

## Capitolo 5. Alcuni esempi di analisi qualitativa

### 20. Sistemi planari

**20.1. Introduzione.** Come nel caso dei sistemi lineari, studiamo in dettaglio il caso dei sistemi planari, per i quali è facile visualizzare le traiettorie e le curve di livello (trattandosi di curve nel piano).

Inoltre la bassa dimensionalità dello spazio in cui si svolge il moto ha delle forti implicazioni topologiche sulle orbite (dovute in ultima analisi al fatto che le traiettorie non si possono intersecare). Questo porta a risultati notevoli, tra cui spicca il teorema di Poincaré-Bendixson, ricco di importanti conseguenze, illustrate nei teoremi successivi.

Notiamo anche che, se da una parte il fatto che il sistema sia planare consente in principio una conoscenza più dettagliata del moto rispetto al caso generale (*i.e.* in  $\mathbb{R}^n$ , per  $n$  qualsiasi), dall'altra in pratica questo richiede un'analisi più approfondita e, in taluni aspetti, abbastanza delicata: alcune delle proprietà considerate più avanti possono apparire "ovvie" se si prova a fare dei disegni, ma risultano sottili se si pretende una trattazione analitica consistente e completa. Per questo motivo, a una prima lettura, si può omettere la dimostrazione del teorema di Poincaré-Bendixson (cfr. il paragrafo §20.13), che, se è il risultato più importante della presente sezione, è altresì quello la cui dimostrazione risulta più complicata, nonché il lemma 20.10, che serve appunto per la dimostrazione del teorema. Anche la proposizione 20.21 può essere omessa, in quanto non viene utilizzata nel dedurre gli altri risultati illustrati del paragrafo.

Si tenga presente in ogni caso che tali risultati non si possono estendere, neppure in una qualche forma più debole, a sistemi in  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 3$ .

**20.2. Notazioni.** Ricordiamo che, se  $x \in \mathbb{R}^2$  è tale che  $f(x) \neq 0$ , una *sezione locale* di  $f$  in  $x$  è un segmento aperto  $S$  contenente  $x$  e trasverso a  $f$ : il campo vettoriale in tutti i punti della sezione è diretto sempre verso destra o sempre verso sinistra, rispetto alla sezione.

Consideriamo un sistema della forma (16.1), con  $n = 2$  (*sistema planare*):

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (20.1)$$

In tal caso, se  $S$  è una sezione locale,  $S$  è un segmento e  $\dim(S) = 1$ . Inoltre le

superfici di livello sono delle curve (*curve di livello*); cfr. il paragrafo §16.1.

Si noti che le curve di livello di una funzione che sia una costante del moto per il sistema (20.1) contengono traiettorie del sistema; in generale le curve di livello possono essere costituite da più componenti connesse.

**20.3. DEFINIZIONE.** Diremo che una successione di punti  $x_n$  lungo una curva  $C = \{\varphi(t, x) : 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^2\}$ ,  $T > 0$ , è monotona lungo  $C$ , se  $x_n = \varphi(t_n, x)$ , con  $0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n \leq T$ .

**20.4. DEFINIZIONE.** Diremo che una successione di punti  $y_n$  appartenenti a una sezione locale  $S$  è monotona lungo  $S$  se  $y_n$  è tra  $y_{n-1}$  e  $y_{n+1}$  (eventualmente coincidente con uno di essi o con entrambi) nell'ordinamento naturale  $n = 1, 2, \dots$ .

**20.5. LEMMA.** Sia  $S$  una sezione locale di un sistema dinamico planare (20.1) e sia  $\{y_n\}$  una successione di punti su  $S$  che appartengono alla stessa curva  $C = \{\varphi(t, x) : 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^2\}$ ,  $T > 0$ . Se  $\{y_n\}$  è monotona lungo  $C$ , allora è monotona anche lungo  $S$ .

**20.6. Dimostrazione del lemma 20.5.** Consideriamo un punto  $y_n$  della successione. Sia  $y_{n+1} \in S$  il punto successivo in cui la curva  $C$  attraversa  $S$ , e  $C_n$  il tratto della curva compreso tra  $y_n$  e  $y_{n+1}$ ; poiché  $S$  è una sezione locale  $f(y_n)$  e  $f(y_{n+1})$  sono diretti dalla stessa parte rispetto a  $S$ .

Se  $y_n = y_{n+1}$  allora, per il teorema 10.36 (teorema di unicità),  $y_h = y_n$  per ogni  $h$  e il lemma è dimostrato.

Altrimenti, se  $y_n \neq y_{n+1}$ , indichiamo con  $D$  la regione chiusa compresa tra  $C_n$  e il segmento contenuto in  $S$  che unisce i due punti  $y_n$  e  $y_{n+1}$ ; cfr. la figura 20.1.

Supponiamo che la traiettoria che parte da  $y_{n+1}$  entri in  $D$  (se esce si ragiona in modo assolutamente analogo). La regione  $D$  è allora positivamente invariante (non potendo la traiettoria riattraversare  $C_n$  per il teorema di unicità 10.36). Questo vuol dire che la traiettoria che parte da  $y_{n+1}$  riattraversa  $S$  in un punto all'interno di  $D$  e quindi  $y_{n+1}$  è compreso tra  $y_n$  e  $y_{n+2}$ . Data l'arbitrarietà di  $n$  segue l'asserto. ■

**20.7. Osservazione.** Si noti che nella definizione dell'insieme  $D$  nella dimostrazione del lemma 20.5 abbiamo implicitamente fatto uso del *teorema della curva di Jordan* (cfr. la nota bibliografica). Una curva di Jordan è definita come una curva chiusa continua che non si autointerseca e il teorema citato afferma che il complemento di una curva di Jordan  $\Gamma$  nel piano è costituito da due insiemi disgiunti  $\Omega_i$  e  $\Omega_e$ , la cui frontiera è data dalla curva  $\Gamma$  stessa e tali che  $\Omega_i$  è limitato (ed è chiamato *l'insieme interno*) e  $\Omega_e$  è illimitato (ed è chiamato *l'insieme esterno*). Nel nostro caso  $\Gamma$  è la curva costituita da  $C_n$  e  $S$ , mentre  $D$  è la chiusura dell'insieme interno. Come è consuetudine fare nei trattati di Sistemi Dinamici, assumeremo il teorema della curva di Jordan senza dimostrazione.

**20.8. LEMMA.** Sia  $y \in \mathbb{R}^2$  tale che  $f(y) \neq 0$  e sia  $S$  una sezione locale di  $f$  in  $y$ .

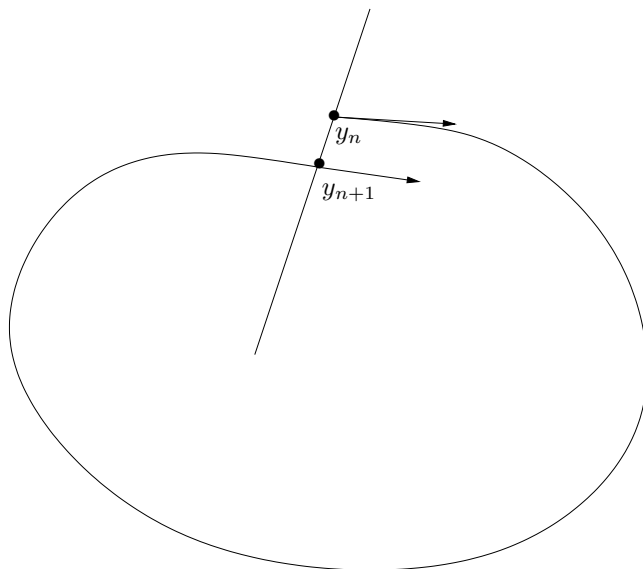


FIGURA 20.1. Scenario previsto nella discussione del lemma 20.5.

Allora esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $z$  appartenente all'intorno  $B_\delta(y)$ , esiste  $\sigma > 0$  e un tempo  $t = t(z)$  tale che  $|t(z)| < \sigma$  e  $\varphi(t, z) \in S$ .

**20.9. Dimostrazione del lemma 20.8.** La dimostrazione del lemma è una semplice applicazione del teorema della funzione implicita (cfr. la nota bibliografica del capitolo 4). Introduciamo un sistema di coordinate  $(x_1, x_2)$  tale che sia  $y = 0$  e risulti  $f_1(y) = a > 0$  e  $f_2(y) = 0$ . Per continuità esiste  $\delta > 0$  tale che  $f_1(z) > a/2$  per ogni  $z \in B_\delta(y)$ . Definiamo la funzione

$$F(z, t) = z_1 + \int_0^t ds f_1(\varphi(s, z)). \tag{20.2}$$

Si ha  $F(y, 0) = y_1 = 0$  e  $[\partial F / \partial t](y, 0) = f_1(y) \neq 0$ ; quindi possiamo applicare il teorema della funzione implicita e concludere che, per ogni  $z \in B_\delta(y)$  esiste un tempo  $t(z)$  tale che  $F(z, t(z)) = 0$ : questo implica quindi che  $\varphi_1(t(z), z) = 0$ , *i.e.*  $\varphi(t(z), z) \in S$ . Cfr. la figura 20.2.

Per concludere la dimostrazione occorre far vedere che, fissato  $\delta > 0$  come sopra, esiste in corrispondenza  $\sigma > 0$  tale che  $|t(z)| < \sigma$  per ogni  $z \in B_\delta(y)$ . Ragioniamo come per il teorema 19.2 (teorema della scatola di flusso). Supponiamo per assurdo che questo non sia vero: allora comunque si fissasse  $\sigma > 0$  dovrebbe esistere  $z \in B_\delta(y)$

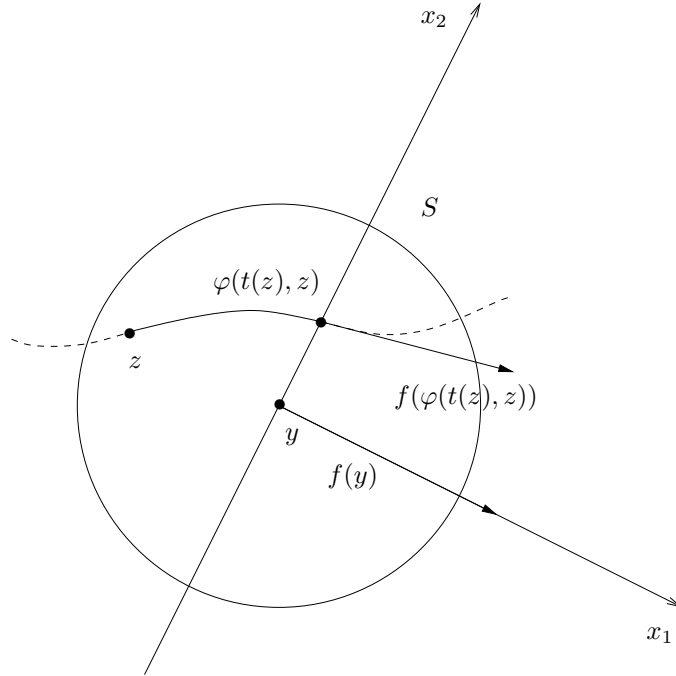


FIGURA 20.2. Scenario previsto nella discussione del lemma 20.8.

tale che  $|t(z)| > \sigma$ . Per tale  $z$ , in

$$F(z, t(z)) = z_1 + \int_0^{t(z)} ds f_1(\varphi(s, z)), \quad (20.3)$$

potremmo stimare

$$\begin{aligned} |z_1| &< |z| < \delta, \\ \int_0^{t(z)} ds f_1(\varphi(s, z)) &> \int_0^{t(z)} ds \frac{a}{2} > \frac{a\sigma}{2}, \end{aligned} \quad (20.4)$$

che però implicherebbe  $F(z, t(z)) \neq 0$  non appena fosse  $\sigma > 2\delta/a$ , in contraddizione con la definizione di  $t(z)$  per  $z \in B_\delta(y)$ . In particolare si vede che si deve avere  $\sigma < \sigma_0 \equiv 2\delta/a$ . ■

**20.10. LEMMA.** *Se  $y \in L_\omega(x) \cup L_\alpha(x)$ , allora  $\varphi(t, y)$  attraversa ogni sezione locale al più in un punto.*

**20.11. Dimostrazione del lemma 20.10.** Supponiamo che  $y \in L_\omega(x)$  (se  $y \in L_\alpha(x)$  si ragiona in modo simile). Procediamo per assurdo. Supponiamo che la traiettoria

che parte da  $y$  attraversi una sezione locale  $S$  in due punti distinti  $z_1$  e  $z_2$ . Poiché gli insiemi limite sono invarianti (cfr. proprietà (2) nel paragrafo §16.19), si ha  $z_1, z_2 \in L_\omega(x)$ . Quindi esistono due successioni  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$  tali che  $|\varphi(t_k, x) - z_1| \rightarrow 0$  e  $|\varphi(s_k, x) - z_2| \rightarrow 0$ . Questo vuol dire che, scelto  $\varepsilon > 0$ , esiste  $k_0 > 0$  tale che, per ogni  $k > k_0$ ,  $\varphi(t_k, x) \in B_\varepsilon(z_1)$  e  $\varphi(s_k, x) \in B_\varepsilon(z_2)$ . Sia  $J_1 = B_\varepsilon(z_1) \cap S$  e  $J_2 = B_\varepsilon(z_2) \cap S$ : per il lemma 20.8 possiamo concludere che (prendendo  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo) esistono due successioni  $\{\tau_k\}$  e  $\{\sigma_k\}$  tali che  $\varphi(\tau_k, x) \in J_1$  e  $\varphi(\sigma_k, x) \in J_2$ . Possiamo scegliere  $\varepsilon$  tale che  $J_1 \cap J_2 = \emptyset$  (cfr. la figura 20.3, e, prendendo eventualmente delle sottosuccessioni, si può supporre che  $\tau_k < \sigma_k < \tau_{k+1}$  (per il lemma 16.12). Si ha quindi una successione di punti  $\{y_n\}$  tali che, per  $p \geq 1$ ,

$$\begin{cases} y_{2p-1} = \varphi(\tau_p, x), \\ y_{2p} = \varphi(\sigma_p, x), \end{cases} \quad (20.5)$$

che è monotona lungo la traiettoria  $\varphi(t, x)$  senza essere monotona lungo la sezione  $S$ . Questo contraddice il lemma 20.5. ■

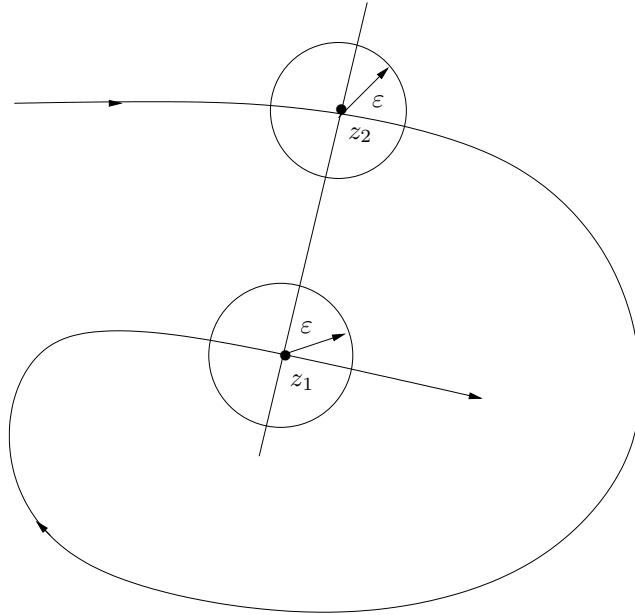


FIGURA 20.3. Costruzione grafica per la discussione del lemma 20.10.

**20.12. TEOREMA (POINCARÉ-BENDIXSON).** *Un insieme limite compatto non vuoto di un sistema planare (20.1), che non contenga punti d'equilibrio, è l'orbita di una*

*traiettoria periodica.*

**20.13.** *Dimostrazione del teorema 20.12.* Sia  $y \in L_\omega(x)$  (al solito ci limitiamo al caso degli insiemi  $\omega$ -limite), con  $L_\omega(x)$  compatto. Quindi esiste una successione  $\varphi(t_k, x)$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(t_k, x) - y| = 0$ . Poiché  $L_\omega(x)$  non contiene punti d'equilibrio, si ha  $|f(y)| = a > 0$ . Scegliamo un sistema di coordinate  $(x_1, x_2)$  con origine in  $y$ , tale che  $f_1(y) = a > 0$  e  $f_2(y) = 0$  (come nella dimostrazione del lemma 20.8).

Fissato un intorno  $B_\varepsilon(y)$ , esisterà un indice  $k_0 > 0$  tale che  $\varphi(t_k, x) \in B_\varepsilon(y)$  per ogni  $k > k_0$ . Se  $\varepsilon$  è tale che  $f_1(z) > a/2$  per ogni  $z \in B_\varepsilon(y)$ , possiamo applicare il lemma 20.8 e concludere che, per ogni  $k > k_0$ , esiste  $\sigma_k$  tale che  $|\sigma_k| > 0$  e  $\varphi_1(t_k + \sigma_k, x) = 0$ . La successione  $\{\sigma_k\}$ , inoltre, è tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0$ . Infatti possiamo scegliere  $\delta_k > |\varphi(t_k, x) - y|$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ , poiché  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x) = y$ , e la dimostrazione del Lemma 20.8 dà  $|\sigma_k| < 2\delta_k/a$ ; cfr. il paragrafo §20.9.

Definiamo  $\tau_k = t_k + \sigma_k$  e consideriamo la successione  $y_k \equiv \varphi_2(\tau_k, x)$ . Per il lemma 20.5 la successione  $y_k$  è monotona decrescente, *i.e.*  $y_{k+1} \leq y_k \forall k$ .

Sono possibili due casi:

- (1) Esiste un indice  $h$  tale che  $y_h = y_{h+1}$ ;
- (2) Si ha  $y_{h+1} < y_h \forall h$ .

Nel primo caso la traiettoria  $\varphi(t, x)$  è periodica, di periodo  $\tau \equiv \tau_{h+1} - \tau_h$ . Inoltre, poiché  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(\tau_k, x) - y| = 0$ , il punto  $y$  deve appartenere alla traiettoria, altrimenti la traiettoria che parte da  $x$ , essendo periodica, non si può avvicinare indefinitamente a  $y$  (infatti la quantità  $m = \min_{t \in [0, \tau]} |\varphi_2(t, x)|$ , che deve esistere per il teorema di Weierstrass (cfr. la nota bibliografica), sarebbe in tal caso diversa da zero e quindi esisterebbe un intorno di  $y$  di raggio minore di  $m$  privo di punti lungo la traiettoria che parte da  $x$ , contro l'ipotesi che sia  $y \in L_\omega(x)$ ). Quindi la traiettoria passante per  $y$  è periodica. Cfr. la figura 20.4.

Nel secondo caso, i punti  $\varphi(\tau_k, x)$  sono tutti distinti; cfr. la figura 20.5.

Poiché  $\varphi(t, y) \in L_\omega(x)$  (cfr. proprietà (2) nel paragrafo §16.19) e  $L_\omega(x)$  è compatto per ipotesi, da ogni successione  $\varphi(t_k, y)$  si può estrarre una sottosuccessione convergente: quindi  $L_\omega(y) \neq \emptyset$ . Sia  $y_1 \in L_\omega(y)$ . Deve essere  $f(y_1) \neq 0$  perché  $y_1 \in L_\omega(x)$  (cfr. proprietà (4) nel paragrafo §16.19) e, per ipotesi,  $L_\omega(x)$  non contiene punti d'equilibrio.

La traiettoria che parte da  $y$  deve attraversare infinite volte una sezione locale  $S_1$  di  $f$  in  $y_1$ : questo segue dalla definizione di insieme limite e dal lemma 20.8.

Indichiamo con  $\varphi(T_k, y)$ , per una opportuna successione  $\{T_k\}$ , la successione di punti lungo la traiettoria  $\varphi(t, y)$  che intersecano  $S_1$ . Possiamo allora applicare il Lemma 20.10 e concludere che  $\varphi(T_k, y) = \varphi(T_h, y)$  per ogni  $k, h$ ; deve anche essere  $y_1 = \varphi(T_k, y)$ . Quindi, anche in questo caso, risulta che la traiettoria che parte da  $y$  è periodica.

Per l'invarianza degli insiemi limite (proprietà (2) del paragrafo §16.19) segue che la traiettoria che passa per  $y$  è un'orbita chiusa  $\gamma$  contenuta in  $L_\omega(x)$ .

Resta da dimostrare che  $\gamma = L_\omega(x)$ . Se così non fosse  $L_\omega(x)$  sarebbe l'unione di

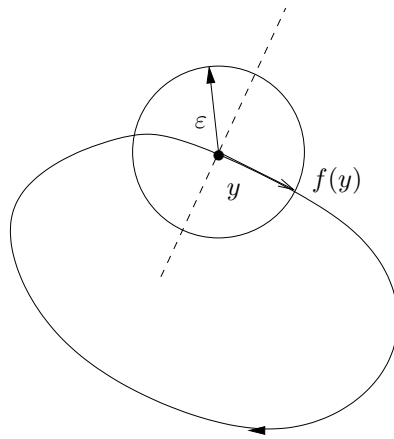


FIGURA 20.4. Scenario previsto nella discussione del teorema 20.12: caso (1).

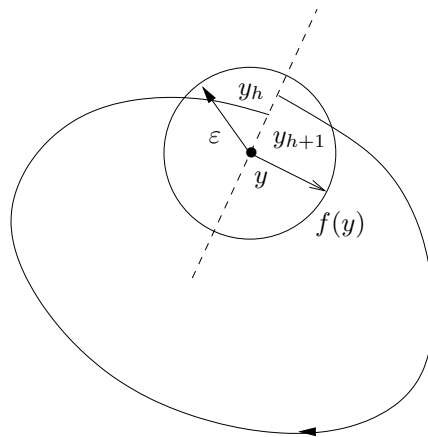


FIGURA 20.5. Scenario previsto nella discussione del teorema 20.12: caso (2).

orbite chiuse, perché per ogni altro punto  $y_2 \in L_\omega(x)$  potremmo ripetere la discussione precedente. Per l'unicità della soluzione di (20.1) tali orbite dovrebbero essere disgiunte, ma questo, unito alla compattezza di  $L_\omega(x)$ , contraddice il fatto che gli insiemi limite compatti debbano essere connessi (proprietà (3) nel paragrafo §16.19). ■

**20.14. Osservazione.** Si possono fare esempi di insiemi limite che non sono né orbite chiuse né punti d'equilibrio. Per esempio si può immaginare un insieme  $\omega$ -limite

costituito da una figura a forma di 8 con un punto di sella (nell'intersezione dei due lobi) e contenente due sorgenti (all'interno dei due lobi), tale che la figura a 8 sia l'insieme  $\omega$ -limite di tutti i punti esterni e ciascuno dei due lobi sia anche l'insieme  $\omega$ -limite di tutti i punti interni a esso (con l'esclusione dei punti d'equilibrio instabile). Cfr. la figura 20.6.

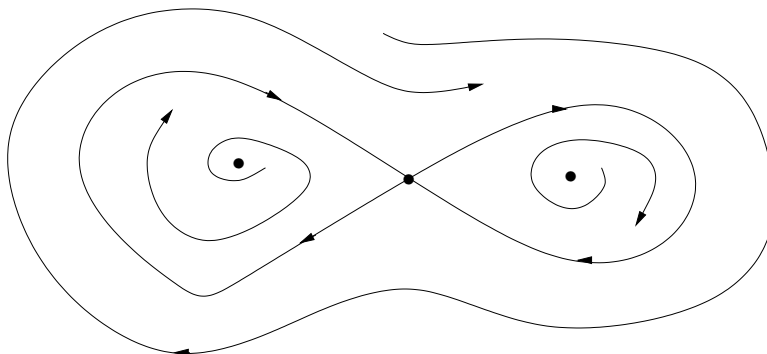


FIGURA 20.6. Insieme  $\omega$ -limite per il sistema discusso nel paragrafo §20.14.

**20.15.** DEFINIZIONE (CICLO LIMITE). *Un'orbita chiusa  $\gamma$  si chiama ciclo limite se  $\gamma = L_\omega(x)$  oppure  $\gamma = L_\alpha(x)$  per qualche  $x \notin \gamma$ ; nel primo caso diremo che  $\gamma$  è un ciclo  $\omega$ -limite, nel secondo che  $\gamma$  è un ciclo  $\alpha$ -limite.*

**20.16.** DEFINIZIONE (MOTO A SPIRALE). *Dato un ciclo  $\omega$ -limite  $\gamma$ , diremo che una traiettoria  $\varphi(t, x)$ , con  $x \notin \gamma$ , si muove a spirale verso  $\gamma$ , se comunque siano fissati un punto  $y \in \gamma$  e una sezione locale  $S$  contenente  $\gamma$ , la traiettoria  $\varphi(t, x)$  attraversa  $S$  lungo una successione strettamente monotona di punti  $\{y_n\}$  convergenti a  $y$ . Diremo corrispondentemente che il moto descritto dalla traiettoria  $\varphi(t, x)$  è a spirale verso il ciclo limite  $\gamma$ .*

**20.17.** LEMMA. *Sia  $\gamma$  un ciclo limite per il sistema dinamico planare (20.1). Se  $\gamma = L_\omega(x)$  allora la traiettoria  $\varphi(t, x)$  si muove a spirale verso  $\gamma$ .*

**20.18.** *Dimostrazione del lemma 20.17.* Poiché  $\gamma = L_\omega(x)$ , se  $y \in L_\omega(x)$ , fissato un intorno  $B_\varepsilon(y)$  esiste un indice  $k_0$  e una successione di punti  $\varphi(t_k, x) \in B_\varepsilon(y)$  per  $k > k_0$ . Sia  $\varepsilon$  tale da poter applicare il lemma 20.8 e concludere che, per ogni  $t_k$ , con  $k > k_0$ , esiste una successione  $\{\sigma_k\}$  tale che  $y_n \equiv \varphi(t_k + \sigma_k, x) \in S$ . Per il lemma 20.5 la successione  $\{y_n\}$  è monotona su  $S$  e converge a  $y$  poiché  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x) = y$ . In base alla definizione 20.16 concludiamo che la traiettoria  $\varphi(t, x)$  si muove a spirale



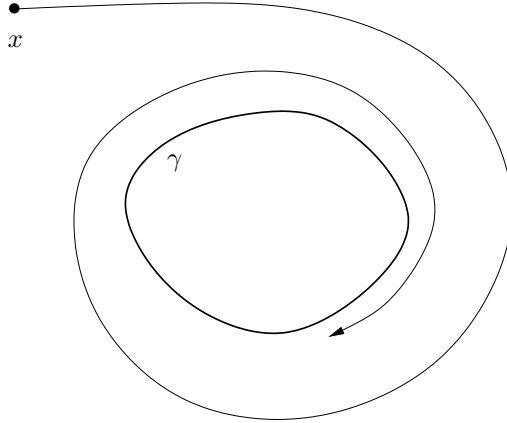


FIGURA 20.7. Esempio di ciclo limite  $\gamma$ . La curva chiusa  $\gamma$  è l'insieme  $\omega$ -limite di  $x$ , i.e.  $\gamma = L_\omega(x)$ : la traiettoria  $\varphi(t, x)$  si muove a spirale verso la curva  $\gamma$ .

verso  $\gamma$ . ■

**20.19. LEMMA.** *Sia  $\gamma$  un ciclo limite per il sistema planare (20.1). Se  $\gamma = L_\omega(x)$  e  $y \in \gamma$ , sia  $S$  una sezione locale di  $f$  in  $y$  e sia  $\{y_k = \varphi(t_k, x)\}$  la successione di punti in cui la curva descritta dalla traiettoria  $\varphi(t, x)$  interseca  $S$ . Definiamo:*

- (1)  $C_k = \{\varphi(t, x) : t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$ ,
- (2)  $\mathcal{A}_k$  la regione chiusa che ha come frontiera  $C_k$ ,  $\gamma$  e il segmento contenuto in  $S$  che unisce i due punti  $\varphi(t_k, x)$  e  $\varphi(t_{k+1}, x)$ ,
- (3)  $A_k = \mathcal{A}_k \setminus \partial\mathcal{A}_k$ .

Allora esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$ , la regione  $A_k$  non contiene punti d'equilibrio.

**20.20. Dimostrazione del lemma 20.19.** Poiché  $f(x) \neq 0 \forall x \in \gamma$ , si ha allora,

$$a = \min_{x \in \gamma} |f(x)| > 0, \tag{20.6}$$

poiché  $\gamma$  è compatto.

Esiste allora  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni punto  $z$  contenuto nell'insieme

$$B_\varepsilon(\gamma) = \bigcup_{y \in \gamma} B_\varepsilon(y) \tag{20.7}$$

si ha  $|f(z)| > a/2$ . Infatti, se così non fosse, allora, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esisterebbe  $z \in B_\varepsilon(\gamma)$  con  $|f(z)| \leq a/2$ . Scegliendo un intero  $n_0 > 0$  e  $\varepsilon \equiv \varepsilon_n = 1/n$ , al variare di  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n > n_0$ , si determinerebbe una successione  $z_n \in B_{\varepsilon_{n_0}}(\gamma)$ , tale che

$|f(z_n)| \leq a/2$ , da cui si potrebbe estrarre una sottosuccessione convergente  $\{z_{n_j}\}$ ; indicando con  $z_0$  il suo limite si avrebbe  $z_0 \in \gamma$  per costruzione e  $|f(z_0)| \leq a/2$  per continuità, in contraddizione con la (20.6).

Vogliamo ora dimostrare che esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per  $k > k_0$  la curva  $C_k$  è contenuta all'interno di  $B_\varepsilon(\gamma)$ ; cfr. la figura 20.8.

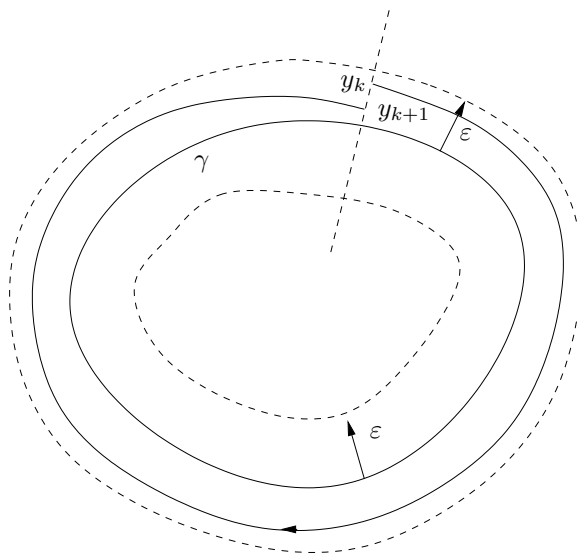


FIGURA 20.8. Costruzione grafica per la discussione del lemma 20.19.

Per il lemma 20.8 possiamo scegliere  $\varepsilon > 0$  in modo che, fissato  $y \in \gamma$  e indicando con  $S$  una sezione locale di  $f$  in  $y$ , per ogni  $z \in B_\varepsilon(y)$  esista  $t(z)$  tale che  $\varphi(t(z), z) \in S$  con  $|t(z)| \leq \sigma$  per qualche  $\sigma > 0$ .

Sia  $\delta \leq e^{-L(T+\sigma)}\varepsilon$ , dove  $L$  è la costante di Lipschitz di  $f|_{\overline{B_\varepsilon(\gamma)}}$  e  $T$  è il periodo della traiettoria che ha  $\gamma$  come orbita.

Scegliamo  $k_0$  tale che  $|y_k - y| < \delta$  per ogni  $k > k_0$ . Si ha quindi

$$|\varphi(t, y_k) - \varphi(t, y)| \leq e^{Lt} |y_k - y| < e^{Lt} \delta, \quad (20.8)$$

per ogni  $t \geq 0$  tale che  $e^{Lt} \delta < \varepsilon$ , per il teorema 11.6 (teorema della dipendenza continua dai dati iniziali). In particolare

$$|\varphi(T, y_k) - y| \leq |\varphi(T, y_k) - \varphi(T, y)| \leq e^{LT} |y_k - y| \leq e^{LT} \delta \leq e^{-L\sigma} \varepsilon < \varepsilon, \quad (20.9)$$

dove si è tenuto conto che, per definizione di  $T$ , si ha  $\varphi(T, y) = y$ . Ne segue in particolare che esiste  $\sigma_k \in [0, \sigma]$  tale che  $\varphi(T + \sigma_k, y_k) \in S$ ; per costruzione si ha

$T + \sigma_k = t_{k+1} - t_k$ , i.e.  $T + \sigma_k$  è il tempo necessario per andare da  $y_k = \varphi(t_k, x)$  a  $y_{k+1} = \varphi(t_{k+1}, x)$ . Quindi, dalla (20.8),

$$|\varphi(t, y_k) - \varphi(t, y)| < e^{L(T+\sigma)} \delta < e^{L(T+\sigma)} e^{-L(T+\sigma)} \varepsilon = \varepsilon \quad (20.10)$$

per ogni  $t \in [0, T + \sigma_k]$ . Ora la curva descritta da  $\varphi(t, y_k)$  per  $t \in [0, T + \sigma_k]$  è la curva descritta da  $\varphi(t, x)$  per  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , i.e. è  $C_k$ : quindi la (20.10) dimostra che tale curva è interamente contenuta all'interno di  $B_\varepsilon(\gamma)$ , purché si abbia  $k > k_0$ : quindi per tali valori  $k$  l'insieme  $A_k$  non contiene punti d'equilibrio. ■

**20.21. PROPOSIZIONE.** *Sia  $\gamma$  un ciclo limite per il sistema planare (20.1) e sia  $T$  il periodo della traiettoria periodica che lo percorre; se  $\gamma = L_\omega(x)$  e  $y \in \gamma$ , sia  $S$  una sezione locale di  $f$  in  $y$  e sia  $\{y_k = \varphi(t_k, x)\}$  la successione di punti in cui la curva descritta dalla traiettoria  $\varphi(t, x)$  interseca  $S$ . Se definiamo  $T_k = t_{k+1} - t_k$ , esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha*

$$T_k = T + \sigma_k, \quad |\sigma_k| < C |y_k - y|, \quad (20.11)$$

per una costante  $C$  che non dipende da  $k$ .

**20.22. Dimostrazione della proposizione 20.21.** Poiché  $T$  è il periodo della traiettoria che percorre l'orbita  $\gamma$ , si ha  $\varphi(T, y) = y$  se  $y \in \gamma$ . Introduciamo la successione  $\{\sigma_k\}$  definendo  $T_k = T + \sigma_k$ ; si ha allora

$$y_{k+1} = \varphi(t_{k+1}, x) = \varphi(t_k + T_k, x) = \varphi(T_k, \varphi(t_k, x)) = \varphi(T_k, y_k), \quad (20.12)$$

per costruzione. Si ha inoltre

$$y_{k+1} - y = \varphi(T_k, y_k) - \varphi(T, y) = \varphi(T_k, y_k) - \varphi(T, y_k) + \varphi(T, y_k) - \varphi(T, y), \quad (20.13)$$

dove

$$\varphi(T, y_k) = \varphi(T, y) + \left\langle (y_k - y), \int_0^1 ds D\varphi(T, y + s(y_k - y)) \right\rangle, \quad (20.14)$$

dove il vettore  $y + s(y_k - y)$  appartiene al segmento che unisce  $y$  a  $y_k$  lungo  $S$  e si ha

$$\left| \int_0^1 ds D\varphi(T, y + s(y_k - y)) \right| \leq M_0, \quad (20.15)$$

per qualche costante  $M_0$ , poiché  $\varphi$  è di classe  $C^1$  nei suoi argomenti.

D'altra parte

$$\varphi(T_k, y_k) - \varphi(T, y_k) = \int_T^{T_k} ds \frac{d}{ds} \varphi(s, y_k) = \int_T^{T_k} ds f(\varphi(s, y_k)). \quad (20.16)$$

Per il lemma 20.19 si può scegliere  $k$  sufficientemente grande tale che la traiettoria  $\varphi(t, x)$ , con  $t \geq t_k$ , sia contenuta in una regione  $A_k$  in cui non ci siano punti d'equilibrio, in modo tale che, se  $a$  è definito come in (20.6), si abbia

$$\frac{a}{2} < |f(\varphi(t_j, y_k))| < 2a \quad t \geq t_k, \quad (20.17)$$

così che

$$\frac{a|\sigma_k|}{2} \leq \left| \int_T^{T_k} ds f(\varphi(s, y_k)) \right| \leq 2a|\sigma_k|, \quad (20.18)$$

poiché  $\sigma_k = T_k - T$ .

In conclusione si ha, per le (20.13), (20.14), (20.15) e (20.18),

$$\begin{aligned} \frac{a|\sigma_k|}{2} &\leq \left| \int_T^{T_k} ds f(\varphi(s, y_k)) \right| = |\varphi(T_k, y_k) - \varphi(T, y_k)| \\ &\leq |y_{k+1} - y| + |\varphi(T, y_k) - \varphi(T, y)| \leq |y_{k+1} - y| + M_0 |y_k - y|, \end{aligned} \quad (20.19)$$

da cui segue la (20.11) con  $C = 2(M_0 + 1)/a$ , usando che  $|y_{k+1} - y| < |y_k - y|$ . ■

**20.23. LEMMA.** *Sia  $\gamma$  un ciclo limite per il sistema dinamico planare (20.1). Se  $\gamma = L_\omega(x)$  allora esiste un intorno  $B(x)$  di  $x$  tale che  $\gamma = L_\omega(z)$  per ogni  $z \in B(x)$ .*

**20.24. Dimostrazione del lemma 20.23.** Sia  $y \in \gamma$ . Poiché  $y \in L_\omega(x)$ , esiste una sezione locale di  $f$  in  $y$  e un valore  $k_0 > 0$  tali che  $\varphi(t_k, x) \in S$  per  $k > k_0$  (in virtù della definizione di insieme  $\omega$ -limite e del lemma 20.8; cfr. anche il paragrafo §20.18). Consideriamo, per qualche  $k > k_0$ , scelto come nel lemma 20.19, la curva  $C_k = \{\varphi(t, x) : t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$  e definiamo  $\mathcal{A}_k$  la regione chiusa che ha come frontiera  $C_k$ ,  $\gamma$  e il segmento contenuto in  $S$  che unisce i due punti  $\varphi(t_k, x)$  e  $\varphi(t_{k+1}, x)$ . Sia  $A_k = \mathcal{A}_k \setminus \partial\mathcal{A}_k$ :  $A_k$  è positivamente invariante (come lo è  $\mathcal{A}_k$ ) e aperto: quindi, per ogni  $T > t_{k+1}$ ,  $\varphi(T, x) \in A_k$  ed è possibile scegliere un intorno  $B(\varphi(T, x)) \subset A_k$ . Inoltre, per il lemma 20.19,  $A_k$  non contiene punti d'equilibrio, purché  $k$  sia sufficientemente grande.

Tutte le traiettorie  $\varphi(t, z)$ , con  $z \in B(\varphi(T, x))$ , tendono a  $\gamma$  per  $t \rightarrow \infty$ . Infatti  $\forall z \in B(\varphi(T, x))$  si ha  $\varphi(t, z) \in A_k$  poiché  $A_k$  è positivamente invariante: quindi  $L_\omega(z) \neq \emptyset$  e  $L_\omega(z) \subset \overline{A_k} = \mathcal{A}_k$ . Poiché  $L_\omega(z)$  è chiuso (per la proprietà (1) nel paragrafo §16.19) e limitato (poiché contenuto in  $A_k$ ), e quindi compatto, e non contiene punti d'equilibrio, per quanto appena dimostrato, possiamo applicare il teorema 20.12 e concludere che  $L_\omega(z)$  è un'orbita chiusa  $\gamma_0$ .

Se  $\gamma_0 \neq \gamma$ , allora  $\gamma_0$  deve racchiudere  $\gamma$  al suo interno. Infatti altrimenti, se  $S$  è un segmento trasverso a un punto  $y \in \gamma$  e tale da intersecare  $\gamma_0$  in due punti  $z_1$  e  $z_2$ , allora  $f(z_1)$  e  $f(z_2)$  dovrebbero essere diretti con versi opposti rispetto a  $S$ : d'altra parte questo non è possibile poiché, per  $k$  sufficientemente grande,  $S$  deve essere una sezione locale (poiché  $C_k$  tende a  $\gamma$ , come già notato nel paragrafo §20.20). Tuttavia

se  $\gamma_0$  racchiudesse  $\gamma$  al suo interno, allora la traiettoria  $\varphi(t, x)$  non potrebbe muoversi a spirale verso  $\gamma$  (perché dovrebbe attraversare  $\gamma_0$ , violando il teorema di unicità 10.36) contro il fatto che  $\gamma = L_\omega(x)$ . Quindi deve essere  $\gamma_0 = \gamma$ , i.e.  $L_\omega(z) = \gamma$ .

Per il teorema 11.6 (teorema della dipendenza continua dai dati iniziali), l'intorno  $B(\varphi(T, x))$  è costituito da punti che partono da un insieme aperto  $U$  contenente  $x$ . Allora esiste un intorno  $B(x)$  di  $x$  contenuto in  $U$  tale che  $L_\omega(z) = \gamma$  per ogni  $z \in B(x)$ . ■

**20.25. TEOREMA.** *Un insieme compatto positivamente (o negativamente) invariante  $K$  contiene almeno un punto d'equilibrio o un'orbita chiusa.*

**20.26. Dimostrazione del teorema 20.25.** Consideriamo il caso in cui l'insieme  $K \equiv P$  sia positivamente invariante. Poiché  $P$  è compatto e positivamente invariante,  $L_\omega(x) \neq \emptyset$  per ogni  $x \in P$ , per il lemma 18.2. Poiché  $P$  è positivamente invariante,  $L_\omega(x) \subset P$ . Quindi  $L_\omega(x)$  è limitato (ed è chiuso per la proprietà (1) degli insiemi limite nel paragrafo §16.19). Quindi possiamo applicare il teorema 20.12. ■

**20.27. TEOREMA.** *Sia  $\gamma$  un'orbita chiusa per il sistema dinamico planare (20.1) e si supponga che la regione (aperta)  $U$  interna a  $\gamma$  sia contenuta nel dominio del sistema dinamico. Allora  $U$  contiene almeno un punto d'equilibrio o un'orbita chiusa.*

**20.28. Dimostrazione del teorema 20.27.** La regione  $\overline{U}$  è compatta. Quindi si può applicare il teorema 20.25. Basterà quindi dimostrare che non è possibile che  $\overline{U}$  non contenga punti d'equilibrio e che l'unica orbita chiusa in  $\overline{U}$  sia  $\gamma$  stessa.

Se questo succede  $\gamma$  deve essere un ciclo limite: infatti se  $U$  non contenesse punti d'equilibrio, allora, per ogni  $x \in U$ ,  $L_\omega(x)$  deve essere un'orbita chiusa per il teorema 20.12 e quindi  $L_\omega(x) = \gamma$  se  $\gamma$  è l'unica orbita chiusa in  $\overline{U}$ . Lo stesso tipo di ragionamento implica  $L_\alpha(x) = \gamma$ .

Sia  $x \in U$ . Se  $L_\omega(x) = L_\alpha(x) = \gamma$ , allora per ogni  $y \in \gamma$  esistono due successioni  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$  tali che

(1) la successione  $\{t_k\}$  è crescente e  $t_k \rightarrow \infty$ , mentre la successione  $\{s_k\}$  è decrescente e  $s_k \rightarrow -\infty$ , e (2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(t_k, x) - y| = 0$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(s_k, x) - y| = 0$ .

Inoltre si possono scegliere  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$  in modo tale che si abbia  $\varphi(t_k, x) \in S$  e  $\varphi(s_k, x) \in S$  per ogni  $k$ , se  $S$  è una sezione locale di  $f$  in  $y$  (cfr. il paragrafo §20.18). Passando eventualmente a sottosuccessioni possiamo anche supporre che si abbia  $t_k > 0$  e  $s_k < 0$  per ogni  $k$ . Allora la successione  $\{\tau_k\}$  definita da

$$\dots, s_5, s_4, s_3, s_2, s_1, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \dots \tag{20.20}$$

è crescente lungo la curva  $C$  individuata dalla traiettoria  $\varphi(t, x)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ ; al contrario la successione dei punti  $\varphi(\tau_k, x)$  non è crescente lungo la sezione locale  $S$ ,

in contraddizione con il lemma 20.5. ■

**20.29.** Il teorema 20.27 può essere rafforzato dal seguente risultato.

**20.30. TEOREMA.** *Sia  $\gamma$  un'orbita chiusa per il sistema dinamico planare (20.1) e si supponga che la regione (aperta)  $U$  interna a  $\gamma$  sia contenuta nel dominio del sistema dinamico. Allora  $U$  contiene almeno un punto d'equilibrio.*

**20.31. Dimostrazione del teorema 20.30.** Supponiamo per assurdo che  $U$  non contenga nessun punto d'equilibrio. Allora, per il teorema 20.27, esiste un'orbita chiusa  $\gamma_1$  contenuta in  $U$ ; sia  $U_1$  la regione racchiusa da  $\gamma_1$ . Riapplicando il teorema 20.27 iterativamente possiamo concludere che esiste una successione di orbite chiuse  $\{\gamma_n\}$  tali che, se indichiamo con  $U_n$  le regioni racchiusa da tali orbite, si ha  $U_{n+1} \subset U_n$  per ogni  $n \geq 1$ .

Sia  $\{x_n\}$  una successione di punti  $x_n \in \gamma_n$  convergente e sia  $x$  il suo limite (se  $x_n$  non converge se ne può estrarre una sottosuccessione, utilizzando la compattezza di  $\overline{U}$ ).

Allora deve esistere un'orbita chiusa  $\beta$  tale che  $x \in \beta$ , come si può dimostrare ragionando per assurdo. Supponiamo infatti che la traiettoria passante per  $x$  non abbia luogo su un'orbita chiusa: allora essa dovrebbe muoversi a spirale verso un ciclo limite  $\gamma_0$ . Infatti sarebbe  $L_\omega(x) \neq \emptyset$  per il fatto che  $\overline{U}$  è compatto e invariante (cfr. il lemma 18.2) e  $L_\omega(x)$  dovrebbe essere un'orbita chiusa  $\gamma_0$  per il teorema 20.12 (poiché stiamo supponendo che  $U$  non contenga punti d'equilibrio): se  $x \notin L_\omega(x)$  allora  $\gamma_0 = L_\omega(x)$  sarebbe un ciclo limite, per la definizione 20.15. D'altra parte, per il lemma 20.23, dovrebbe esistere un intorno di  $B(x)$  contenente punti le cui traiettorie dovrebbero muoversi a spirale anch'esse verso lo stesso ciclo limite, *i.e.*  $\gamma_0 = L_\omega(z) \forall z \in B(x)$ , e quindi lo stesso dovrebbero fare le traiettorie dei punti  $x_n$  a partire da un certo valore di  $n$  (*i.e.* dei punti  $x_n \in B(x)$ ), contro l'ipotesi che si avesse  $x_n \in \gamma_n$ . Questo completa la dimostrazione che  $x$  è contenuto in un'orbita chiusa.

Quindi esisterebbe un'orbita chiusa  $\beta$  che non contiene né punti d'equilibrio (lo stiamo supponendo) né orbite chiuse (per costruzione). Ma questo contraddirebbe il teorema 20.27. ■

**20.32. TEOREMA.** *Sia  $H$  una costante del moto (di classe  $C^1$ ) del sistema planare (20.1). Se  $H$  non è identicamente costante su alcun insieme aperto, allora non ci sono né cicli limite né punti d'equilibrio asintoticamente stabili.*

**20.33. Dimostrazione del teorema 20.32.** Supponiamo che esista un ciclo limite  $\gamma$ . Poiché  $H$  è una costante del moto, per ogni  $y \in \gamma$ ,  $H(\varphi(t, y))$  assume sempre lo stesso valore, che indichiamo con  $H_\gamma$ . Poiché  $H$  è continua, per ogni  $x$  tale che  $\gamma = L_\omega(x)$ , si ha  $\lim_{k \rightarrow \infty} H(\varphi(t_k, x)) = H_\gamma$ , per qualche successione divergente  $\{t_k\}$ . Ma  $H$  deve assumere sempre lo stesso valore sulla traiettoria  $\varphi(t, x)$ , quindi  $H(\varphi(t, x)) \equiv H_\gamma$ . Per il lemma 20.23, esiste un intorno  $B(x)$  tale che  $\gamma = L_\omega(z)$  per ogni  $z \in B(x)$ . Per ciascuno di tali punti possiamo ripetere il ragionamento precedente e quindi concludere

che  $H(z) = H_\gamma$  per ogni  $z \in B(x)$ . Questo contraddice l'ipotesi che  $H$  non fosse identicamente costante su nessun insieme aperto.

Il caso dei punti d'equilibrio asintoticamente stabili si tratta analogamente, ricordando la definizione 16.5, (3). Se  $x_0$  è asintoticamente stabile esiste un intorno  $B(x_0)$  tale che  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, z) = x_0$  per ogni  $z \in B(x_0)$ . Si avrebbe quindi, come nel caso precedente,  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(\varphi(t, z)) = H(x_0)$  per ogni  $z \in B(x_0)$  e quindi, poiché  $H$  è una costante del moto, seguirebbe  $H(z) = H(x_0)$  per ogni  $z \in B(x_0)$ , contro l'ipotesi. ■

**20.34. Osservazione.** La condizione che  $H$  non sia identicamente costante su alcun insieme aperto è soddisfatta, per esempio, se  $H$  ha punti stazionari isolati.

**20.35. Osservazione.** Per il teorema 20.12, gli insiemi limite compatti di un sistema planare che non contengano punti d'equilibrio sono orbite chiuse. Sia  $\gamma$  una di tali orbite: se esistono punti  $z \notin \gamma$  tali che  $\gamma = L_\omega(z)$ , allora  $\gamma$  è un ciclo limite; altrimenti possiamo solo dire che la traiettoria che si svolge su  $\gamma$  è periodica. Può infatti succedere che una data regione del piano sia interamente costituita da orbite chiuse, senza che per altro esistano cicli limite (e.g. questo si verifica per sistemi meccanici conservativi, o, più in generale, per sistemi dinamici in cui esista una costante del moto che non sia identicamente nulla su alcun aperto; cfr. il teorema 20.36 sotto).

**20.36. TEOREMA.** *Sia  $H$  una costante del moto di classe  $C^1$  del sistema planare (20.1) tale che essa non sia identicamente costante su alcun insieme aperto. Se esiste una regione (aperta)  $U$  che (1) sia racchiusa all'interno di due componenti connesse di una curva di livello chiusa di  $H$  e non contenga punti d'equilibrio, oppure (2) sia racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello chiusa di  $H$  e contenga un unico punto d'equilibrio  $x_0$  che sia stabile, allora ogni traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$ , con  $\bar{x} \in U$  nel caso (1) e  $\bar{x} \in U \setminus \{x_0\}$  nel caso (2), è periodica e, nel caso (2), si svolge su un'orbita che contiene  $x_0$  al suo interno.*

**20.37. Dimostrazione del teorema 20.36.** Trattiamo i due casi contemporaneamente interpretando nel seguito  $\{x_0\} = \emptyset$  nel caso (1); cfr. le figure 20.9 e 20.10.

Sia  $\bar{x}$  un punto arbitrario in  $U \setminus \{x_0\}$  e sia  $\varphi(t, \bar{x})$  la traiettoria con dato iniziale  $\bar{x}$ . Poiché  $\bar{U}$  è compatto e invariante,  $L_\omega(\bar{x})$  è non vuoto ed è contenuto in  $\bar{U}$  (cfr. il lemma 18.2).

Notiamo in primo luogo che  $L_\omega(\bar{x})$  non può essere contenuto in  $\Gamma = \partial U$ : infatti, se  $H_\Gamma$  è il valore che  $H$  assume su  $\Gamma$ , poiché  $H$  è una costante del moto, si avrebbe  $H(\varphi(t, \bar{x})) = H_\Gamma$ , i.e.  $\varphi(t, \bar{x})$  dovrebbe appartenere alla curva di livello  $\Gamma$ , contro l'ipotesi. Quindi  $L_\omega(\bar{x})$  è contenuto in  $U \setminus \Gamma$ .

Inoltre  $L_\omega(\bar{x})$  non può contenere il punto d'equilibrio stabile  $x_0$ : se tale punto non esiste il risultato è ovvio, altrimenti si ragiona per assurdo come segue.

Se  $x_0$  appartenesse a  $L_\omega(\bar{x})$ , si avrebbe  $L_\omega(\bar{x}) = \{x_0\}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \bar{x}) = x_0$ , per il lemma 18.14. Comunque si considerasse una curva chiusa  $\mathcal{C}$  contenente  $x_0$  al suo interno, la traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$  dovrebbe quindi intersecare  $\mathcal{C}$ . Sia  $\varepsilon > 0$

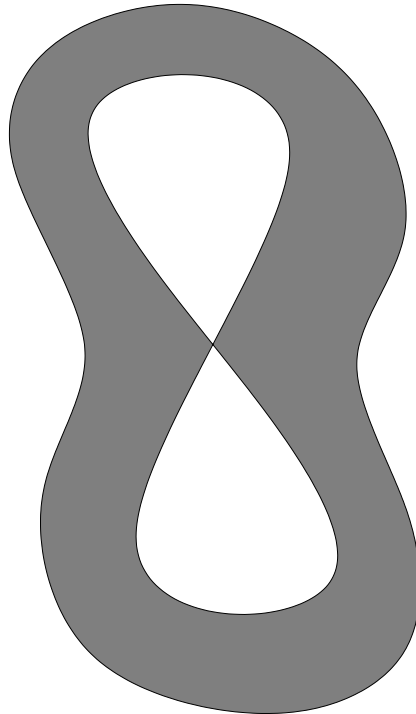


FIGURA 20.9. Scenario previsto nella discussione del teorema 20.36: caso (1). La regione ombreggiata è racchiusa tra due componenti connesse di una curva di livello e non contiene punti d'equilibrio al suo interno.

e sia  $z \in B_\delta(x_0)$ , con  $\delta$  tale che  $\varphi(t, x) \in B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  (per la stabilità di  $x_0$  tale  $\delta$  esiste). Si ha  $L_\omega(z) \neq \emptyset$  sempre per il lemma 18.2: si dovrebbe allora avere  $x_0 \in L_\omega(z)$ . Infatti se così non fosse, dal momento che  $x_0$  è l'unico punto d'equilibrio contenuto in  $U$ , l'insieme  $L_\omega(z)$  dovrebbe essere un'orbita chiusa per il teorema 20.12 e dovrebbe racchiudere  $x_0$  al suo interno per il lemma 20.30: indicando con  $\mathcal{C}$  tale orbita, per quanto appena visto, la traiettoria che ha luogo sulla curva chiusa  $\mathcal{C}$  dovrebbe intersecare la traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$ , contro il teorema 10.36 (teorema di unicità).

Avremmo quindi trovato  $x_0 \in L_\omega(z)$ . D'altra parte il discorso varrebbe per ogni  $z \in B_\delta(x_0)$ : quindi esisterebbe  $\delta > 0$  tale che per ogni  $z \in B_\delta(x_0)$  si avrebbe  $L_\omega(z) = \{x_0\}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, z) = x_0$ , *i.e.*  $x_0$  sarebbe attrattivo. Poiché  $x_0$  è stabile per ipotesi,  $x_0$  dovrebbe quindi essere asintoticamente stabile: questo è però in contraddizione con il lemma 20.32.

In conclusione  $L_\omega(\bar{x})$  non può contenere  $x_0$ : deve quindi essere un'orbita chiusa per il teorema 20.12 poiché  $L_\omega(\bar{x})$  è compatto e, per ipotesi,  $x_0$  è l'unico punto d'equilibrio



in  $U$ .

Se fosse  $\bar{x} \notin L_\omega(\bar{x})$  allora  $L_\omega(\bar{x})$  sarebbe un ciclo limite (cfr. la definizione 20.15), ma per il teorema 20.32 possiamo escludere l'esistenza di cicli limite all'interno di  $\bar{U}$ . Quindi si deve avere  $\bar{x} \in L_\omega(\bar{x})$ , ovvero  $L_\omega(\bar{x})$  deve essere la stessa traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$ : la traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$  è perciò periodica.

Infine, nel caso (2), l'orbita chiusa percorsa dalla traiettoria deve contenere  $x_0$  al suo interno per il teorema 20.30. ■

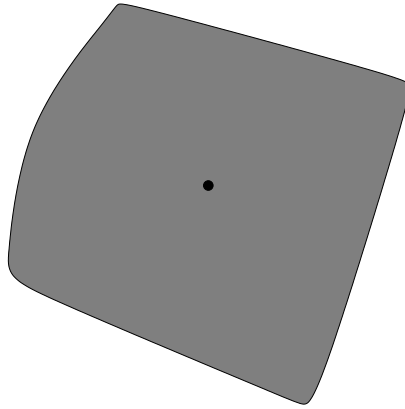


FIGURA 20.10. Discussione della dimostrazione del teorema 20.36: caso (2). La regione ombreggiata è racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello e contiene un punto d'equilibrio stabile al suo interno.

**20.38. Osservazione.** Dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (20.21)$$

se esiste una funzione  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che

$$f_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} H(x), \quad f_2(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(x), \quad (20.22)$$

con  $x = (x_1, x_2)$ , allora  $H$  è una costante del moto: infatti

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0. \quad (20.23)$$

D'altra parte se è noto *a priori* che esiste una costante del moto  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  per il sistema dinamico (20.21), non è detto che la (20.22) debba essere soddisfatta. In

generale possiamo soltanto concludere che esiste una funzione  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che

$$f_1(x) = g(x) \frac{\partial}{\partial x_2} H(x), \quad f_2(x) = -g(x) \frac{\partial}{\partial x_1} H(x). \quad (20.24)$$

Infatti se  $\dot{H} = 0$  si ha allora

$$\dot{H} = \langle \nabla H, \dot{x} \rangle = 0, \quad (20.25)$$

così che  $\nabla H$  deve essere ortogonale a  $\dot{x}$ , *i.e.* deve essere proporzionale al vettore

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x_2} H(x), \frac{\partial}{\partial x_1} H(x) \right), \quad (20.26)$$

con costante di proporzionalità che può dipendere dal punto  $x$ , che è appunto la condizione (20.24).

**20.39. ESEMPIO.** Consideriamo il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x y^2, \\ \dot{y} = -e^x x y. \end{cases} \quad (20.27)$$

Si vede immediatamente che  $H(x, y) = x^2 + y^2$  è una costante del moto. D'altra parte il campo vettoriale  $f(x, y)$  che definisce il sistema dinamico (20.27) è della forma (20.24), con  $g(x, y) = e^x y$ : in particolare non esiste alcuna funzione  $W$  tale che  $f_1 = \partial H / \partial y$  e  $f_2 = -\partial H / \partial x$ , come è facile verificare.

## 21. Sistemi gradiente

**21.1. Introduzione.** Nel presente paragrafo analizzeremo alcuni sistemi notevoli in cui il campo vettoriale si può scrivere come gradiente di una funzione scalare.

**21.2. DEFINIZIONE (SISTEMI GRADIENTE).** Un sistema dinamico (16.1) si dice sistema gradiente se esiste una funzione  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = -\nabla V(x), \quad (21.1)$$

*i.e.*  $f$  si può scrivere come il gradiente di  $-V$ .

**21.3.** Diremo che il punto  $x$  è un *punto regolare* per il sistema gradiente (21.1) se  $\nabla V(x) \neq 0$ . Definiremo *superficie di livello* di  $V$  una superficie  $\Sigma_c$  di dimensione  $n-1$  definita da  $\Sigma_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = c\}$ , con  $c \in \mathbb{R}$ .

**21.4. Proprietà dei sistemi gradiente.** Dato il sistema gradiente (21.1), si ha (1)  $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x$ , e  $\dot{V}(x) = 0$  se e solo se  $x$  è un punto d'equilibrio;

(2) se  $x_0$  è un punto di minimo isolato di  $V(x)$  allora  $x_0$  è un punto asintoticamente stabile;

(3) se  $x$  è un punto regolare per il sistema (21.1), allora  $\nabla V(x)$  è perpendicolare in  $x$  alle superfici di livello di  $V$ ;

(4) nei punti regolari le traiettorie attraversano ortogonalmente le superfici di livello.

**21.5.** Dimostrazione della proprietà (1) di 21.4. Da (21.1) si ha

$$\dot{V}(x) = -(\nabla V(x))^2 \leq 0, \quad (21.2)$$

che è nullo se e solo se  $\nabla V(x) = 0$ ; in quest'ultimo caso  $f(x) = 0$ . ■

**21.6.** Dimostrazione della proprietà (2) di 21.4. La funzione  $V(x) - V(x_0)$  è una funzione di Ljapunov in un intorno di  $x_0$ : possiamo quindi applicare il teorema 18.20, e otteniamo che  $x_0$  è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile. ■

**21.7.** Dimostrazione della proprietà (3) di 21.4. Le superfici di livello di  $V$  sono gli insiemi  $\Sigma_c = V^{-1}(c)$ , con  $c \in \mathbb{R}$  (cfr. il paragrafo §21.3). Se  $u \in V^{-1}(c)$  è un punto regolare, allora  $V^{-1}(c)$  è una superficie regolare di codimensione 1 intorno a  $u$ . Infatti  $\nabla V(u) \neq 0$  implica  $[\partial V/\partial x_i] \neq 0$  per qualche  $i$ , per esempio per  $i = n$ , e il teorema della funzione implicita garantisce, essendo  $V(x) = c$  e  $[\partial V/\partial x_n] \neq 0$ , che si può scrivere  $x_n$  in funzione delle altre componenti  $x_1, \dots, x_{n-1}$  e di  $c$ , i.e.  $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1}; c)$  con  $g$  funzione regolare: quindi  $V^{-1}(c) = (x_1, \dots, x_{n-1}, g)$  con  $g$  regolare.

Lungo la superficie  $V^{-1}(c)$  i vettori tangenti sono dati da

$$T(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\psi(\alpha, x) - x}{\alpha}, \quad (21.3)$$

se  $\psi(\alpha, x)$ ,  $x \in V^{-1}(c)$ , è una curva parametrizzata da  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sulla superficie di livello. Poiché si ha  $dV/d\alpha = 0$  lungo la curva  $\psi(\alpha, x)$ , risulta

$$\left. \frac{dV(x)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \langle \nabla V(x), T(x) \rangle = 0, \quad (21.4)$$

e quindi  $\nabla V(x)$  è ortogonale a  $T(x)$ , e, di conseguenza, è ortogonale in  $x$  alla superficie di livello  $V^{-1}(c)$ . ■

**21.8.** Dimostrazione della proprietà (4) di 21.4. Segue dalla proprietà (3) e dal fatto che le traiettorie sono tangenti a  $\nabla V$ . ■

**21.9. TEOREMA.** Dato il sistema gradiente (21.1), se  $y \in L_\omega(x)$ , allora  $y$  è un punto d'equilibrio.

**21.10.** Dimostrazione del teorema 21.9. Sia  $y \in L_\omega(x)$  per qualche  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dimostriamo per assurdo che si deve avere  $\dot{V}(\varphi(t, y)) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ : ne segue allora che

$\dot{V}(y) = 0$ , così che la proprietà (1) del paragrafo §21.4 implicherà allora che  $y$  è un punto d'equilibrio.

Supponiamo che esista un punto  $y_1 = \varphi(t, y)$ , per qualche  $t > 0$  tale che  $V(y_1) \neq V(y)$ . Allora la prima parte della proprietà (1) nel paragrafo §21.4 richiede  $V(y_1) < V(y)$ ; poniamo

$$V(y) - V(y_1) = \varepsilon > 0. \quad (21.5)$$

La proprietà (2) nel paragrafo §16.19 degli insiemi  $\omega$ -limite implica che esistono due successioni di tempi  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$  tali che  $\varphi(t_k, x) \rightarrow y$  e  $\varphi(s_k, x) \rightarrow y_1$ , per  $k \rightarrow \infty$ , e, corrispondentemente, per continuità,  $V(\varphi(t_k, x)) \rightarrow V(y)$  e  $V(\varphi(s_k, x)) \rightarrow V(y_1)$ ; sia quindi  $k_0$  tale che per ogni  $k > k_0$  risulti  $|V(\varphi(t_k, x)) - V(y)| < \varepsilon/2$  e  $|V(\varphi(s_k, x)) - V(y_1)| < \varepsilon/2$ . Scegliendo eventualmente sottosuccessioni di  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$ , utilizzando il lemma 16.12, si può supporre che sia  $t_k < s_k < t_{k+1}$  per ogni  $k > k_0$ . Si otterrebbe quindi  $V(\varphi(t_{k+1}, x)) \leq V(\varphi(s_k, x))$  così che

$$V(y) - V(y_1) \leq |V(\varphi(t_{k+1}, x)) - V(y)| + |V(\varphi(s_k, x)) - V(y_1)| < \varepsilon, \quad (21.6)$$

che è contraddittoria con (21.5). Deve essere quindi  $V(y_1) = V(y)$  per ogni  $y_1$  lungo la traiettoria  $\varphi(t, y)$ , e quindi  $\dot{V}(y) = 0$ . ■

**21.11. COROLLARIO.** *Nel caso in cui  $V(x)$  abbia solo punti critici isolati, ogni traiettoria o tende all'infinito o tende a un punto d'equilibrio (isolato).*

**21.12. Dimostrazione del corollario 21.11.** Sia  $x \in \mathbb{R}^n$ . Supponiamo che  $\varphi(t, x)$  sia confinato in una regione limitata: esisterà quindi un compatto  $K$  contenente  $x$  tale che  $\varphi(t, x) \in K \forall t \geq 0$ . Quindi l'insieme  $L_\omega(x)$  è non vuoto, per il Lemma 18.2. Sia  $y \in L_\omega(x)$ : per il teorema 21.9 e per il fatto che i punti critici di  $V$  sono isolati, otteniamo quindi che il punto  $y$  è un punto d'equilibrio isolato. ■

**21.13. TEOREMA.** *Gli autovalori della matrice  $A$  che si ottiene linearizzando il sistema (21.1) nell'intorno di un punto d'equilibrio sono tutti reali.*

**21.14. Dimostrazione del teorema 21.13.** Poiché la funzione  $V(x)$  in (21.1) è assunta almeno di classe  $C^2$ , la matrice  $A_{ij} = [\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j](x_0)$  è simmetrica: quindi i suoi autovalori sono reali (cfr. gli esercizi 6÷10 del capitolo 1). ■

**21.15. Osservazione.** Il teorema 21.13 implica che i sistemi gradiente non possono avere centri o spirali. Si noti anche che i sistemi gradiente hanno proprietà completamente differenti dai sistemi meccanici conservativi (cfr. il paragrafo §16.29): nei sistemi conservativi solo una parte del campo vettoriale  $f(x)$  si scrive come gradiente di una funzione scalare. In particolare, mentre i sistemi gradiente non possono avere centri, i sistemi meccanici conservativi non possono avere pozzi o sorgenti

## 22. Equazioni di Lotka-Volterra

**22.1. Introduzione.** Le equazioni di Lotka-Volterra descrivono un sistema ecologico di predatori e prede (*sistema preda-predatore*), su cui si fanno le seguenti ipotesi:

- la preda è l'unico cibo del predatore;
- la velocità con cui i predatori si cibano di prede è proporzionale al numero di incontri tra prede e predatori, e quindi al prodotto del numero di prede per il numero di predatori, con un minimo necessario per sostenere la popolazione di predatori;
- la velocità con cui diminuisce la popolazione delle prede a causa dei predatori è proporzionale al numero di incontri tra prede e predatori;
- il cibo disponibile per le prede è costante in assenza di predatori (e quindi, in assenza di predatori, la velocità con cui aumenta la popolazione di prede è proporzionale alla popolazione stessa).

Indichiamo con  $x$  il numero di prede, e con  $y$  il numero di predatori, e trattiamo  $x, y$  come se fossero variabili continue. Ovviamente  $x, y \geq 0$ . L'evoluzione del sistema considerato è allora descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x, \\ \dot{y} = (Cx - D)y, \end{cases} \quad (22.1)$$

che prendono il nome di *equazioni di Lotka-Volterra*. Le costanti  $A, B, C, D$  in (22.1) sono costanti reali positive.

**22.2. LEMMA.** *Il sistema dinamico descritto dalle equazioni (22.1) per  $x, y \geq 0$  ammette due punti d'equilibrio  $z_1 = (0, 0)$  e  $z_2 = (D/C, A/B)$ , che sono rispettivamente un punto di sella e un centro.*

**22.3. Dimostrazione del lemma 22.2.** È immediata a partire dalla definizione di punto d'equilibrio nel paragrafo §16.3. ■

**22.4. LEMMA.** *Il punto d'equilibrio  $z_2 = (D/C, A/B)$  è un punto d'equilibrio stabile.*

**22.5. Dimostrazione del lemma 7.4.** Cerchiamo una funzione di Ljapunov della forma

$$H(x, y) = F(x) + G(y) + H_0. \quad (22.2)$$

dove  $F$  dipende solo da  $x$ ,  $G$  dipende solo da  $y$  e  $H_0$  è una costante.

Si ha allora, dalle equazioni (22.1),

$$\dot{H} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} = x \frac{\partial F}{\partial x} (A - By) + y \frac{\partial G}{\partial y} (Cx - D), \quad (22.3)$$

e quindi risulta  $\dot{H} = 0$  se

$$\frac{x}{(Cx - D)} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{(By - A)} \frac{\partial G}{\partial y} = \text{cost.} = 1, \quad (22.4)$$

che dà

$$\begin{cases} F(x) = Cx - D \log x, \\ G(y) = By - A \log y, \end{cases} \quad (22.5)$$

così che si vede che scegliendo

$$H(x, y) = Cx - D \log x + By - A \log y - F(D/C) - G(A/B), \quad (22.6)$$

allora il punto  $z_2$  risulta un punto di minimo isolato per  $H(x, y)$  (la matrice hessiana  $\mathcal{H}(x, y)$  di  $H(x, y)$ , calcolata in  $(x, y) = z_2$  è tale che  $\det \mathcal{H}(z_2) > 0$  e  $H_{xx}(z_2) > 0$ ); possiamo perciò utilizzare la (22.6) come funzione di Ljapunov per dimostrare che  $z_2$  è un punto d'equilibrio stabile (applicando il teorema 18.20). ■

**22.6. LEMMA.** *Ogni traiettoria che non parta da  $z_2$  o da punti  $z = (x, y)$  con  $x = 0$  oppure  $y = 0$  si svolge su un'orbita chiusa.*

**22.7. Dimostrazione del lemma 22.6.** Dividiamo il quadrante  $Q = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$  del piano  $(x, y)$  in quattro regioni:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x, y) \in Q : x > D/C, y > A/B\}, \\ Q_2 &= \{(x, y) \in Q : x < D/C, y > A/B\}, \\ Q_3 &= \{(x, y) \in Q : x < D/C, y < A/B\}, \\ Q_4 &= \{(x, y) \in Q : x > D/C, y < A/B\}; \end{aligned} \quad (22.7)$$

dalle equazioni (22.1) vediamo che si deve avere

$$\begin{cases} \dot{x} < 0, & \dot{y} > 0, & \text{se } (x, y) \in Q_1, \\ \dot{x} < 0, & \dot{y} < 0, & \text{se } (x, y) \in Q_2, \\ \dot{x} > 0, & \dot{y} < 0, & \text{se } (x, y) \in Q_3, \\ \dot{x} > 0, & \dot{y} > 0, & \text{se } (x, y) \in Q_4. \end{cases} \quad (22.8)$$

come illustrato nella figura 22.1.

Sia  $z_0 = (x_0, y_0) \in Q_1$ , e poniamo  $\varphi(t, z_0) = (x(t), y(t))$ . Si ha per qualche  $\tau > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log x(t) &= A - By(t) \leq A - By_0 \equiv -r < 0, \\ \frac{d}{dt} \log y(t) &= Cx(t) - D \geq Cx_0 - D \equiv s > 0, \end{aligned} \quad (22.9)$$

per  $t \leq \tau$ , dove  $r, s$  sono due costanti strettamente positive. Quindi

$$\frac{D}{C} \leq x(t) \leq x_0 e^{-rt}, \quad \frac{A}{B} \geq y(t) \geq y_0 e^{st}, \quad (22.10)$$

per  $t \leq \tau$ : questo vuol dire che esiste un tempo  $\tau$  finito in cui  $x(t)$  raggiunge il valore  $D/C$ , tale che  $\dot{y}(\tau) = 0$  e  $\dot{x}(\tau) < 0$ , così che  $\varphi(t', z) \in Q_2$  per  $t' > \tau$ . Allo stesso modo

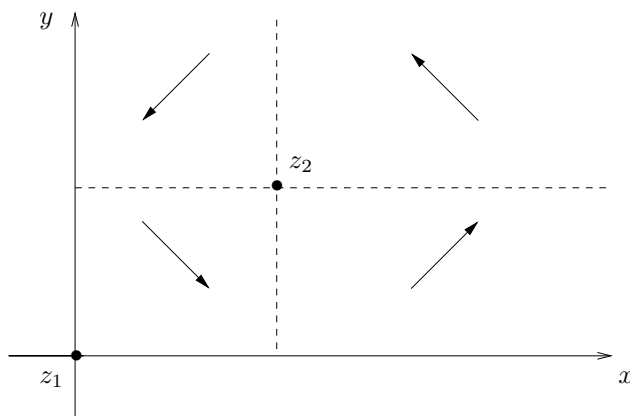


FIGURA 22.1. Divisione del primo quadrante nelle quattro regioni (22.7): in ciascuna regione il campo vettoriale è diretto come schematizzato dalla freccia.

si dimostra che per dati iniziali in  $Q_2, Q_3, Q_4$  la traiettoria passa, rispettivamente, in  $Q_3, Q_4, Q_1$  in un tempo finito. Questo vuol dire che preso un dato iniziale qualsiasi  $z_0$  in  $Q \setminus \{z_2\}$  la traiettoria che si origina passa successivamente da una regione all'altra, girando intorno a  $z$ .

Supponiamo ora per assurdo che la traiettoria non si chiuda. Deve allora succedere che le intersezioni  $P_n, n \in \mathbb{Z}$ , della traiettoria  $\varphi(t, z_0)$  con la semiretta  $x = D/C, y > A/B$ , si dispongono in modo tale che la distanza di  $P_n$  da  $z_2$  sia strettamente crescente o strettamente decrescente in  $n$  (per il lemma 20.5). Quindi la traiettoria deve tendere o a un ciclo limite o a un punto d'equilibrio asintoticamente stabile o all'infinito. Tuttavia dal paragrafo §22.5 segue che la funzione  $H(x, y)$  in (22.6) è una costante del moto, quindi  $H(x(t), y(t)) = H(x(0), y(0))$ . Poiché  $H(x, y)$  tende all'infinito per  $x \rightarrow \infty$  o  $y \rightarrow \infty$  l'ultima possibilità deve essere esclusa. In particolare il moto si deve mantenere in una regione limitata. Quindi  $L_\omega(z_0)$  è compatto e non può contenere i punti d'equilibrio: infatti se fosse  $z_2 \in L_\omega(z_0)$  si dovrebbe avere  $L_\omega(z_0) = \{z_2\}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, z_0) = z_2$  per il lemma 18.17, laddove l'esistenza di punti d'equilibrio asintoticamente stabili deve anche essere esclusa per il teorema 20.30, e non si può avere nemmeno  $z_1 \in L_\omega(z_0)$  poiché la costante del moto  $H(x, y)$  diverge in  $z_1$ . Possiamo perciò applicare il teorema 20.12 e concludere che  $L_\omega(z_0)$  deve essere un'orbita chiusa. D'altra parte, sempre per il teorema 20.30, non possono esistere cicli limite, quindi si deve avere  $z_0 \in L_\omega(z_0)$ . Quindi la traiettoria che si origina da  $z_0 \neq z_2$  deve descrivere un'orbita chiusa e il corrispondente moto deve essere periodico. La situazione è esemplificata nella figura 22.2. ■

**22.8. Leggi di Volterra.** *Valgono le seguenti leggi per il sistema dinamico di preda-*

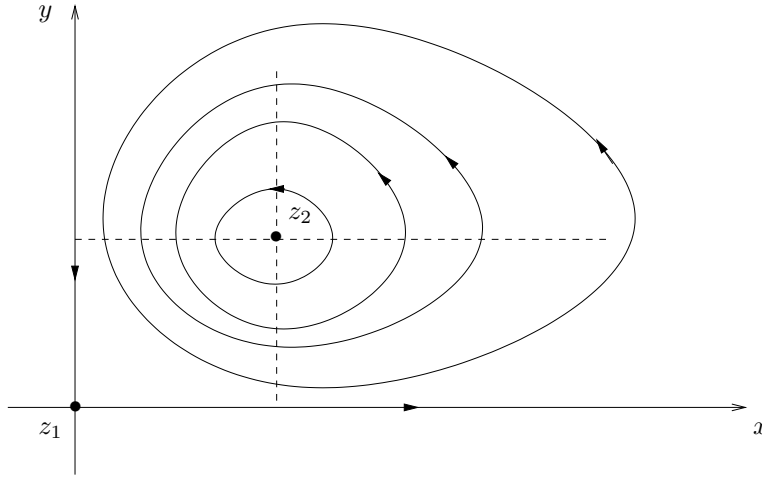


FIGURA 22.2. Alcune orbite per il modello di Lotka-Volterra: tranne che per i due punti d'equilibrio  $z_1$  e  $z_2$ , e per le due semirette lungo gli assi coordinati, tutte le altre orbite sono chiuse, e corrispondono a traiettorie periodiche.

tori e prede descritto dalle equazioni (22.1).

(1) Le popolazioni seguono un ciclo periodico per ogni dato iniziale che non sia l'equilibrio e in cui il numero di prede e il numero di predatori siano entrambi strettamente positivi.

(2) Il numero medio (su un ciclo) di predatori e quello di prede non dipendono dal dato iniziale e coincidono quindi con i rispettivi valori d'equilibrio.

(3) Se si introduce una perturbazione che elimina predatori e prede in maniera proporzionale al loro numero (e.g. la caccia dell'uomo) il numero medio di prede aumenta e il numero medio di predatori diminuisce.

**22.9.** Dimostrazione della legge (1) in 22.8. È un corollario del lemma 22.6. ■

**22.10.** Dimostrazione della legge (2) in 22.8. Sia  $T$  il periodo di una traiettoria periodica con dato iniziale  $z_0 = (x_0, y_0)$ . Dalle equazioni (22.1) possiamo leggere che

$$\begin{cases} \dot{x}/x = (A - By), \\ \dot{y}/y = (Cx - D), \end{cases} \quad (22.11)$$

e quindi integrando da 0 a  $t$  otteniamo

$$\begin{cases} \log x(t) - \log x_0 = At - B \int_0^t ds y(s), \\ \log y(t) - \log y_0 = -Dt + C \int_0^t ds x(s). \end{cases} \quad (22.12)$$

dove  $(x(t), y(t)) = \varphi(t, z_0)$ . Definiamo il numero medio (sul ciclo considerato) di



predatori e di prede, rispettivamente, come

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T ds x(s), \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T ds y(s), \quad (22.13)$$

La (22.12) con  $t = T$  dà quindi

$$\bar{x} = \frac{D}{C}, \quad \bar{y} = \frac{A}{B}, \quad (22.14)$$

che non dipende dalla particolare orbita considerata; inoltre  $(\bar{x}, \bar{y}) = z_2$ . ■

**22.11.** *Dimostrazione della legge (3) in 22.8.* Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x - \varepsilon_1 x, \\ \dot{y} = (Cx - D)y - \varepsilon_2 y, \end{cases} \quad (22.15)$$

con  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ . Ragionando come nel paragrafo §22.10 troviamo

$$\bar{x} = \frac{D + \varepsilon_2}{C} > \frac{D}{C}, \quad \bar{y} = \frac{A - \varepsilon_1}{B} < \frac{A}{B}, \quad (22.16)$$

che dimostra la legge (3). ■

## 23. Il pendolo matematico

**23.1. Introduzione.** Nelle sezioni precedenti abbiamo visto alcuni teoremi generali utili nello studio del comportamento qualitativo di sistemi dinamici, in particolare nella discussione della stabilità dei punti d'equilibrio, nella stima di bacini d'attrazione di punti d'equilibrio asintoticamente stabili, nello studio delle curve di livello di sistemi che ammettono costanti del moto e altro.

Vogliamo ora discutere, con un certo dettaglio, un caso esplicito in cui applicare concretamente i risultati teorici precedentemente illustrati: il *pendolo* (più propriamente il *pendolo matematico* o *pendolo semplice*) con o senza *attrito*.

Le equazioni del moto del pendolo (matematico) di lunghezza  $\ell$  e massa  $m$  sono

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - m\alpha\dot{\theta}, \quad (23.1)$$

dove  $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (i.e.  $\theta$  è definito mod  $2\pi$ ),  $g > 0$  è la costante di gravità e  $\alpha \geq 0$  è il coefficiente di attrito. Per semplicità poniamo  $g = 1$ ,  $\ell = 1$  e  $m = 1$ .

**23.2. Sistema dinamico associato.** Possiamo riscrivere (23.1) nella forma di un sistema dinamico planare (20.1):

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y, \\ \dot{y} = -\sin \theta - \alpha y, \end{cases} \quad (23.2)$$

con  $(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ . Il sistema dinamico (23.2) è il sistema dinamico associato al modello (23.1).

**23.3.** *Pendolo senza attrito: costante del moto.* Studiamo preliminarmente il caso  $\alpha = 0$  (pendolo senza attrito):

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y, \\ \dot{y} = -\sin \theta. \end{cases} \quad (23.3)$$

In tal caso la funzione

$$H(\theta, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos \theta), \quad (23.4)$$

che rappresenta l'energia del sistema (data dalla somma dell'energia cinetica  $T = y^2/2$  e dell'energia potenziale  $U = 1 - \cos \theta$ ) è una costante del moto: infatti si ha, come è immediato verificare,

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad (23.5)$$

così che  $\dot{H} = 0$  (cfr. la (20.23)). Questo vuol dire, che fissato un dato iniziale  $(\bar{\theta}, \bar{y}) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , si ha

$$H(\theta(t), y(t)) = H(\bar{\theta}, \bar{y}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (23.6)$$

se  $(\theta(t), y(t))$  è la soluzione del sistema (23.3) con dato iniziale  $(\bar{\theta}, \bar{y})$ .

Chiameremo punti critici di  $H$  i punti in cui si annullano le sue derivate prime e valori critici i valori che  $H$  assume in corrispondenza dei suoi punti critici. Per la (23.5) possiamo concludere che i punti critici di  $H$  sono i punti in cui si annulla il campo vettoriale.

**23.4.** *Punti d'equilibrio. Parte I.* Abbiamo visto che i punti d'equilibrio del sistema (23.3) sono i punti in cui si annulla il campo vettoriale. Si hanno quindi due punti d'equilibrio:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (\pi, 0), \quad (23.7)$$

tenendo conto delle condizioni periodiche al contorno (*i.e.* del fatto che  $\theta$  è definito mod  $2\pi$ , così che, in particolare, il punto  $(-\pi, 0)$  è identificato con  $(\pi, 0)$ ). Il sistema linearizzato nell'intorno di un punto d'equilibrio  $x_0 = (\theta_0, y_0)$ , con  $\sin \theta_0 = 0$ , è dato da

$$\dot{x} = A(x_0)(x - x_0), \quad x = (\theta, y), \quad (23.8)$$

dove

$$A(x_0) \equiv A(\theta_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23.9)$$

Quindi in corrispondenza del punto d'equilibrio  $P_1$  si ha

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23.10)$$

che ammette autovalori  $\lambda = \pm i$ , mentre in corrispondenza del punto d'equilibrio  $P_2$  si ha

$$A(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23.11)$$

che ammette autovalori  $\lambda = \pm 1$ .

Per il teorema 17.13 possiamo concludere che il punto d'equilibrio  $P_2$  è un punto d'equilibrio instabile, mentre nessuna informazione possiamo trarre sul punto d'equilibrio  $P_1$  attraverso l'analisi del sistema linearizzato.

Rimandiamo al paragrafo §23.6 la discussione della stabilità del punto d'equilibrio  $P_1$ .

**23.5. Curve di livello. Parte I.** Sia

$$\Gamma_E = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : H(\theta, y) = E\} \quad (23.12)$$

la curva di livello che corrisponde all'energia  $E$ .

In generale curve di livello particolarmente significative per un sistema dinamico che ammette una costante del moto  $H$  sono quelle che corrispondono ai valori critici di  $H$ .

Si ha

$$H(P_1) = H(0, 0) = 0, \quad H(P_2) = H(\pi, 0) = 2. \quad (23.13)$$

Innanzitutto notiamo che deve essere  $E \geq 0$  poiché  $y^2 \geq 0$  e  $1 - \cos \theta \geq 0$ : inoltre il valore  $E = 0$  è assunto solo in corrispondenza del punto  $(\theta, y) = (0, 0)$ .

Possiamo graficare le curve di livello nel piano  $(\theta, y)$ , con  $|\theta| \leq \pi$ , utilizzando la (23.12) per esprimere  $y$  in funzione di  $\theta$ . Otteniamo dunque

$$y = \pm \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}, \quad (23.14)$$

dove  $E \geq 0$  ha il ruolo di parametro.

Dalla (23.14) si vede che è sufficiente studiare la determinazione positiva della radice quadrata: una volta nota la curva (23.14) che corrisponde al semipiano superiore, da essa si può ottenere la curva che corrisponde al semipiano inferiore per semplice riflessione rispetto all'asse delle ascisse.

La derivata prima della (23.14), per  $y > 0$ , è data da

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{-\sin \theta}{\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}}, \quad (23.15)$$

e ha quindi il segno di  $-\sin \theta$ : quindi la curva  $y = y(\theta)$  sarà crescente per  $-\pi \leq \theta \leq 0$  e decrescente per  $0 \leq \theta \leq \pi$  e raggiungerà il valore massimo in  $\theta = 0$ .

Per quanto detto sopra la curva di livello  $\Gamma_0$  contiene il solo punto d'equilibrio  $P_1$ .

La curva di livello  $\Gamma_2$ , per  $y \geq 0$ , è definita dall'equazione

$$y = y(\theta) = \sqrt{2(1 + \cos \theta)}, \quad (23.16)$$

che si annulla solo per  $\theta = \pm\pi$ : quindi vale  $y = 0$  in  $\theta = -\pi$ , è crescente per  $-\pi \leq \theta \leq 0$  fino a raggiungere il valore massimo in  $\theta = 0$ , dato da  $y(0) = 2$ , ed è decrescente per  $0 \leq \theta \leq \pi$ , fino a raggiungere nuovamente il valore  $y = 0$  in  $\theta = \pi$ .

La tangente in  $\theta = 0$  vale 0, mentre in  $\theta = \pm\pi$  vale  $\pm 1$ , come si può ricavare dalla (23.15); si ha infatti

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\pi} &= \lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} \frac{-\sin \theta}{\sqrt{2(1+\cos \theta)}} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} \frac{-\sin \theta}{2 \cos(\theta/2)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} \frac{\mp \sin \pi - \cos \pi (\theta \mp \pi) + O(\theta \mp \pi)^2}{2 \cos(\pi/2) \mp \sin(\pi/2) (\theta \mp \pi) + O(\theta \mp \pi)^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} \frac{(\theta \mp \pi) + O(\theta \mp \pi)^2}{\mp (\theta \mp \pi) + O(\theta \mp \pi)^2} = \mp 1. \end{aligned} \quad (23.17)$$

Che la tangente in  $\theta = 0$  valga 0, oltre che per calcolo diretto, si può vedere anche dal fatto che la curva  $y = y(\theta)$  deve essere regolare e simmetrica per riflessione rispetto all'asse delle ordinate (poiché è pari in  $\theta$ ).

Analogamente si ottiene la determinazione negativa di  $y = y(\theta)$ , *i.e.*

$$y = y(\theta) = -\sqrt{2(1+\cos \theta)}, \quad (23.18)$$

per  $E = 2$ : sarà una curva che decresce da  $y(-\pi) = 0$  verso il valore  $y(0) = -2$ , per poi ricrescere fino a raggiungere il valore  $y(\pi) = 0$ .

In conclusione la curva di livello  $\Gamma_2$  contiene tre orbite: il punto d'equilibrio  $P_2$ , la curva  $\mathcal{C}_1$  descritta dalla (23.16) e la curva  $\mathcal{C}_2$  descritta dalla (23.18), che si ottiene dalla curva  $\mathcal{C}_1$  per riflessione rispetto all'asse delle ascisse.

Per determinare il verso di percorrenza delle orbite basta notare che deve essere  $\dot{\theta} = y$ : quindi  $\theta$  è una funzione crescente di  $t$  per  $y > 0$  e decrescente per  $y < 0$ . Di conseguenza il moto lungo la curva  $\mathcal{C}_1$  avviene verso destra, mentre il moto lungo la curva  $\mathcal{C}_2$  avviene verso sinistra.

Il moto su ciascuna delle due curve è un moto asintotico, *i.e.* è un moto che tende al punto d'equilibrio  $P_2$  in un tempo infinito. Infatti, *e.g.* scelto un dato iniziale  $\bar{x} = (\bar{\theta}, \bar{y}) \in \mathcal{C}_1$ , si ha

$$\dot{\theta} = \sqrt{2(1+\cos \theta)}, \quad (23.19)$$

da cui si ottiene

$$\int_{\bar{\theta}}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1+\cos \theta)}} = t, \quad (23.20)$$

che mostra che  $\theta(t)$  è definito per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) = \pm\pi. \quad (23.21)$$

**23.6. Punti d'equilibrio. Parte II.** Poiché la funzione  $H$  assume valore  $H = 2$  solo lungo la curva di livello  $\Gamma_2$  e  $H(P_1) = 0$ , per continuità si deve avere  $0 < H(\theta, y) < 2$

per ogni  $(\theta, y)$  appartenente alla regione racchiusa  $U$  dalla curva di livello  $\Gamma_2$ : per il teorema di Weierstrass (cfr. la nota bibliografica) la funzione  $H|_{\overline{U}}$  ammette massimo e minimo in  $\overline{U}$ . Poiché l'unico punto critico interno è  $P_1$ , i punti di massimo e di minimo vanno cercati in  $P_1$  e sulla frontiera  $\partial U$ : ma sulla frontiera la funzione vale  $H = 2$  e in  $P_1$  si ha  $H(P_1) = 0$ . Quindi  $P_1$  è un punto di minimo. Questo poteva anche essere verificato calcolando esplicitamente la matrice hessiana  $\mathcal{H}(\theta, y)$  della funzione  $H$  in  $P_1$ ,

$$\mathcal{H}(P_1) = \begin{pmatrix} H_{\theta\theta}(P_1) & H_{\theta y}(P_1) \\ H_{y\theta}(P_1) & H_{yy}(P_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (23.22)$$

così che risulta  $\det \mathcal{H}(P_1) = 1$  e  $H_{\theta\theta} = 1$ , quindi  $P_1$  è un minimo.

Possiamo allora definire la funzione di Ljapunov

$$W(\theta, y) = H(\theta, y) - H(0, 0) = H(\theta, y), \quad (23.23)$$

e applicare il teorema 18.20 per concludere che il punto  $P_1$  è un punto d'equilibrio stabile.

**23.7. Curve di livello. Parte II.** Studiamo ora le curve di livello per altri valori di  $E$ . Consideriamo la regione  $U$  definita nel paragrafo §23.6: per il teorema 20.36 possiamo concludere che tutte le orbite contenute in  $U \setminus \{P_1\}$  sono chiuse e contengono  $P_1$  al loro interno.

Altrimenti la stessa conclusione può essere ottenuta per calcolo esplicito studiando le curve (23.14) per  $0 < E < 2$ .

Si vede (al solito consideriamo  $y \geq 0$ ) che esiste  $\theta_0 \in (0, \pi)$  tale che

$$y = \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)} \quad (23.24)$$

si annulla per  $\theta = \pm\theta_0$  e la derivata in tali punti vale

$$\left. \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\theta_0} = \frac{-\sin \theta_0}{\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta_0)}} = \pm\infty \quad (23.25)$$

poiché il denominatore si annulla, mentre il numeratore ha valore finito. Disegnando anche il tratto  $y < 0$  della curva si ottiene quindi una curva chiusa regolare che interseca l'asse delle ascisse nei due punti  $\pm\theta_0$ : ovviamente tale curva è simmetrica sia per riflessione rispetto all'asse delle ascisse sia per riflessione rispetto all'asse delle ordinate. Tali orbite descrivono un moto oscillatorio del pendolo.

**23.8. Curve di livello. Parte III.** Analogamente a quanto fatto nel paragrafo §23.7 si possono analizzare le curve di livello che corrispondono a valori di energia  $E > 2$ . In tal caso  $y(\pm\pi) > 0$  e la derivata (23.15), calcolata a  $\theta = \pm\pi$  vale  $dy/d\theta(\pm\pi) = 0$ , poiché il denominatore non si annulla mai, mentre  $\sin \pm\pi = 0$ . Si tratta quindi di curve regolari chiuse (si tenga conto delle condizioni periodiche al contorno!) che descrivono moti di rotazione completa del pendolo.

Notiamo che in questo caso il teorema 20.36 non è immediatamente applicabile. Tuttavia si può ragionare analogamente a quanto fatto nel paragrafo §20.37 per concludere che le orbite sono chiuse. Infatti  $H(\theta, y)$  tende all'infinito per  $y \rightarrow \pm\infty$ , quindi, fissato un valore  $E$  tale che  $H(\theta(t), y(t)) = E$ , il moto si deve svolgere in una regione limitata  $A$ . Quindi la traiettoria è sempre contenuta nella regione compatta  $\bar{A}$ : per  $\bar{x} = (\bar{\theta}, \bar{y}) \in \Gamma_E$ , si deve quindi avere  $L_\omega(\bar{x}) \neq \emptyset$ , per il lemma 18.2. D'altra parte  $L_\omega(\bar{x})$  è compatto e non può contenere punti d'equilibrio: infatti gli unici punti d'equilibrio del sistema sono  $P_1$  e  $P_2$ , che si trovano su curve di livello  $\Gamma_{E'}$ , con  $E' \neq E$  (poiché  $E' = 0, 2$  mentre  $E > 2$ ): per il teorema 20.12 allora  $L_\omega(\bar{x})$  deve essere un'orbita chiusa: essa deve svolgersi intorno al toro (*i.e.* deve andare da  $\theta = -\pi$  a  $\theta = \pi$ ), perché altrimenti sarebbe un'orbita chiusa non contenente alcun punto d'equilibrio (contro il teorema 20.30).

La situazione è rappresentata nella figura 23.1.

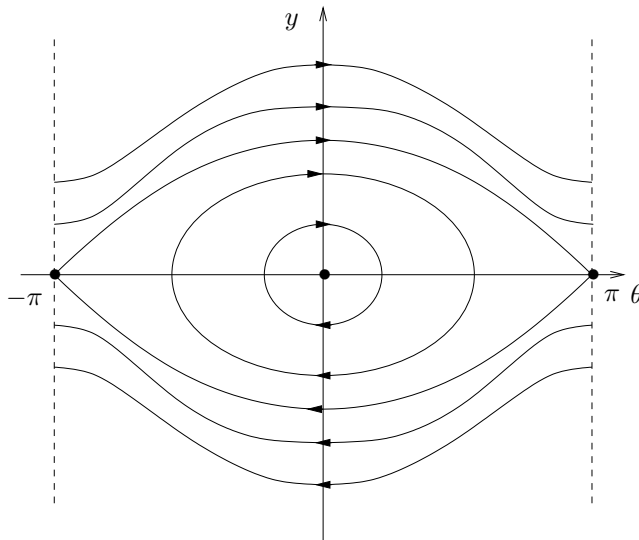


FIGURA 23.1. Alcune curve di livello e orbite significative per il pendolo senza attrito: le due separatrici separano le orbite che corrispondono a moti oscillatori dalle orbite che corrispondono a moti di rotazione.

**23.9. Traiettorie periodiche.** Dall'analisi precedente possiamo concludere che tutte le curve di livello che corrispondono a valori  $E \in \mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$ , *i.e.* per tutti i valori  $E > 0$  escluso  $E = 2$ , costituiscono il supporto di traiettorie periodiche.

Possiamo quindi calcolarne il periodo o, almeno, esprimere il periodo come integrale definito.

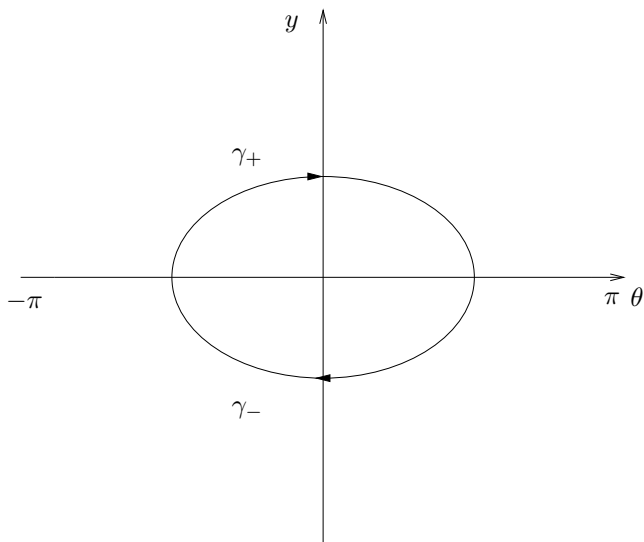


FIGURA 23.2. Orbita chiusa con energia  $E < 2$ .

Consideriamo prima il caso di una orbita chiusa  $\gamma$  che rappresenti una curva di livello  $\Gamma_E$ , con  $0 < E < 2$ ; cfr. la figura 23.2.

Indichiamo con  $(\theta_1, 0)$  e  $(\theta_2, 0)$  i due punti in cui la curva  $\gamma$  interseca l'asse  $y = 0$ ; per le proprietà di parità precedentemente notate si ha ovviamente  $\theta_1 = -\theta_2 = \theta_0$  (cfr. la (23.24)).

Dalla (23.19) possiamo concludere che si ha  $y = y_+(\theta) = \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}$  quando  $y \geq 0$  e  $y = y_-(\theta) = -\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}$  quando  $y \leq 0$ . Scriviamo allora

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_+ \cup \gamma_-, \\ \gamma_+ &= \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : \theta \in [\theta_1, \theta_2], y = y_+(\theta)\}, \\ \gamma_- &= \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : \theta \in [\theta_1, \theta_2], y = y_-(\theta)\}. \end{aligned} \tag{23.26}$$

La prima delle (23.3) dà quindi

$$\dot{\theta} = y_+(\theta) = \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)} \tag{23.27}$$

lungo l'arco di curva  $\gamma_+$  e

$$\dot{\theta} = y_-(\theta) = -\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)} \tag{23.28}$$

lungo l'arco di curva  $\gamma_-$ .

Scelto il dato iniziale  $(\bar{\theta}, \bar{y}) \in \gamma$ , se  $(\theta(t), y(t))$  indica il punto raggiunto dalla traiettoria con dato iniziale  $(\bar{\theta}, \bar{y})$  al tempo  $t$  e  $T$  è il periodo della traiettoria, si ha ovviamente

$$(\theta(T), y(T)) = (\bar{\theta}, \bar{y}), \quad (23.29)$$

poiché, per definizione di periodo,  $T$  è il tempo necessario per ritornare nel punto che costituisce il dato iniziale. Tale relazione non dipende dal particolare dato iniziale scelto. Se infatti si fosse scelto un diverso dato iniziale  $(\bar{\theta}', \bar{y}') \in \gamma$  e avessimo definito

- (1)  $T'$  come il tempo necessario per ritornare in  $(\bar{\theta}', \bar{y}')$ ,
- (2)  $t$  come il tempo necessario per andare da  $(\bar{\theta}, \bar{y})$  a  $(\bar{\theta}', \bar{y}')$  e
- (3)  $t'$  come il tempo necessario per andare da  $(\bar{\theta}', \bar{y}')$  a  $(\bar{\theta}, \bar{y})$ ,

si avrebbe avuto  $T = t + t'$  e  $T' = t' + t$ : quindi  $T' = T$ .

In particolare il periodo  $T$  è dato da  $T = T_1 + T_2$ , se  $T_1$  rappresenta il tempo per andare da  $(\theta_1, 0)$  a  $(\theta_2, 0)$  lungo l'arco  $\gamma_+$  della curva  $\gamma$  e  $T_2$  rappresenta il tempo per andare da  $(\theta_2, 0)$  a  $(\theta_1, 0)$  lungo l'arco  $\gamma_-$  della curva  $\gamma$ .

Quindi

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^{T_1} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{y_+(\theta)}, \\ T_2 &= \int_0^{T_2} dt = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{d\theta}{y_-(\theta)}, \end{aligned} \quad (23.30)$$

come si ricava dalle (23.27) e (23.28).

Si vede subito dalla (23.30), utilizzando il fatto che  $y_+(\theta) = -y_-(\theta)$ , che si ha

$$T_1 = T_2 = \frac{T}{2}, \quad (23.31)$$

così che possiamo concludere che

$$T = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{y_+(\theta)} = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}}. \quad (23.32)$$

D'altra parte  $\theta_2 = \theta_0$ , dove  $\theta_0$  è la radice positiva dell'equazione

$$E - 1 + \cos \theta_0 = 0, \quad (23.33)$$

*i.e.* è dato da

$$\theta_0 = \arccos(1 - E), \quad (23.34)$$

che effettivamente, per  $0 < E < 2$  (così che  $-1 < 1 - E < 1$ ), è un angolo compreso tra 0 e  $\pi$ . In conclusione

$$T = 2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}}, \quad \theta_0 = \arccos(1 - E). \quad (23.35)$$



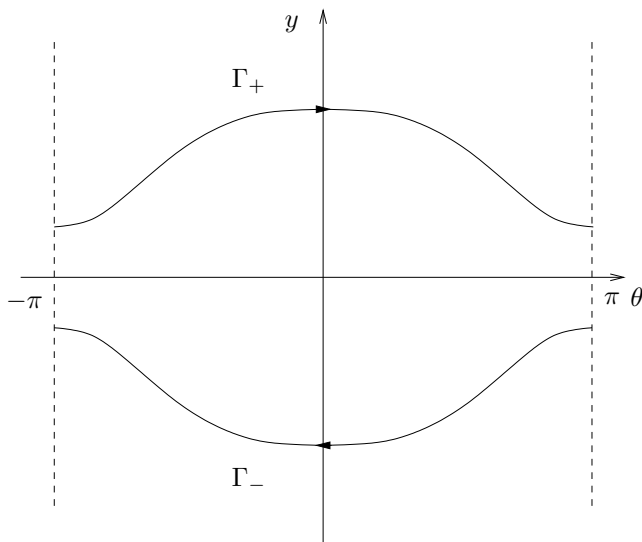


FIGURA 23.3. Orbite chiuse con energia  $E > 2$ .

Se invece consideriamo una curva di livello  $\Gamma_E$ , con  $E > 2$ , essa comprenderà due curve sconnesse  $\Gamma_+$  e  $\Gamma_-$ , che rappresentano due orbite chiuse distinte; cfr, la figura 23.3.

Di nuovo per parità esse avranno lo stesso periodo: è quindi sufficiente considerarne una, *e.g.* quella descritta dall'equazione

$$y = y(\theta) = \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}. \quad (23.36)$$

In questo caso il periodo è dato dal tempo necessario per andare dal punto  $(-\pi, y(-\pi))$  al punto  $(\pi, y(\pi))$  (che rappresentano lo stesso punto, per le condizioni periodiche al contorno).

Quindi

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{y(\theta)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}}. \quad (23.37)$$

**23.10. Pendolo con attrito.** Studiamo ora il caso  $\alpha > 0$ . In tal caso la funzione (23.3) non è più una costante del moto. I punti d'equilibrio sono sempre dati da  $P_1$  e  $P_2$  in (23.7), come è immediato verificare. Il sistema linearizzato nell'intorno di un punto d'equilibrio  $(\theta_0, y_0)$ , con  $\sin \theta_0 = 0$ , è in tal caso dato dalla (23.8), con

$$A(x_0) \equiv A(\theta_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta_0 & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (23.38)$$

Quindi in corrispondenza del punto d'equilibrio  $P_1$  si ha

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (23.39)$$

che ammette autovalori

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}, \quad (23.40)$$

mentre in corrispondenza del punto d'equilibrio  $P_2$  si ha

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (23.41)$$

che ammette autovalori

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1}, \quad (23.42)$$

così che si vede che nel caso (23.40) entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa, mentre nel caso (23.42) uno dei due autovalori ha parte reale positiva. Quindi per il teorema 17.9 il punto  $P_1$  è asintoticamente stabile, mentre per il teorema 17.13 il punto  $P_2$  è instabile.

**23.11. Stima del bacino d'attrazione.** Possiamo utilizzare il teorema 18.27 per dare una stima del bacino d'attrazione di  $P_1$ .

Consideriamo la curva  $\mathcal{C}$  corrispondente a una curva di livello  $\Gamma_E$ , con  $0 < E < 2$ , del sistema (23.3) che descrive il pendolo senza attrito. Ovviamente  $\mathcal{C}$  non è una curva che contenga orbite per il sistema (23.2)

Sia  $U$  la regione racchiusa dalla curva  $\mathcal{C}$  e sia  $P \equiv \bar{U}$ .

Notiamo innanzitutto che si ha, lungo le traiettorie,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = -\alpha y^2, \quad (23.43)$$

così che la funzione  $W = H$  verifica le proprietà (1) e (2) del teorema di Poincaré-Bendixson 18.27

Vogliamo dimostrare che  $P$  verifica le tre condizioni (3) del teorema 18.27.

La condizione (3.1) è ovviamente soddisfatta poiché  $x_0 \in P$  per costruzione.

Per dimostrare che  $P$  è positivamente invariante, *i.e.* la proprietà (3.2), è sufficiente far vedere che, sulla frontiera di  $P$ , *i.e.* su  $\mathcal{C}$ , il campo vettoriale è diretto verso l'interno. Il campo vettoriale del sistema dinamico (23.2) è definito dalla funzione

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x) + f_1(x), \\ f_0(x) &= (y, -\sin \theta), \\ f_1(x) &= (0, -\alpha y), \end{aligned} \quad (23.44)$$

*i.e.* si può vedere come somma di due campi vettoriali, di cui  $f_0(x)$  descrive il sistema dinamico (23.3), mentre  $f_1(x)$  tiene conto del termine di attrito. Il campo vettoriale  $f_0(x)$  è tangente a  $\mathcal{C}$  in ogni suo punto: infatti per costruzione  $\mathcal{C}$  è una curva di livello del sistema dinamico corrispondente al campo vettoriale  $f_0(x)$ , *i.e.*  $\dot{x} = f_0(x)$ , e quindi la sua tangente, data da  $\dot{x}$ , è in ogni suo punto diretta lungo il campo vettoriale  $f_0(x)$ . D'altra parte il campo vettoriale  $f_1(x)$  è diretto lungo l'asse delle ordinate e punta verso il basso se  $y > 0$  e verso l'alto se  $y < 0$  (e si annulla sui punti  $y = 0$  di  $\mathcal{C}$ ): quindi  $f_1(x)$  spinge verso l'interno della regione  $U$ . Ne segue che il campo vettoriale risultante (23.32) è diretto verso l'interno di  $U$ .

Dimostriamo ora che è verificata anche la proprietà (3.3). Poiché  $\dot{W} = \dot{H}$  è data dalla (23.43) si ha  $\dot{W} = 0$  solo se  $y = 0$ . Basta dunque dimostrare che non esistono traiettorie interamente contenute nell'insieme

$$\mathcal{S} = \{(\theta, y) \in U : y = 0, \theta \neq 0\}; \quad (23.45)$$

questo infatti implica che non esisteranno traiettorie in  $P \setminus \{(0, 0)\}$  tali che  $\dot{W}(z) = 0$  per ogni  $z$  lungo la traiettoria. Basterà allora dimostrare che per ogni punto  $x \in \mathcal{S}$  il campo vettoriale (23.44) non è diretto lungo l'asse delle ascisse, così che, se a un certo istante  $t_1$  la traiettoria passa per  $\mathcal{S}$ , allora per i tempi  $t > t_1$  immediatamente successivi essa dovrà abbandonare  $\mathcal{S}$ .

Poiché per ogni punto  $(\theta, y) \in \mathcal{S}$  si ha  $f(\theta, y) = (0, -\sin \theta)$  si vede che il campo vettoriale è sempre diretto ortogonalmente a  $\mathcal{S}$ : infatti  $\sin \theta = 0$  solo per  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , ma entrambi i punti  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$  non sono contenuti in  $\mathcal{S}$ . Questo completa la dimostrazione.

Si noti che il discorso si può applicare a qualsiasi curva  $\mathcal{C}$  che corrisponda a una curva di livello  $\Gamma_E$ , con  $0 < E < 2$ : la regione  $U$  racchiusa da una qualsiasi di tali curve costituisce una stima del bacino d'attrazione del punto  $P_1$ .

## 24. Un altro esempio di analisi qualitativa di un sistema planare

**24.1.** Discutiamo in dettaglio un secondo esempio di sistema planare, che, per quanto fisicamente meno interessante del pendolo matematico visto al paragrafo precedente, può essere considerato tuttavia un utile paradigma per gli esercizi più avanti.

**24.2. ESEMPIO.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) + 4y^2(x^2 + y^2 - 2), \\ \dot{y} = -4xy(x^2 + y^2 - 2). \end{cases} \quad (24.1)$$

(1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) \quad (24.2)$$

è una costante del moto.

(2) Determinare i punti d'equilibrio.

(3) Analizzare le curve di livello di  $H(x, y)$  nel piano: determinarne qualitativamente la forma e discuterne il verso di percorrenza.

(4) Discutere la stabilità dei punti d'equilibrio.

(5) Risolvere esplicitamente le equazioni del moto, i.e. trovare la soluzione  $(x(t), y(t))$ , in corrispondenza del dato iniziale  $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ .

**24.3.** *Costante del moto.* Si verifica facilmente che

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= 4xy(x^2 + y^2 - 2), \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) + 4y^2(x^2 + y^2 - 2); \end{aligned} \quad (24.3)$$

quindi

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = 0, \quad (24.4)$$

i.e.  $H(x, y)$  è effettivamente una costante del moto.

**24.4.** *Punti d'equilibrio.* Cercando i valori  $(x, y)$  in corrispondenza dei quali si annullano entrambe le componenti del campo vettoriale che definisce il sistema dinamico (24.1), si trovano i seguenti punti d'equilibrio:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(0, \sqrt{\frac{6 + \sqrt{21}}{5}}\right), & P_2 &= \left(0, \sqrt{\frac{6 - \sqrt{21}}{5}}\right), \\ P_3 &= \left(0, -\sqrt{\frac{6 - \sqrt{21}}{5}}\right), & P_4 &= \left(0, -\sqrt{\frac{6 + \sqrt{21}}{5}}\right), \\ P_5 &= (\sqrt{3}, 0), & P_6 &= (1, 0), & P_7 &= (-1, 0), & P_8 &= (-\sqrt{3}, 0). \end{aligned} \quad (24.5)$$

**24.5.** *Curve di livello.* Le curve di livello sono le curve

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}. \quad (24.6)$$

Si vede subito che per  $E = 0$  si ha

$$\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3, \quad (24.7)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Sulla curva  $\mathcal{C}_3$  si ha  $\dot{y} = 0$ , mentre

$$\begin{cases} \dot{x} > 0, & \text{se } |x| < 1 \text{ o } |x| > 3, \\ \dot{x} < 0, & \text{se } 1 < |x| < 3, \end{cases} \quad (24.9)$$

Sulla curva  $\mathcal{C}_1$  si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y^2 < 0, \\ \dot{y} = 4xy, \end{cases} \quad (24.10)$$

mentre sulla curva  $\mathcal{C}_2$  si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^2 > 0, \\ \dot{y} = -4xy, \end{cases} \quad (24.11)$$

così che sulla curva  $\mathcal{C}_1$  ci si muove da sinistra a destra nel semipiano  $y > 0$  e da destra a sinistra nel semipiano  $y < 0$ ; allo stesso modo sulla curva  $\mathcal{C}_2$  ci si muove da sinistra a destra nel semipiano  $y < 0$  e da destra a sinistra nel semipiano  $y > 0$ . Cfr. la figura 24.1.

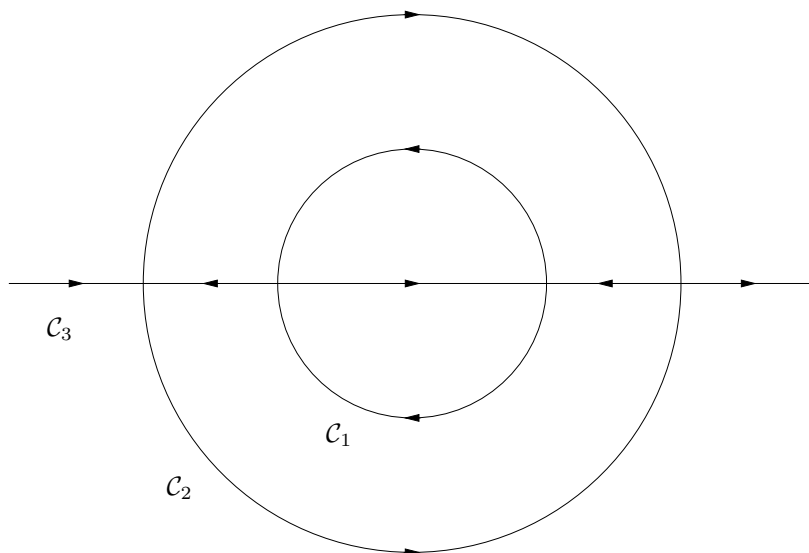


FIGURA 24.1. Orbite contenute nelle curve di livello  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$ , con i rispettivi versi di percorrenza, per il sistema (24.1)

Le altre curve di livello sono come rappresentate nella figura 24.2; i versi di percorrenza si ottengono per continuità, tenendo conto dei versi di percorrenza sulla curva di livello  $\Gamma_0$ .

Si noti che  $H(x, y) = E$  si può scrivere, per  $y \neq 0$ , come

$$x^4 + 2(y^2 - 2)x^2 + (y^2 - 1)(y^2 - 3) - \frac{E}{y} = 0, \quad (24.12)$$

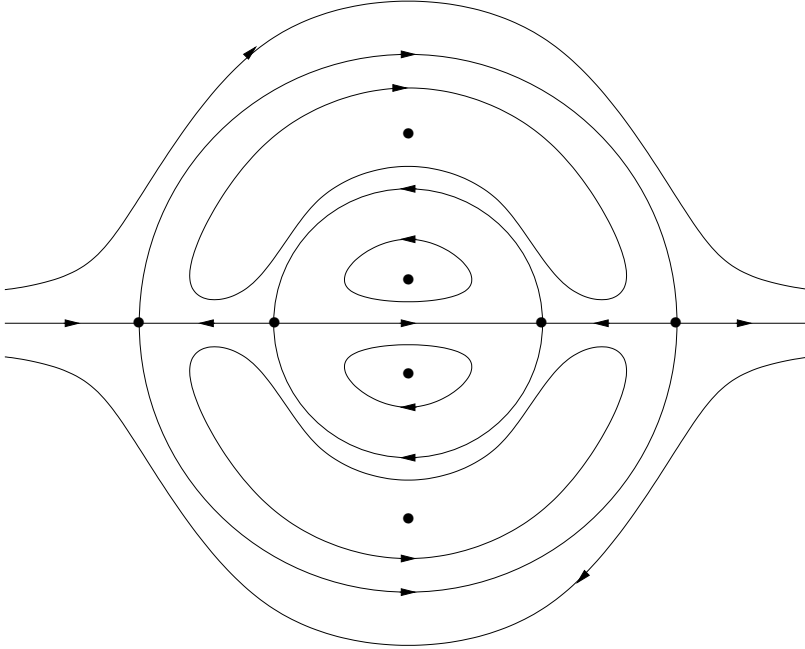


FIGURA 24.2. Alcune curve di livello e orbite significative, con i rispettivi versi di percorrenza, per il sistema (24.1). In particolare sono indicati gli 8 punti d'equilibrio (24.5).

che, risolta, dà

$$\begin{aligned} x^2 &= -(y^2 - 2) \pm \sqrt{(y^2 - 2)^2 - (y^2 - 1)(y^2 - 3) + \frac{E}{y}}, \\ &= (2 - y^2) \pm \sqrt{1 + \frac{E}{y}}. \end{aligned} \quad (24.13)$$

In particolare se  $E = 0$  ritroviamo  $x^2 + y^2 = 2 \pm 1$ . In generale si ha quindi

$$x = \pm \sqrt{2 - y^2 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{y}}}. \quad (24.14)$$

Poiché

$$H(x, y) = H(-x, y) = -H(x, -y), \quad (24.15)$$

è sufficiente studiare le curve di livello nel quadrante  $x \geq 0, y \geq 0$ , *i.e.*

$$x_{\pm} = \sqrt{2 - y^2 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{y}}}, \quad y \geq 0. \quad (24.16)$$

Si può allora studiare  $x = x(y)$ , e si trova la situazione rappresentata in figura 24.2. Per esempio, se si fissa  $E > 0$  e si prende la determinazione  $x_+$ , si ha

$$\frac{dx_+}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{2-y^2 \pm \sqrt{1+\frac{E}{y}}}} \left( 2y + \frac{E}{y^2\sqrt{1+\frac{E}{y}}} \right) < 0, \quad (24.17)$$

quindi  $x_+$  è una funzione decrescente in  $y$ : si ha  $x_+ \rightarrow \infty$  per  $y \rightarrow 0$ , quindi per  $y$  che cresce  $x$  aumenta fino a raggiungere il valore massimo  $x_+(0)$ . E così via per gli altri casi.

**24.6. Studio della stabilità dei punti d'equilibrio.** I punti d'equilibrio  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  sono stabili, come è facile verificare applicando il teorema 18.20 (teorema di Ljapunov) nel modo seguente.

Si noti innanzitutto che  $H(x, y)$  è positiva nella regione compresa tra le curve di livello  $\Gamma_0$  e contenente i punti  $P_3$  e  $P_4$ , e negativa nella regione rimanente. Quindi  $P_2$  e  $P_4$  sono punti di massimo, mentre  $P_1$  e  $P_3$  sono punti di minimo.

Per  $P_0 \in \{P_2, P_4\}$ , si può allora scegliere come funzione di Ljapunov

$$W(x, y) = H(P_0) - H(x, y), \quad (24.18)$$

e fissare un intorno sufficientemente piccolo  $B(P_0)$  di  $P_0$ , così che

$$\begin{cases} W(P_0) = 0, \\ W(x, y) - W(0, 0) > 0 & \forall (x, y) \in B(P_0) \setminus P_0, \\ \dot{W}(x, y) \equiv 0, \end{cases} \quad (24.19)$$

poiché  $P_0$  è un punto di massimo per la funzione  $W(x, y)$  nel dominio  $\overline{B(P_0)}$  e  $W(x, y)$  è una costante del moto.

Analogamente si ragiona per  $P_0 \in \{P_1, P_3\}$ , prendendo come funzione di Ljapunov

$$W(x, y) = H(x, y) - H(P_0). \quad (24.20)$$

Per quanto riguarda i punti  $P_5, P_6, P_7$  e  $P_8$ , essi sono tutti instabili, come si può facilmente dimostrare utilizzando i risultati del punto precedente, in particolare i versi di percorrenza dei rami della curva di livello  $\Gamma_0$  passanti per tali punti d'equilibrio: infatti se vede che ogni intorno di tali punti d'equilibrio, per quanto piccolo, contiene dati iniziali le cui traiettorie escono in un tempo finito dall'intorno.

Alternativamente si può linearizzare il sistema nell'intorno di ciascun punto  $P_0 \in \{P_5, P_6, P_7, P_8\}$ , e verificare che, posto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , almeno un autovalore della corrispondente matrice

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 4x_0(x_0^2 + 3y_0^2 - 2) & 4y_0(3x_0^2 + 5y_0^2 - 6) \\ -4y_0(3x_0^2 + y_0^2 - 2) & -4x_0(x_0^2 + 3y_0^2 - 2) \end{pmatrix} \quad (24.21)$$

è positivo. Si ha infatti, tenendo conto che  $y_0 = 0$ ,

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 4x_0(x_0^2 - 2) & 0 \\ 0 & -4x_0(x_0^2 - 2) \end{pmatrix}, \quad (24.22)$$

così che i corrispondenti autovalori sono

$$\lambda_{\pm} = \pm 4x_0(x_0^2 - 2), \quad (24.23)$$

quindi sono uno positivo e uno negativo.

**24.7.** *Una soluzione esplicita.* Se  $P_0 \equiv (x(0), y(0)) = (0, 1)$  si ha allora  $P_0 \in \mathcal{C}_1 \subset \Gamma_0$ : quindi  $x^2(t) + y^2(t) = 1$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Le equazioni del moto diventano quindi

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y^2 = -4(1 - x^2), \\ \dot{y} = 4xy. \end{cases} \quad (24.24)$$

La prima si può risolvere esplicitamente per separazione di variabili, e dà

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{x^2 - 1} = 4 \int_0^t dt = 4t. \quad (24.25)$$

Scrivendo

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right), \quad (24.26)$$

si ottiene quindi

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{x - 1} - \int_0^{x(t)} \frac{dx}{x + 1} = 8 \int_0^t dt = 8t, \quad (24.27)$$

che, integrando, implica

$$\log \left| \frac{x(t) - 1}{x(t) + 1} \right| = 8t, \quad (24.28)$$

ovvero, utilizzando il fatto che  $|x(t)| \leq 1$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\log \frac{1 - x(t)}{1 + x(t)} = 8t, \quad (24.29)$$

che, risolta, dà

$$x(t) = \frac{1 - e^{8t}}{1 + e^{8t}}. \quad (24.30)$$

La soluzione sarà quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1 - e^{8t}}{1 + e^{8t}}, \\ y(t) &= 1 - \left( \frac{1 - e^{8t}}{1 + e^{8t}} \right)^2. \end{aligned} \quad (24.31)$$



In particolare si verifica immediatamente che la condizione iniziale è verificata; inoltre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0. \quad (24.32)$$

## Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati nel paragrafo §20 abbiamo seguito prevalentemente [Hirsch-Smale], Cap. 11, e, in misura minore, [Dell'Antonio], Cap. III. I paragrafi §21 e §22 sono invece tratti integralmente da [Hirsch-Smale], Capp. 9 e 12. Infine i paragrafi §23 e §24, essendo sostanzialmente degli esercizi, non sono tratti da alcuna fonte particolare, ma sono solo un'applicazione dei risultati discussi nei paragrafi precedenti e nel precedente capitolo.

Per il teorema di Weierstrass cfr. [Giusti1], Cap. 3, per le funzioni di una variabile, e [Giusti2], Cap. 2, in un contesto più generale.

Per una dimostrazione del teorema della curva di Jordan si può vedere *e.g.* [Watson], Cap. I.

Esercizi simili a quelli riportati sotto si possono trovare in [Dell'Antonio-Orlandi-Teta].

## Esercizi

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema gradiente

$$\dot{z} = -\nabla V(z), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dove

$$V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2,$$

e si determinino i punti d'equilibrio discutendone la natura. Si dimostri in particolare che c'è almeno un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e se ne stimi il bacino d'attrazione.

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1). \end{cases}$$

- (1) Verificare che  $H(x, y) = (y - x^2 + 1)(y + x^2 - 1)$  è una costante del moto.
- (2) Determinare i punti critici e discuterne la stabilità.
- (3) Analizzare le curve di livello nello spazio delle fasi.
- (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (5) Determinare la traiettoria  $(x(t), y(t))$  per tutti i dati iniziali della forma  $(x(0), y(0)) = (a, a^2 - 1)$  e discuterne l'andamento per  $t \rightarrow \infty$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 - 1), \\ \dot{y} = 2x(2x^2 - y^2). \end{cases}$$

- (1) Verificare che  $H(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1)$  è una costante del moto.
- (2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3) Analizzare le curve di livello nello spazio delle fasi.
- (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (5) Determinare il tempo necessario perché la traiettoria con dato iniziale  $(x(0), y(0)) = (1, 0)$  intersechi l'asse  $y = \sqrt{2}$ .
- (6) Dimostrare che la traiettoria con dato iniziale  $(x(0), y(0)) = (1/\sqrt{2}, 0)$  è periodica, scriverne il periodo come integrale definito e darne una stima dall'alto e dal basso.
- (7) Se si aggiunge un campo vettoriale  $(0, -\alpha y)$ , con  $\alpha > 0$ , trovare un insieme positivamente invariante che contenga il punto  $P_0 = (0, 0)$  e dimostrare che  $P_0$  è asintoticamente stabile.

**Esercizio 4.** Dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y^2, \\ \dot{y} = -y - x^2, \end{cases}$$

si determinino i punti d'equilibrio e se ne discuta la natura. Si stimi il bacino d'attrazione di eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabili.

**Esercizio 5.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -4x(x^2 + y^2 - 3). \end{cases}$$

- (1) Verificare che  $H(x, y) = (x^2 + 2x + y^2 - 1)(x^2 - 2x + y^2 - 1)$  è una costante del moto.
- (2) Determinare i punti critici e discuterne la natura.
- (3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi.
- (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

**Esercizio 6.** Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = -y^2 - 3x^2 + 1. \end{cases}$$

- (1) Verificare che  $H(x, y) = x(x^2 + y^2 - 1)$  è una costante del moto.
- (2) Determinare i punti critici e discuterne la stabilità.
- (3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi.
- (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (5) Scrivere come integrale definito il periodo dell'orbita relativo al dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/2, 0)$ .
- (6) Si modifichi il sistema aggiungendo un campo vettoriale  $(-\alpha x, 0)$ , con  $\alpha > 0$ : si studi il nuovo sistema e si mostri che il cerchio  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  è positivamente invariante.

**Esercizio 7.** Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = (y - 1)^2 - x^2 + 2(y + 1/2)(y - 1), \\ \dot{y} = 2x(y + 1/2). \end{cases}$$

- (1) Verificare che  $H(x, y) = [(y - 1)^2 - x^2](y + 1/2)$  è una costante del moto.
- (2) Determinare i punti critici e discuterne la stabilità.
- (3) Analizzare le curve di livello nello spazio delle fasi.
- (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (5) Si stimi il periodo di una particolare orbita chiusa.
- (6) Si determini se la traiettoria  $(x(t), y(t))$  di dato iniziale  $(x(0), y(0)) = (1, 0)$  attraversa la retta  $y = 2$ .

**Esercizio 8.** Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 + 2y(3 - 9x^2) + (1 - x^2)(2 - 8x^2), \\ \dot{y} = 2xy(9y + 10 - 16x^2). \end{cases}$$

- (1) Verificare che  $H(x, y) = y(y + 1 - x^2)(y + 2 - 8x^2)$  è una costante del moto.
- (2) Determinare i punti critici e discuterne la stabilità.
- (3) Analizzare le curve di livello nello spazio delle fasi.
- (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (5) Si studi l'andamento asintotico per  $t \rightarrow \infty$  della traiettoria con dato iniziale  $(x(0), y(0)) = (0, -2)$ .

**Esercizio 9.** Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^2(y - 1) - 2(x^2 + y^2 - 1) - \alpha(y - 1), \\ \dot{y} = 4x(x^2 + y - 1). \end{cases}$$

- (1) Per  $\alpha = 0$ , verificare che  $H(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)[(y - 1)^2 - x^2]$  è una costante del moto.
- (2) Per  $\alpha = 0$ , determinare i punti critici e discuterne la stabilità.
- (3) Per  $\alpha = 0$ , analizzare le curve di livello nello spazio delle fasi.
- (4) Per  $\alpha = 0$ , individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (5) Per  $\alpha \neq 0$  trovare i punti critici e discuterne la stabilità. Individuare una regione del piano che contenga un solo punto d'equilibrio e sia positivamente invariante.
- (6) Per  $\alpha = 0$ , si stimi (o calcoli) il tempo di percorrenza dal punto  $(x, y) = (2/3, 1/3)$  al punto  $(x, y) = (1/3, 2/3)$ .

**Esercizio 10.** Si consideri il sistema gradiente della forma

$$\dot{z} = -\nabla V(z), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dove

$$V(x, y) = x^2(1 - y^2) + y^2.$$

- (1) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità; verificare in particolare che esiste un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
- (2) Analizzare le curve di livello.
- (3) Stimare il bacino d'attrazione del punto asintoticamente stabile di cui al punto (1).

**Esercizio 11.** Si consideri il sistema gradiente della forma

$$\dot{z} = -\nabla V(z), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dove

$$V(x, y) = x^2(1 - y^2) + y^2.$$

- (1) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2) Analizzare le curve di livello.

**Esercizio 12.** Dato un sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

si dia un algoritmo per cercare, se esiste, una costante del moto  $H(x, y)$ .

[Soluzione. Si cerca una funzione  $H(x, y)$  tale che  $f(x, y) = \partial H / \partial y$  e  $g(x, y) = -\partial H / \partial x$ . Quindi si integra  $f(x, y)$  rispetto a  $y$ , a  $x$  fissato, ottenendo  $F(x, y) + c_1(x)$ , dove  $F(x, y)$  è una primitiva di  $f(x, y)$  e  $c_1(x)$  è una funzione arbitraria di  $x$ . Analogamente si integra  $g(x, y)$  rispetto a  $x$ , a  $y$  fissato, ottenendo  $G(x, y) + c_2(y)$ , dove  $G(x, y)$  è una primitiva di  $g(x, y)$  e  $c_2(y)$  è una funzione arbitraria di  $y$ . Imponendo  $F(x, y) + c_1(x) = -(G(x, y) + c_2(y))$  si determinano le funzioni  $c_1(x)$  e  $c_2(y)$ . Si ha quindi  $H(x, y) = F(x, y) + c_1(x)$ , a meno di una costante additiva arbitraria. Alternativamente, una volta ottenuta  $F(x, y) + c_1(x)$ , la si può derivare rispetto a  $y$  e cambiare di segno: imponendo che la quantità così ottenuta sia uguale a  $g(x, y)$  si determina la funzione  $c_1(x)$ , a meno di una costante

additiva arbitraria, e quindi si trova  $H(x, y) = F(x, y) + c_1(x)$ . Ovviamente il procedimento sopra è destinato a fallire se la costante del moto non esiste!]

**Esercizio 13.** Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(y^2 - 1), \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1). \end{cases}$$

- (1) Verificare che esiste una costante del moto  $H(x, y)$  e determinarla.
- (2) Individuare i punti critici e discuterne la stabilità.
- (3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi e discuterne qualitativamente la forma.
- (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche. Dimostrare in particolare che la traiettoria con dato iniziale  $(1/\sqrt{2}, 0)$  è periodica e scriverne il periodo come integrale definito.
- (5) Se si aggiunge un campo vettoriale  $(-\alpha x, -\alpha y)$ , individuare il valore  $\alpha_0$  tale che per  $\alpha > \alpha_0$  l'origine diventa asintoticamente stabile. Verificare che la regione

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$$

è in tal caso contenuta nel bacino d'attrazione dell'origine.

- (6) Trovare esplicitamente la soluzione  $(x(t), y(t))$  con dati iniziali  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  e discuterne il comportamento asintotico per  $t \rightarrow \pm\infty$ .
  - (7) Come al punto precedente per la traiettoria con dati iniziali  $(\sqrt{2}, 0)$ .
- [Suggerimento. Per il punto (1), si trova  $H(x, y) = (y^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)^2$ , a meno di una costante additiva. Per il punto (6) si osservi che la funzione  $1/x(x^2 - 1)$  ammette  $(\log|x-1| + \log|x+1| - 2\log|x|)/4$  come primitiva. Per il punto (7), nell'integrale che esprime la soluzione  $x(t)$  in funzione di  $t$  si proceda con le due sostituzioni successive  $x \rightarrow y = 1/x$  e  $y \rightarrow z = \sqrt{2y^2 - 1}$  e si osservi che la funzione  $1/(1 - x^2)$  ammette  $(\log|1+x| - \log|1-x|)/2$  come primitiva.]

**Esercizio 14.** Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - (x^2 - 1)^2 - 1, \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1)(y - 1). \end{cases}$$

- (1) Verificare che esiste una costante del moto  $H(x, y)$  e determinarla.
  - (2) Individuare i punti critici e discuterne la stabilità.
  - (3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi e discuterne qualitativamente la forma.
  - (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche. Dimostrare in particolare che la traiettoria con dato iniziale  $(1, 3/4)$  è periodica e scriverne il periodo come integrale definito.
  - (5) Trovare esplicitamente la soluzione  $(x(t), y(t))$  con dati iniziali  $(1, 1)$  e discuterne il comportamento asintotico per  $t \rightarrow \pm\infty$ .
  - (7) Come al punto precedente per la traiettoria con dati iniziali  $(9, 2)$ .
- [Suggerimento. Si ha  $H(x, y) = (y - 1)(y - (x^2 - 1)^2)$ , a meno di una costante additiva.]

**Esercizio 15.** Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 1 - 2e^{-x^2}, \\ \dot{y} = -4xe^{-x^2}(y - 1). \end{cases}$$

- (1) Verificare che esiste una costante del moto  $H(x, y)$  e determinarla.
- (2) Individuare i punti critici e discuterne la stabilità.
- (3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi e discuterne qualitativamente la forma.
- (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (5) Dimostrare in particolare che la traiettoria con dato iniziale  $(0, 3/2 + \sqrt{2}/3)$  è periodica e scriverne

il periodo come integrale definito.

[Suggerimento. Si ha  $H(x, y) = (y - 1)(y - 2e^{-x^2})$ , a meno di una costante additiva.]

**Esercizio 16.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(1 - y^2), \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$$

- (1) Trovare una costante del moto  $H(x, y)$ .
- (2) Determinare le curve di livello che corrispondono al valore  $H(x, y) = 0$ .
- (3) Determinare i punti d'equilibrio.
- (4) Discuterne la stabilità.
- (5) Trovare esplicitamente la traiettoria con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, 2)$ .

**Esercizio 17.** Si consideri il sistema dinamico in  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(2y^2 + 2x^2 + 1), \\ \dot{y} = -2x(3x^4 + 2y^2). \end{cases}$$

- (1) Determinare i punti d'equilibrio.
- (2) Discuterne la stabilità.

**Esercizio 18.** Si consideri il sistema dinamico planare (20.27).

- (1) Determinare i punti d'equilibrio.
- (2) Discuterne la stabilità.
- (3) Studiare le orbite nello spazio delle fasi.

**Esercizio 19.** Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(y - 1)(x^2 - \alpha), \\ \dot{y} = 2x(x^2 - \alpha), \end{cases}$$

con  $\alpha = 1$ .

- (1) Verificare che  $H(x, y) = (y - 1)^2 - x^2$  è una costante del moto.
- (2) Determinare i punti d'equilibrio.
- (3) Discuterne la stabilità.
- (4) Analizzare le curve di livello di  $H(x, y)$  e discutere l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.
- (5) Come cambia lo scenario se  $\alpha = -1$  ?

**Esercizio 20.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 + 4y^3, \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases}$$

- (1) Verificare che la funzione  $H(x, y) = y(x^2 + y^3 - 1)$  è una costante del moto.
- (2) Determinare i punti d'equilibrio.
- (3) Discuterne la stabilità.
- (4) Analizzare le traiettorie lungo le curve di livello che corrispondono al valore  $H(x, y) = 0$ .
- (5) Discutere qualitativamente le altre traiettorie.

**Esercizio 21.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(1 + x^4)^{-1}, \\ \dot{y} = 4x^3(1 + y^2)(1 + x^4)^{-2}. \end{cases}$$

- (1) Determinare una costante del moto  $H(x, y)$  tale che  $H(0, 0) = 1$ .
- (2) Determinare le curve di livello di  $H(x, y)$ .
- (3) Determinare i punti d'equilibrio.
- (4) Discuterne la stabilità.
- (5) Verificare che non esistono traiettorie periodiche.

[*Suggerimento.* La costante del moto è  $H(x, y) = (1 + y^2)/(1 + x^4)$ . Il fatto che non esistano traiettorie periodiche discende dallo studio delle curve di livello: nessuna curva di livello contiene componenti chiuse.]

**Esercizio 22.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(y^2 - x^2 - 1), \\ \dot{y} = -4x(x^2 - y^2 - 1). \end{cases}$$

- (1) Dimostrare che la funzione

$$H(x, y) = [(y + 1)^2 - x^2] [(y - 1)^2 - x^2]$$

costituisce una costante del moto.

- (2) Determinare i punti d'equilibrio.
- (3) Discuterne la stabilità.
- (4) Determinare la curva di livello  $H(x, y) = 0$  e discuterne il verso di percorrenza.
- (5) Discutere qualitativamente le altre curve di livello e discuterne i versi di percorrenza.
- (6) Determinare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (7) Esprimere il periodo di ogni traiettoria periodica come integrale definito.

**Esercizio 23.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(2y^2 - x^6 - 1), \\ \dot{y} = 6x^5(y^2 - 1). \end{cases}$$

- (1) Trovare una costante del moto  $H(x, y)$  tale che  $H(0, 0) = 0$ .
  - (2) Determinare i punti d'equilibrio.
  - (3) Discuterne la stabilità.
  - (4) Determinare la curva di livello  $H(x, y) = 0$  e discuterne il verso di percorrenza.
  - (5) Discutere qualitativamente le altre curve di livello e discuterne i versi di percorrenza.
  - (6) Determinare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- [*Suggerimento.* Si ha  $H(x, y) = (y^2 - x^6)(y^2 - 1)$ .]

**Esercizio 24.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(2x^2y^2 - 1 - 4x^2)(x^2 - 4), \\ \dot{y} = -2x(2x^2y^2 - 1 - 4y^2)(y^2 - 4), \end{cases}$$

- (1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = (x^2y^2 - 1)(x^2 - 4)(y^2 - 4)$$

è una costante del moto.

- (2) Determinare i punti d'equilibrio.
- (3) Discuterne la stabilità.
- (4) Determinare la curva di livello  $H(x, y) = 0$  e discuterne il verso di percorrenza.
- (5) Discutere qualitativamente le altre curve di livello e discuterne i versi di percorrenza.
- (6) Determinare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (7) Discutere qualitativamente il comportamento della soluzione con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 1/4)$ .

(8) Trovare esplicitamente la soluzione  $(x(t), y(t))$  con i dati iniziali del punto precedente.  
 [Suggerimento. Per il punto (8), si noti che la funzione  $1/[(4x-1)(x-4)]$  ammette  $(\log|x-4| - \log|4x-1|)/15$  come primitiva.]

**Esercizio 25.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - 1)(3y^2 - 1) , \\ \dot{y} = -y(y^2 - 1)(3x^2 - 1) . \end{cases}$$

- (1) Trovare una costante del moto  $H(x, y)$ .
  - (2) Determinare i punti d'equilibrio.
  - (3) Discuterne la stabilità.
  - (4) Studiare qualitativamente le curve di livello.
  - (5) Individuare i dati iniziali che generano traiettorie periodiche.
- [Suggerimento. Si può scegliere come costante del moto  $H(x, y) = xy(y^2 - 1)(x^2 - 1)$ .]

**Esercizio 26.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(x^2 + y^2 - 2) , \\ \dot{y} = -4x(x^2 + y^2 - 2) . \end{cases}$$

- (1) Verificare che la funzione  $H(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3)$  è una costante del moto.
  - (2) Determinare i punti d'equilibrio.
  - (3) Determinare le curve di livello di  $H(x, y)$ .
  - (4) Discutere la stabilità dei punti d'equilibrio.
  - (5) Risolvere esplicitamente le equazioni del moto, i.e. trovare la soluzione  $(x(t), y(t))$  al variare dei dati iniziali  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  nel piano.
  - (6) Si discuta la proprietà evidenziata nell'osservazione 20.38 nel caso presente.
  - (7) Dimostrare che, aggiungendo un campo vettoriale  $(0, -\alpha y)$ , con  $\alpha > 0$ , l'origine diventa un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e stimarne il bacino d'attrazione.
- [Suggerimento. Si trova che il moto si svolge su circonferenze  $x^2 + y^2 = R^2 = \text{costante}$ , quindi le equazioni del moto si possono riscrivere nella forma  $\dot{x} = 4y(R^2 - 2)$ ,  $\dot{y} = -4x(R^2 - 2)$ , i.e.  $\dot{x} = \omega y$ ,  $\dot{y} = -\omega x$ , con  $\omega$  costante. Si ha quindi un sistema dinamico lineare che si può esplicitamente risolvere. Per il punto (7) si utilizzi il teorema 18.27 procedendo come nel paragrafo 23.11: in particolare si scelga come frontiera dell'insieme  $P$  una qualsiasi curva di livello di  $H(x, y)$  di raggio  $R < \sqrt{2}$ .]

**Esercizio 27.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) + 4y^2(x^2 + y^2 - 2) , \\ \dot{y} = -4xy(x^2 + y^2 - 2) . \end{cases}$$

- (1) Verificare che la funzione  $H(x, y) = y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3)$  è una costante del moto.
  - (2) Determinare i punti d'equilibrio.
  - (3) Analizzare le curve di livello di  $H(x, y)$  nel piano: determinarne qualitativamente la forma e discuterne il verso di percorrenza.
  - (4) Discutere la stabilità dei punti d'equilibrio.
  - (5) Risolvere esplicitamente le equazioni del moto, i.e. trovare la soluzione  $(x(t), y(t))$ , in corrispondenza del dato iniziale  $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ .
- [Suggerimento. Per il punto (5) si noti che la funzione  $1/(x^2 - 1)$  ammette  $(\log|x-1| - \log|x+1|)/2$  come primitiva.]

**Esercizio 28.** Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - \sin x , \\ \dot{y} = y \cos x , \end{cases}$$

202 CAPITOLO 5. ALCUNI ESEMPI DI ANALISI QUALITATIVA

con  $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  e  $y \in \mathbb{R}$ .

- (1) Determinare una costante del moto  $H(x, y)$  tale che  $H(0, 0) = 0$ .
  - (2) Determinare le curve di livello.
  - (3) Determinare i punti d'equilibrio.
  - (4) Discuterne la stabilità.
  - (5) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi/2, 1/3)$  è periodica.
- [Suggerimento. Si ha  $H(x, y) = y(y - \sin x)$ .]

**Esercizio 29.** Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - 4y^3, \\ \dot{y} = 10x - 4x^3. \end{cases}$$

- (1) Trovare una costante del moto  $H(x, y)$ .
  - (2) Determinare i punti critici e discuterne la stabilità.
  - (3) Analizzare le curve di livello nello spazio delle fasi.
  - (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- [Suggerimento. Si ha  $H(x, y) = x^2(x^2 - 5) - y^2(y^2 - 1)$ .]

**Esercizio 30.** Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2x(x^2 - 1), \\ \dot{y} = 2y(3x^2 - 1). \end{cases}$$

- (1) Verificare che esiste una costante del moto  $H(x, y)$  e determinarla.
  - (2) Individuare i punti critici e discuterne la stabilità.
  - (3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi e discuterne qualitativamente la forma.
  - (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
  - (5) Trovare esplicitamente la soluzione  $(x(t), y(t))$  con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$  e discuterne il comportamento asintotico per  $t \rightarrow \pm\infty$ .
  - (6) Dimostrare che la traiettoria con dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/3, -8/27)$  è periodica e scriverne il periodo come integrale definito.
  - (7) Se si aggiunge un campo vettoriale  $(-\alpha x, -\alpha y)$ , con  $\alpha > 0$ , determinare quale è il valore  $\alpha_0$  tale che per  $\alpha > \alpha_0$  l'origine è un punto asintoticamente stabile e il cerchio  $x^2 + y^2 \leq 1$  è contenuto nel suo bacino d'attrazione.
  - (8) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2)$  diverge e dire se questo avviene in un tempo finito o infinito.
- [Suggerimento. Per il punto (1) si trova  $H(x, y) = y^2 - 2xy(x^2 - 1)$ , a meno di una costante additiva. Per il punto (5) si osservi che la funzione  $1/[x(x^2 - 1)]$  ammette  $(\log|x-1| + \log|x+1| - 2\log|x|)/4$  come primitiva. Per il punto (6), ricavando  $y$  come funzione di  $x$ , dall'equazione implicita  $H(x, y) = E$ , si trovano due determinazioni  $y = y_{\pm}(x)$ , con  $x_1 \leq x \leq x_2$ , che si raccordano in  $x_1$  e in  $x_2$ . Si può quindi scrivere il periodo come somma dei tempi di percorrenza dei due archi di curva  $x \in [x_1, x_2] \rightarrow y_{\pm}(x)$ .]