordine che descrive l'oscillatore armonico in presenza di attrito (*oscillatore smorzato*):

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{8.11}$$

al variare dei parametri $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ($\gamma > 0$ si può interpretare fisicamante come attrito, dovuto, per esempio, alla resistenza dell'aria).

9. Equazioni differenziali lineari non omogenee del primo ordine

9.1. Introduzione. Nel paragrafo §5 abbiamo considerato solo il caso di equazioni differenziali lineari omogenee, *i.e.* della forma $\dot{x} = Ax$. Vogliamo ora vedere cosa succede se si considera il caso di equazioni differenziali lineari non omogenee, *i.e.* della forma $\dot{x} = Ax + B(t)$. Un ulteriore passo sarebbe considerare il caso in cui anche A dipende dal tempo, $A = A(t)$, ma, mentre la teoria sviluppata nei precedenti paragrafi permette di risolvere l'equazione $\dot{x} = Ax + B(t)$, a meno di piccole modifiche, al contrario lo studio dell'equazione $\dot{x} = A(t)x$ è assolutamente non banale, e, anche nel caso in cui si facciano delle ipotesi sulla funzione $A(t)$ (per esempio che sia periodica), la teoria risulta essere molto più complicata e va oltre lo scopo del presente capitolo.

9.2. DEFINIZIONE (EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI NON OMOGENEE DEL PRIMO ORDINE). *Siano E uno spazio vettoriale reale, A la matrice che rappresenta un operatore $T \in L(E)$ in una data base e $B : I \to E$ una funzione continua definita su $I \subset \mathbb{R}$. Chiameremo*

$$\dot{x} = Ax + B(t), \qquad x \in E, \tag{9.1}$$

un sistema di n equazioni differenziali lineari non omogenee del primo ordine a coefficienti costanti *o semplicemente un'*equazione (vettoriale) differenziale lineare non omogenea del primo ordine a coefficienti costanti.

9.3. *Osservazione.* L'equazione (9.1) è un'equazione differenziale *non autonoma*, *i.e.* in cui il membro di destra dipende esplicitamente dal tempo.

9.4. TEOREMA. *Sia E uno spazio vettoriale reale e siano A un operatore lineare in E e $B : I \to E$ una funzione continua definita su $I \subset \mathbb{R}$. Considerato il sistema (9.1) con condizioni iniziali*

$$x(t_0) = x_0, \tag{9.2}$$

allora esiste ed è unica la soluzione, data da

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, e^{-A(s-t_0)} B(s) \right] ; \tag{9.3}$$

inoltre tale soluzione è definita per ogni tempo $t \in I$.

9.5. *Dimostrazione del teorema 9.4.* Cerchiamo la soluzione dell'equazione (9.1) nella forma

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} c(t), \tag{9.4}$$

dove $c : I \to E$ è una funzione differenziabile da determinare. Poiché l'operatore $e^{A(t-t_0)}$ è invertibile, l'espressione (9.4) ha senso e quindi possiamo sempre scrivere in questa forma un'eventuale soluzione della (9.1).

Per derivazione esplicita, utilizzando la regola di Leibniz per la derivazione del prodotto (cfr. la nota bibliografica) e il lemma 5.3 per la derivazione dell'esponenziale, troviamo

$$\dot{x}(t) = A\, e^{A(t-t_0)} c(t) + e^{A(t-t_0)} \dot{c}(t), \tag{9.5}$$

che possiamo eguagliare al membro di destra della (9.1): otteniamo dunque

$$A\, e^{A(t-t_0)} c(t) + e^{A(t-t_0)} \dot{c}(t) = Ax(t) + B(t) = A\, e^{A(t-t_0)} c(t) + B(t), \tag{9.6}$$

ovvero

$$e^{A(t-t_0)} \dot{c}(t) = B(t), \tag{9.7}$$

che permette di scrivere

$$\dot{c}(t) = e^{-A(t-t_0)} B(t). \tag{9.8}$$

Integrando la (9.8) troviamo

$$c(t) = K + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, e^{-A(s-t_0)} B(s), \tag{9.9}$$

dove $K \in E$ è una costante di integrazione. Quindi

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \left[K + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, e^{-A(s-t_0)} B(s) \right]. \tag{9.10}$$

Si verifica facilmente che l'espressione così trovata è effettivamente una soluzione della (9.1), con condizioni iniziali x_0, purché si scelga $K = x_0$. Infatti derivando la (9.10) si ha

$$\dot{x}(t) = B(t) + Ae^{A(t-t_0)} \left[K + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, e^{-A(s-t_0)} B(s) \right] = B(t) + Ax(t) \tag{9.11}$$

e si ha ovviamente

$$x(t_0) = K. \tag{9.12}$$

Che tale soluzione sia unica si verifica immediatamente, ragionando per assurdo. Supponiamo che esista una soluzione $y(t)$, diversa da $x(t)$. Se definiamo $z(t) = x(t) - y(t)$, si ha allora

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = A\,(x(t) - y(t)) = Az(t), \tag{9.13}$$

che è un sistema lineare omogeneo: quindi, per il teorema 5.6 esiste ed è unica la soluzione e ha la forma $z(t) = e^{A(t-t_0)} z_0$ se la condizione iniziale è $z(t_0) = z_0$. Ma per costruzione $z_0 = 0$ (poiché le due soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ hanno le stesse condizioni iniziali), così che $z(t) = 0$ per ogni t per cui la soluzione sia definita. Ne segue che deve essere $y(t) \equiv x(t)$, contro l'ipotesi che le due soluzioni fossero distinte.

La soluzione è quindi della forma (9.3), per tutti i valori di t per cui è definita: l'unica quantità che non è definita per ogni t è la funzione $B(s)$ nell'integrando, con

$t_0 \le s \le t$. Quindi deve essere $t \in I$, così che possiamo concludere che la soluzione è definita per ogni $t \in I$.

9.6. *Osservazione.* Il metodo che è stato seguito in §9.5 per trovare la soluzione nella forma (9.4) prende il nome di *metodo di variazione delle costanti.* Infatti se $B(t) \equiv 0$ allora la soluzione è della forma (9.4) con $c(t) = c$ costante; se $B(t) \neq 0$ si cerca una soluzione della stessa forma, ma con $c(t)$ non costante.

9.7. *Osservazione.* Si noti che se la funzione B è definita sull'intero asse reale, *i.e.* $B\colon \mathbb{R} \to E$, allora la soluzione (9.3) è una soluzione globale.

9.8. DEFINIZIONE (EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA ASSOCIATA). *Data un'equazione differenziale lineare non omogenea (9.1), definiremo* equazione (differenziale) lineare omogenea associata *l'equazione che si ottiene dalla (9.1) sostituendo* $B(t)$ *con* 0.

9.9. COROLLARIO. *Sia* $u(t)$ *una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare non omogenea (9.1). Allora ogni soluzione della (9.1) si può scrivere nella forma*

$$x(t) = u(t) + v(t), \tag{9.14}$$

dove $v(t)$ *è una soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea associata.*

9.10. *Dimostrazione del corollario 9.9.* Possiamo riscrivere la (9.3) nalle forma

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + e^{A(t-t_0)} x_0, \\ u(t) &= \int_0^t \mathrm{d}s\, e^{-A(s-t_0)} B(s), \end{aligned} \tag{9.15}$$

dove $u(t)$ risolve la (9.1) con condizioni iniziali $x(0) = 0$, mentre $e^{A(t-t_0)}x_0$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata $\dot{x} = Ax$ con condizioni iniziali $x(0) = x_0$.

9.11. *Osservazione.* Si noti che se in (9.1) la matrice A è non singolare ($\det A \neq 0$) e il vettore $B(t)$ è costante ($B(t) = B$), allora si possono applicare i risultati del paragrafo §5 per trovare la soluzione. Basta infatti porre

$$\begin{cases} u \equiv A^{-1}B, \\ y = x + u, \end{cases} \tag{9.16}$$

dove l'inversa di A è bene definita se il suo determinante è non nullo, per portare l'equazione $\dot{x} = Ax + B$, con dati iniziali $x(t_0) = x_0$, nella forma $\dot{y} = Ay$, con dati iniziali $y(t_0) = x_0 + A^{-1}B \equiv y_0$. Quindi la soluzione è $y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0$, che, espressa in termini delle coordinate originali, diventa

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)} x_0 + \left(e^{A(t-t_0)} - \mathbb{1} \right) A^{-1} B \\ &= e^{At} \left[x_0 + \int_{t_0}^t \mathrm{d}s\, e^{-A(s-t_0)} B \right], \end{aligned} \tag{9.17}$$

che è esattamente la (9.3) nel caso in cui B sia costante.

Si noti che, mentre l'espressione nella prima riga della (9.16) è definita solo se la matrice A è invertibile, al contrario l'espressione finale nella seconda riga ha senso sempre. Come mostra il teorema 9.4 il risultato finale nella forma (9.3) è sempre valido: la dimostrazione data passando attraverso le definizioni (9.16) e la formula nella prima della (9.17) per la soluzione sono invece giustificata solo nel caso in cui la matrice A sia non singolare.

Nota bibliografica

Come nel capitolo precedente anche in questo, tranne che per il paragrafo §7, abbiamo seguito essenzialmente [Hirsch-Smale], Capp. 3÷6.

La regola di Leibniz per la derivata del prodotto è un risultato elementare che si può trovare in qualsiasi testo di Analisi, *e.g.* in [Giusti1], Cap. 5.

Per il teorema di derivazione sotto il segno di serie (per serie convergenti uniformemente), utilizzato nel sottoparagrafo §5.4, cfr. *e.g.* [Giusti2], Cap. 2, mentre per definizioni e proprietà delle curve cfr. [Giusti2], Cap. 7.

Esercizi

Esercizio 1. Data una matrice $A \in \mathrm{M}(n)$ tale che $A = S + N$, con S semisemplice e N nilpotente di ordine k, si trovi una formula che esprima l'esponenziale di A in ermini di quantità facilmente calcolabili. [*Soluzione.* Se P è la matrice di cambiamento di base che porta alla base in cui S diventa la matrice diagonale D, si ha $e^A = Qe^D Q^{-1}(\mathbb{1} + N + N^2/2 + \ldots + N^{k-1}/(k-1)!)$, dove $Q^{-1} = P^T$.]

Esercizio 2. Dimostrare che per $a = 0$ la (6.7) descrive una rotazione del piano di un angolo $\theta = bt$ intorno all'origine. Dedurre che la velocità angolare corrispondente è b.

Esercizio 3. Dimostrare che per $a \neq 0$ la (6.7) descrive una trasformazione che è data dalla composizione di una rotazione del piano di un angolo $\theta = bt$ intorno all'origine con un'espanzione (o contrazione) nella direzione radiale.

Esercizio 4. Si trovi la soluzione del sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (-1, \sqrt{2})$. Si trovi la soluzione nel caso in cui la matrice A sia data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

con le stesse condizioni iniziali.

Esercizio 5. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 0, 0)$. Se ne trovi la soluzione.

Esercizio 6. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 0, 0)$. Se ne trovi la soluzione.

Esercizio 7. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0)$. Se ne trovi la soluzione.

Esercizio 8. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1, 1)$. Se ne trovi la soluzione.

Esercizio 9. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (-1, 2)$. Se ne trovi la soluzione.

Esercizio 10. Sia A la matrice dell'esercizio 9: trovare la matrice P del cambiamento di base che porta la matrice nella forma canonica di Jordan. Si risolva quindi il sistema nella nuova base.

Esercizio 11. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0)$. Se ne trovi la soluzione.

Esercizio 12. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 0, 0)$. Se ne trovi la soluzione. [*Soluzione.* Si ha $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = (e^{3t} - e^t)/2$, $x_2(t) = (e^{3t} - e^t)/2$.]

Esercizio 13. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0)$. Se ne trovi la soluzione.

Esercizio 14. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0)$. Se ne trovi la soluzione. [*Soluzione.* Si ha $x_1(t) = e^t x_{01}$, $x_2(t) = [(88t-15)e^t + (90t+15)e^{3t}]x_{01}/2 + (5e^{3t}-3e^t)x_{02}/2 + (5e^{3t}-3e^t)x_{03}/2$, $x_3(t) = [(-88t+9)e^t + (54t-9)e^{3t}]x_{01}/2 + (3e^t-3e^{3t})x_{02}/2 + (5e^t-3e^{3t})x_{03}/2$.]

Esercizio 15. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (-2, 4, 0)$. Se ne trovi la soluzione.

Esercizio 16. Si consideri il sistema lineare planare in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

Trovare la soluzione con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$.

Esercizio 17. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + a\cos t, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

con x funzione reale. Se ne trovi la soluzione $x(t)$. [*Soluzione.* Si ha $x(t) = e^t(x_0 + a/2) + a(\sin t - \cos t)/2$.]

Esercizio 18. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1, 1)$. Se ne trovi la soluzione. [*Soluzione.* Si ha $x_1(t) = [(1+e^{2t}) + (-1+e^{2t}) + (1-2e^t+e^{2t})]/2$, $x_2(t) = [(-1+e^{2t}) + (1+e^{2t}) + (-1+e^{2t})]/2$, $x_3(t) = e^t$.]

Esercizio 19. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1)$. Si trovi la soluzione $x(t)$. [*Soluzione.* Si ha $x_1(t) = (2+3e^{5t})/5$, $x_2(t) = (-4+9e^{5t})/5$.]

Esercizio 20. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 0, 0)$. Si trovi la soluzione $x(t)$. [*Soluzione.* Si ha $x_1(t) = e^{2t}$, $x_2(t) = e^{2t} - e^{3t}(\sin t + \cos t)$, $x_3(t) = e^{2t} + e^{3t}(\sin t - \cos t)$.]