

## Capitolo 6. Sistemi a un grado di libertà

### 25. Sistemi a un grado di libertà

**25.1. Introduzione.** Dato un sistema di  $N$  particelle, in generale, chiameremo *numero di gradi di libertà* il numero di quantità indipendenti che devono essere specificate per definire univocamente la posizione del sistema. Se un sistema ha  $N$  gradi di libertà esistono allora  $N$  coordinate  $(x_1, \dots, x_N)$  in  $\mathbb{R}^N$  che individuano in modo univoco lo stato del sistema. Chiameremo *spazio delle configurazioni* del sistema il dominio di variabilità delle coordinate: lo spazio delle configurazioni è quindi un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$ . Nel presente capitolo studieremo il moto di *sistemi a un grado di libertà*, *i.e.* sistemi meccanici il cui stato è univocamente determinato da una sola variabile; per questo motivo chiameremo tali sistemi anche *sistemi unidimensionali*.

Vedremo che tali sistemi costituiscono un caso particolare dei sistemi planari studiati nel paragrafo §20. del capitolo precedente. Per determinare le traiettorie nel piano delle fasi si può quindi procedere come visto per i sistemi planari; vedremo ora che, alternativamente, è possibile ricondurre lo studio delle traiettorie allo studio di una funzione scalare, l'energia potenziale del sistema.

La rilevanza dello studio di sistemi a un grado di libertà risiede nel fatto che si tratta dei più semplici sistemi meccanici, e quindi sistemi fisicamente interessanti, in cui si può applicare con successo la teoria generale e i risultati di analisi qualitativa sviluppati nei capitoli precedenti. Vedremo anche che in tal caso è sempre possibile risolvere le equazioni del moto, o anche semplicemente, rappresentare qualsiasi traiettoria nello spazio delle fasi: quindi si può arrivare a una conoscenza completa del moto. In generale questo non sarà più possibile non appena si passi a due gradi di libertà (a meno che non si facciano ipotesi particolari). Quindi, studiando sistemi a un grado di libertà, abbiamo la possibilità di sviluppare un'analisi qualitativa del moto in un caso in cui è facile visualizzare e interpretare graficamente in maniera semplice i risultati ottenuti.

**25.2. Notazioni.** Consideriamo un sistema a un grado di libertà. Il sistema è allora individuato in ogni istante dai valori che assumono la sua coordinata  $x$  e la sua velocità  $\dot{x}$ . L'equazione che descrive il moto è (cfr. §16.29)

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (25.1)$$

con  $m$  costante e  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , e risolvere l'equazione (25.1) significa trovare la soluzione  $x(t)$ , fissati i dati iniziali al tempo  $t_0$ , *i.e.*  $x(t_0) = \bar{x}$  e  $\dot{x}(t_0) = \dot{\bar{x}}$ , con  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \in \mathbb{R}^2$ . Per sottolineare la dipendenza dai dati iniziali scriveremo anche  $x(t) = \varphi(t, (\bar{x}, \dot{\bar{x}}))$ . Il fatto che  $F$  sia di classe  $C^1$  garantisce l'esistenza di un'unica soluzione  $x(t)$ , fissati i dati iniziali (per il teorema 10.39 (teorema di esistenza e unicità)).

Se la funzione  $F(x, \dot{x}, t)$  in (25.1) non dipende esplicitamente dalla velocità e dal tempo, *i.e.*  $F(x, \dot{x}, t) = F(x)$ , scriveremo

$$m\ddot{x} = F(x), \quad F(x) = -\frac{dV}{dx}(x), \quad (25.2)$$

con  $V$  di classe  $C^2$  definita a meno di una costante additiva. Nel seguito supporremo sempre  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; se il dominio di  $V$  è un aperto  $A \subset \mathbb{R}$ , nulla cambia sostanzialmente nell'analisi seguente.

**25.3. Osservazione.** Il sistema (25.1) è un sistema dinamico della forma

$$\dot{z} = f(z, t), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (25.3)$$

dove  $f(z, t)$  è un campo vettoriale di componenti  $(y, m^{-1}F(x, y, t))$ ; nel caso del sistema (25.2), si ha  $f(z, t) \equiv f(z) = (y, m^{-1}F(x))$ , *i.e.*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = m^{-1}F(x) = -m^{-1}[dV/dx](x). \end{cases} \quad (25.4)$$

**25.4. LEMMA.** *Sia dato il sistema (25.2). Allora la quantità*

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x), \quad (25.5)$$

*è una costante del moto.*

**25.5. Dimostrazione del lemma 25.4.** A partire dalla definizione di  $E$  in (25.5), se ne calcola la derivata temporale, ottenendo

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x} \left( m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} \right), \quad (25.6)$$

e si utilizza la (25.2) per concludere che  $dE/dt \equiv 0$ . ■

**25.6. DEFINIZIONE (ENERGIA).** *Dato il sistema (25.2), la costante del moto (25.5) prende il nome di energia totale del sistema (o energia tout court). Il termine  $m\dot{x}^2/2$  prende il nome di energia cinetica, mentre il termine  $V(x)$  prende il nome di energia potenziale. Il lemma 25.4 prende allora il nome di legge di conservazione dell'energia.*

**25.7. Osservazione.** Dalla (25.6) si deduce che, se  $x(t)$  è soluzione della (25.2), allora esiste una costante  $E_0$  tale che

$$E(x(t), \dot{x}(t)) = E_0, \quad (25.7)$$

per ogni tempo  $t$  per cui la soluzione  $x(t)$  è definita, (vedremo più avanti che  $x(t)$  è definita  $\forall t \in \mathbb{R}$ ; cfr. il teorema 26.9 più avanti). Poiché  $E(x, \dot{x})$  è data dalla (25.5), per  $\dot{x} \neq 0$ , possiamo riscrivere la (25.7) come

$$y \equiv \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - V(x))} \equiv \pm \Phi(x), \quad (25.8)$$

definendo così anche la funzione  $\Phi(x)$ . Poiché fissati  $E_0$  e  $\bar{x}$ , risulta determinato il valore della velocità  $\dot{x}$ , a meno del segno, possiamo indicare la soluzione  $x(t) = \varphi(t, (\bar{x}, \dot{\bar{x}}))$  con  $\varphi_{E_0}^{\pm}(t, \bar{x})$ , dove il segno  $\pm$  dipende dal segno di  $\dot{\bar{x}}$ . Se  $\dot{\bar{x}} = 0$  il segno in (25.8) non è definito. Si noti tuttavia che se  $[dV/dx](\bar{x}) \neq 0$  allora per  $t = 0$  si ha  $\dot{x}(0) \neq 0$  e quindi è definito il segno di  $\dot{x}(t)$  per ogni  $t \neq 0$ ; questo implica che in tal caso è ben definito il segno in  $\varphi_{E_0}^{\pm}(t, \bar{x})$  anche per dato iniziali tali che  $\dot{\bar{x}} = 0$ .

**25.8. DEFINIZIONE (MOTI ASINTOTICI).** *Sia  $(x_0, 0)$  un punto d'equilibrio per il sistema dinamico (25.4) e sia  $E_0$  tale che  $E(x_0, 0) = E_0$ . Diremo che la traiettoria descritta da  $x(t)$  è asintotica a  $x_0$  se  $x(t) \rightarrow x_0$  per  $t \rightarrow \infty$  o per  $t \rightarrow -\infty$ . Se  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  per  $t \rightarrow \infty$  o per  $t \rightarrow -\infty$  diremo che la traiettoria è asintotica a  $\pm\infty$  (o semplicemente asintotica).*

**25.9. DEFINIZIONE (PUNTO D'INVERSIONE).** *Uno zero semplice (i.e. di ordine uno) di  $E_0 - V(x)$  è detto punto d'inversione del moto.*

**25.10.** Supponiamo d'ora in poi che gli zeri della funzione  $F$  in (25.2) (i.e. i punti  $x$  tali che  $F(x) = 0$ ) siano punti isolati e indichiamo con  $X_{E_0}$  l'insieme dei punti  $x$  tali che  $E_0 - V(x) = 0$ . Si vede dalla (25.6) che, per  $x \notin X_{E_0}$ , una soluzione di (25.2) è anche soluzione di (25.8). Tuttavia la (25.8) ha più soluzioni della (25.2): vedremo tra poco, nel teorema 25.11, come procedere per determinare le soluzioni di (25.2) utilizzando la (25.8).

**25.11. TEOREMA.** *Consideriamo moti descritti dalla (25.2), con energia fissata  $E_0$ , e supponiamo che  $F(x)$  abbia zeri isolati. Sia  $x_0 \in X_{E_0}$ , i.e.  $E_0 - V(x_0) = 0$ .*

(1) *Se  $x_0$  è un punto di minimo di  $V(x)$ , i.e.  $[dV/dx](x_0) = 0$  e  $[d^2V/dx^2](x_0) > 0$ , allora esiste un intorno  $B(x_0) \in \mathbb{R}$  di  $x_0$  tale che non esistono soluzioni di (25.2) con energia  $E_0$  e dati iniziali  $\bar{x} \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ .*

(2) *Se  $x_0$  è un punto di massimo di  $V(x)$ , i.e.  $[dV/dx](x_0) = 0$  e  $[d^2V/dx^2](x_0) < 0$ , allora esiste un intorno  $B(x_0) \in \mathbb{R}$  di  $x_0$  tale che i moti con dati iniziali  $\bar{x} \in B(x_0)$  sono asintotici a  $x_0$  per  $t \rightarrow \infty$  o per  $t \rightarrow -\infty$ , a seconda che sia  $\bar{x} < x_0$  o  $\bar{x} > x_0$ .*

(3) *Se  $x_0$  è un punto d'inversione del moto, i.e.  $[dV/dx](x_0) \neq 0$ , allora esiste un intorno  $B(x_0) \in \mathbb{R}$  di  $x_0$  tale che soluzioni con dati iniziali  $\bar{x} \in B(x_0)$ , con  $\bar{x} < x_0$  se  $[dV/dx](x_0) > 0$  e  $\bar{x} > x_0$  se  $[dV/dx](x_0) < 0$ , raggiungono in un tempo finito  $t_0$ , con  $t_0 > 0$  se  $\bar{x} < x_0$  e  $t_0 < 0$  se  $\bar{x} > x_0$ , il punto  $x_0$  con velocità finale  $\dot{x}(t_0) = 0$  e  $\dot{x}(t_0 + t)\dot{x}(t_0 - t) < 0$  per ogni  $t$  tale che  $x(t_0 \pm t) \in B(x_0)$ .*

**25.12. Dimostrazione del teorema 25.11.** Consideriamo prima il caso in cui la fun-

zione  $E_0 - V(x)$  abbia in  $x_0$  uno zero di ordine due (*i.e.*  $[dV/dx](x_0) = 0$ ).

Allora nel caso (1)  $x_0$  è un minimo isolato per la funzione  $V(x)$ , quindi un punto d'equilibrio  $(x_0, 0)$  per il sistema dinamico corrispondente (25.4), per il teorema 18.30 (teorema di Dirichlet). Poiché l'energia cinetica è una funzione positiva, la condizione  $E(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = E_0$  non può essere soddisfatta per  $\bar{x} \neq x_0$  sufficientemente vicino a  $x_0$  (dal momento che la funzione  $V(x)$  è continua e ha in  $x_0$  un minimo isolato) e quindi deve esistere un intorno  $B(x_0)$  non contenente dati iniziali possibili per il moto descritto dalla (25.2). ■

Il caso (2) corrisponde a un punto  $x_0$  che è un massimo isolato per  $V(x)$ ; consideriamo un dato iniziale  $\bar{x}$  tale che  $E_0 - V(x) > 0$  per  $x \neq x_0$  tale che  $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$ . Possiamo supporre per concretezza che sia  $x_0 - \bar{x} > 0$  (il caso complementare si tratta allo stesso modo) e quindi  $E_0 - V(x) > 0$  per  $x \in [\bar{x}, x_0)$ . Studiamo dunque la soluzione  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x})$  di (25.8) tale che  $x(0) = \bar{x}$ . Poiché la funzione  $\Phi(x)$  in (25.8) è lipschitziana (nel caso che stiamo considerando), la soluzione  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x})$  è l'unica soluzione con dato iniziale  $\bar{x}$  e poiché  $dx/dt > 0$  tale soluzione è crescente. Deve quindi essere, per il teorema 10.36 (teorema di unicità),  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x}) < x_0$  per ogni  $t$ . Inoltre si deve avere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{E_0}^+(t, \bar{x}) = x_0, \quad (25.9)$$

perché altrimenti, se tale limite fosse  $x'_0 \neq x_0$ , si avrebbe

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varphi}_{E_0}^+(t, \bar{x}) = \Phi(x'_0) \neq 0, \quad (25.10)$$

essendo  $x_0$  un punto di massimo isolato per la funzione  $V(x)$ , e si troverebbe dunque un assurdo. Quindi la soluzione  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x})$  è asintotica a  $x_0$  per  $t \rightarrow \infty$ , (nel caso  $x_0 - \bar{x} < 0$  si trova che la soluzione  $\varphi_{E_0}^-(t, \bar{x})$  è asintotica a  $x_0$  per  $t \rightarrow -\infty$ ). ■

Consideriamo infine il caso (3), in cui  $E_0 - V(x)$  abbia uno zero di ordine uno in  $x_0$  (e quindi  $[dV/dx](x_0) \neq 0$ ). In questo caso  $\Phi(x)$  non è lipschitziana in  $x_0$  e quindi ci sono in generale più soluzioni con dato iniziale  $\bar{x}$ . Inoltre la condizione  $[dV/dx](x_0) \neq 0$  individua uno dei due intorni (destro e sinistro) di  $x_0$ , tale che solo dati iniziali contenuti in uno dei due sono compatibili con valori dell'energia potenziale  $V(x)$  minori di  $E_0$ ; supponiamo, di nuovo per concretezza, che sia l'intorno sinistro. Sia  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x})$  la soluzione con dato iniziale  $\bar{x} < x_0$  e  $\dot{\bar{x}} > 0$ : tale soluzione è crescente e, a differenza del caso precedente, esiste un tempo  $t_0$  tale che  $\varphi_{E_0}^+(t_0, \bar{x}) = x_0$  (poiché il campo vettoriale del corrispondente sistema dinamico è non nullo in  $(x_0, 0)$  ed è quindi limitato dal basso in un intorno opportuno di  $(x_0, 0)$ ; cfr. il corollario 26.13 più avanti per la dimostrazione). In generale possiamo continuare la soluzione di (25.7) con una funzione  $\varphi'_{E_0}(t, \bar{x})$ , con  $t > t_0$ . Poniamo

$$t_1 \equiv \inf\{t \geq t_0 : \varphi'_{E_0}(t, \bar{x}) < 0\}, \quad (25.11)$$

che rappresenta il primo istante in cui la soluzione si allontana dal punto  $x_0$ , (per le ipotesi fatte e per la conservazione dell'energia,  $\dot{\varphi}_{E_0}^+(t_0, \bar{x}) = 0$  e la soluzione non può

finire nell'intorno destro di  $x_0$ ). Se  $t_1 \neq t_0$  si deve quindi avere

$$\varphi'_{E_0}(t, \bar{x}) = 0 \quad \forall t \in (t_0, t_1), \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi'_{E_0}(t, \bar{x}) = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx}(x_0) \neq 0, \quad (25.12)$$

e la derivata seconda della soluzione avrebbe una discontinuità in  $t = t_0$ . Quindi la continuazione scelta della soluzione di (25.8) non può essere anche una continuazione della soluzione di (25.2), poiché  $F(\varphi'_{E_0}(t, \bar{x}))$  è derivabile in  $t$  (essendo  $F(x)$  derivabile in  $x$ , e  $\varphi'_{E_0}(t, \bar{x})$  derivabile in  $t$ ).

In conclusione l'unica continuazione  $\varphi'_{E_0}(t, \bar{x})$  della soluzione di (25.8) che sia *anche* soluzione di (25.2) è quella che si ottiene prendendo  $t_1 = t_0$ . ■

**25.13. Osservazione.** La condizione  $\dot{x}(t_0+t)\dot{x}(t_0-t) < 0$  per ogni  $t$  tale che  $x(t_0 \pm t) \in B(x_0)$ , enunciata al punto (3) del teorema 25.11, afferma che, una volta che  $x(t)$  raggiunge il punto  $x_0$ , con velocità nulla, subito inverte la direzione del moto e torna indietro: questo giustifica la definizione di  $x_0$  quale punto d'inversione del moto (cfr. la definizione 25.9). La traiettoria  $x(t)$  può invertire direzione più volte al passare del tempo, quindi  $\dot{x}(t_0+t)$  non ha segno definito; tuttavia pur di scegliere l'intorno  $B(x_0)$  sufficientemente piccolo possiamo supporre che  $\dot{x}(t_0+t)$  abbia sempre lo stesso segno per  $t$  tale che  $x(t_0+t) \in B(x_0)$ . Analogamente si può ragionare per  $\dot{x}(t_0-t)$ .

**25.14. Osservazione.** Il caso  $[d^2V/dx^2](x_0) = 0$  non è considerato nel teorema 25.11, ma può essere discusso allo stesso modo. Infatti, poiché stiamo supponendo che gli zeri di  $F = -dV/dx$  siano isolati, ci sarà qualche derivata di ordine  $\geq 2$  che è non nulla (altrimenti la funzione  $F(x)$  sarebbe identicamente costante), e si può quindi procedere come in §25.12 e studiare il comportamento della soluzione in relazione alle proprietà di regolarità della funzione in un intorno del punto  $x_0$ .

**25.15. Osservazione.** Il teorema 25.11 mostra che l'equazione (25.8) può essere utilizzata per determinare le soluzioni di (25.2): il suo vantaggio è che si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine, risolubile per separazione di variabili.

## 26. Analisi qualitativa delle traiettorie: aspetti preliminari

**26.1. Notazioni.** Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dall'equazione (25.2). Chiameremo (impropriamente) spazio delle fasi lo spazio cartesiano di dimensione 2 le cui coordinate sono costituite dalle variabili di posizione ( $x$ ) e di velocità ( $\dot{x}$ ): le prime saranno riportate sulle ascisse, le seconde sulle ordinate. Tale spazio sarà anche indicato, meglio, come spazio "posizione-velocità".

**26.2. Osservazione.** La denominazione di spazio delle fasi è impropria perché, per un sistema bidimensionale, la seconda variabile dello spazio delle fasi dovrebbe essere il

momento  $p$  (definito come derivata della lagrangiana associata al sistema). Tuttavia nel caso del sistema (25.2) risulta  $p = m\dot{x}$ , quindi, a meno di un (irrilevante) fattore moltiplicativo le due variabili momento e velocità coincidono.

**26.3. DEFINIZIONE (CURVE DI LIVELLO).** Dato il sistema meccanico (25.2) e fissato un valore  $E_0$  dell'energia, chiameremo curve di livello di energia  $E_0$  il luogo dei punti dello spazio delle fasi definito da

$$\Gamma_{E_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}my^2 + V(x) = E_0\}. \quad (26.1)$$

**26.4. LEMMA.** Dato il sistema dinamico (25.2), con  $V$  di classe  $C^2$ , le curve di livello (26.1) sono curve di classe  $C^2$  tranne che in corrispondenza dei punti  $(x, y) = (x_0, 0)$ , con  $x_0$  punto critico di  $V$ .

**26.5. Prima dimostrazione del lemma 26.4.** L'equazione

$$G(x, y) = 0, \quad G(x, y) = E(x, y) - E_0 \equiv \frac{1}{2}my^2 + V(x) - E_0, \quad (26.2)$$

stabilisce una relazione tra  $x$  e  $y$ . Poiché risulta

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x}(x, y), \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right) = \left( \frac{dV}{dx}(x), my \right) \neq (0, 0), \quad (26.3)$$

al di fuori dei punti d'equilibrio del sistema dinamico corrispondente (25.4), possiamo, in un intorno di ciascuno di tali punti, applicare il teorema della funzione implicita (cfr. la nota bibliografica del capitolo 4) ed esprimere  $y$  in funzione di  $x$ , i.e.  $y = y(x)$  (o viceversa); sempre per il teorema della funzione implicita l'applicazione  $y \rightarrow y(x)$  è di classe  $C^2$  se  $V$  è di classe  $C^2$ . ■

**26.6. Seconda dimostrazione del lemma 26.4.** Sia  $\gamma$  un arco della curva di livello  $\Gamma_{E_0}$  non contenente punti d'equilibrio. Le traiettorie hanno luogo sulle curve di livello: quindi esiste un intervallo  $[t_1, t_2]$  tale che la curva  $\gamma$  è descritto da una traiettoria  $t \rightarrow z(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ , per  $t \in [t_1, t_2]$ . Poiché  $z(t)$  è di classe  $C^2$  in  $t$ , l'applicazione  $t \rightarrow z(t)$  costituisce una rappresentazione in forma parametrica della curva  $\gamma$ : quindi  $\gamma$  è una curva di classe  $C^2$ . ■

**26.7. Osservazione.** Poiché la soluzione di (25.2) può essere espressa in termini della soluzione del corrispondente sistema dinamico (25.4), per evitare ambiguità, distingueremo sempre tra la traiettoria  $t \rightarrow x(t)$  che descrive il moto per la (25.2) e la traiettoria nello spazio posizione-velocità  $t \rightarrow (x(t), \dot{x}(t))$  che esprime la soluzione di (25.4). Si noti in particolare che la traiettoria  $x(t)$  è data dalla proiezione sull'asse delle ascisse della traiettoria nello spazio posizione-velocità.

**26.8. Osservazione.** La legge di conservazione dell'energia (lemma 25.4) implica che le orbite sono curve dello spazio delle fasi contenute in una curva di livello: ogni

traiettoria  $t \rightarrow x(t)$  corrisponde a una traiettoria nello spazio posizione-velocità che si svolge all'interno di una stessa curva di livello. Una curva di livello può comunque contenere più orbite. Poiché le traiettorie su cui si svolgono i moti corrispondenti al sistema (25.2) sono continue, ogni orbita nello spazio posizione-velocità di tale sistema è contenuta in una componente connessa di una curva di livello. .

Quindi le curve di livello (26.1), con  $V$  di classe  $C^2$ , sono unione disgiunta di curve piane di classe  $C^2$ , più eventualmente i punti che corrispondono a posizioni d'equilibrio: tali punti saranno della forma  $(x, \dot{x}) = (x_0, 0)$ , e quindi saranno situati sull'asse delle ascisse (cfr. il lemma 27.7 più avanti).

Notiamo anche che un punto dello spazio delle fasi non può appartenere a più curve di livello, per il teorema 10.36 (teorema di unicità).

**26.9. TEOREMA.** *Dato il sistema meccanico (25.2), se l'energia potenziale  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata dal basso, i.e. se esiste una costante  $V_0$  tale che  $V(x) \geq V_0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora per ogni dato iniziale  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$ , le soluzioni  $\varphi(t, (\bar{x}, \dot{\bar{x}}))$  sono definite globalmente, i.e.  $\forall t \in \mathbb{R}$ .*

**26.10. Dimostrazione del teorema 26.9.** Dalle (25.5) e (25.7) deduciamo che

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x(t)))} \leq \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V_0)} \equiv C, \quad (26.4)$$

e quindi, integrando  $\dot{x}(t)$  e utilizzando la (26.4),

$$|x(t) - \bar{x}| \leq \int_0^t ds |\dot{x}(s)| \leq C|t|, \quad (26.5)$$

per ogni  $t$  per cui la soluzione  $x(t)$  sia definita.

Consideriamo allora, per  $T > 0$ , la regione

$$R_T = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : |x - \bar{x}| \leq CT, |\dot{x}| \leq C\}. \quad (26.6)$$

Se la soluzione  $x(t)$  non è definita globalmente deve esistere un intervallo massimale  $(\alpha, \beta)$  tale che  $x(t)$  è definita solo per  $t \in (\alpha, \beta)$ , con  $|\alpha|, |\beta|$  non entrambi infiniti. Supponiamo che sia  $\beta < \infty$ . Ma allora, per ogni  $t < \beta$  si ha  $x(t) \in R_\beta$  e quindi esisterebbe un compatto contenente la soluzione, in contraddizione con il corollario 12.23 (corollario al teorema del prolungamento). Analogamente si esclude che sia  $\alpha > -\infty$ . ■

**26.11. TEOREMA.** *Sia  $\gamma$  un arco di curva (di lunghezza finita) contenuto in una curva di livello  $\Gamma_E$ . Se  $\gamma$  non contiene punti d'equilibrio, allora il tempo di percorrenza di  $\gamma$  è finito, i.e. la traiettoria nello spazio posizione-velocità che parte da un estremo di  $\gamma$  raggiunge l'altro estremo in un tempo finito.*

**26.12. Dimostrazione del teorema 26.11.** Poniamo  $y = \dot{x}$  e  $z = (x, y)$ . Siano  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  gli estremi dell'arco di curva  $\gamma$ . Non è restrittivo considerare

il caso in cui  $\gamma$  si possa scrivere nella forma  $y = y(x)$  oppure  $x = x(y)$ : se non è così infatti, poiché  $\gamma$  è un arco di curva regolare, lo si può dividere in più pezzi ciascuno dei quali è esprimibile in una di tali forme.

Possiamo quindi assumere che  $\forall z \in \gamma$  si abbia

$$z = (x, y) = (x, y(x)), \quad x \in [x_1, x_2]. \quad (26.7)$$

Parametrizziamo la curva scrivendo

$$z = z(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad z(0) = z_1. \quad (26.8)$$

Vogliamo dimostrare che per ogni  $z_0 \in \gamma$  esiste un tempo  $t(z_0)$  tale che  $z(t(z_0)) = z_0$ , con  $t(z_0) < \infty$ .

Supponiamo per assurdo che esista  $z_0 \in \gamma$  tale che  $t(z_0) = \infty$ . Lungo  $\gamma$  si ha

$$\dot{z} = (\dot{x}, \dot{y}) = (y(x), -[dV/dx](x)), \quad (26.9)$$

dove

$$|y(x)| = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x))}, \quad x \in [x_1, x_2], \quad (26.10)$$

per la (25.8). Sia  $z_0 = (x_0, y_0)$ , con  $x_1 < x_0 \leq x_2$ . Poiché  $[x_1, x_2]$  è compatto, esiste

$$\min_{x \in [x_1, x_0]} |\dot{z}| = \min_{x \in [x_1, x_0]} \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x)) + \left(\frac{dV}{dx}(x)\right)^2} = a > 0, \quad (26.11)$$

dove la condizione  $a > 0$  segue dall'ipotesi che  $\gamma$  non contenga punti d'equilibrio. La lunghezza dell'arco di curva  $\gamma_0$  che connette  $z_1$  a  $z_0$  è allora data da (cfr. la nota bibliografica)

$$\ell_0 = \int_0^{t(z_0)} dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \equiv \int_0^{t(z_0)} dt |\dot{z}(t)| > at(z_0), \quad (26.12)$$

e poiché  $\ell_0 < \infty$  possiamo concludere che  $t(z_0)$  è finito. In particolare  $t(z_2) < \infty$ . ■

**26.13. COROLLARIO.** *Sia  $x_0$  un punto d'inversione del moto per la (25.2): allora esiste un intorno  $B(x_0)$  tale per ogni  $\bar{x} \in B(x_0)$ , con  $\bar{x} < x_0$  se  $[dV/dx](x_0) > 0$  e  $\bar{x} > x_0$  se  $[dV/dx](x_0) < 0$ , la traiettoria  $x(t)$  che parte da  $\bar{x}$  raggiunge  $x_0$  in un tempo  $t$  finito (con  $t > 0$  se  $\bar{x} < x_0$  e  $t < 0$  se  $\bar{x} > x_0$ ).*

**26.14. Dimostrazione del corollario 26.13.** Si consideri l'arco di curva nello spazio posizione-velocità che connette il punto  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$  con il punto  $(x_0, 0)$ . Per il teorema 26.11 il tempo di percorrenza di  $\gamma$  è finito, quindi in particolare è finito il tempo in cui la coordinata  $x$  passa dal valore  $\bar{x}$  al valore  $x_0$ . ■

## 27. Analisi qualitativa delle traiettorie: struttura delle orbite

**27.1. Notazioni.** Consideriamo una funzione  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  e sia  $V_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  tale che  $V(x) \geq V_0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (varrà il segno uguale per qualche  $x$  se  $V_0$  è un punto di minimo e il segno stretto se  $V_0$  è l'estremo inferiore di  $V$ : il secondo caso è possibile con  $V_0 > -\infty$  se  $y = V_0$  è un asintoto orizzontale per  $V$ ). Assumiamo anche che la funzione  $V$  abbia punti di minimo e di massimo isolati (cfr. §25.10).

Indichiamo inoltre con  $\mathcal{E}_m$  l'insieme dei punti di minimo della funzione  $V$ , con  $\mathcal{E}_M$  l'insieme dei punti di massimo, con  $\mathcal{E}_M^0$  l'insieme dei punti di massimo in cui la derivata seconda è diversa da zero e con  $\mathcal{E}_*$  l'insieme dei punti critici non in  $\mathcal{E}_m$ . Quindi se poniamo  $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_m \cup \mathcal{E}_*$ , si ha  $\mathcal{E}_M^0 \subset \mathcal{E}_M \subset \mathcal{E}_* \subset \mathcal{E}$ . Un esempio è discusso nella figura 27.1.

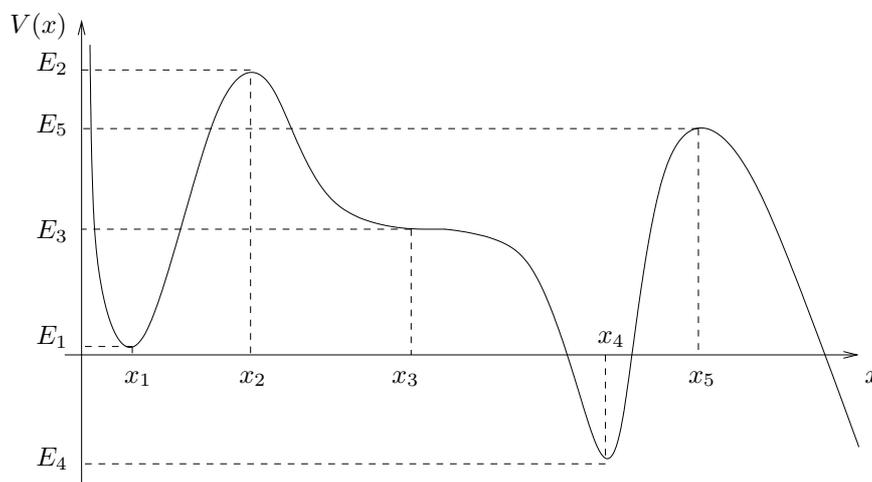


FIGURA 27.1. Esempio di energia potenziale e i corrispondenti insiemi  $\mathcal{E}_m = \{x_1, x_4\}$ ,  $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_M^0 = \{x_2, x_5\}$  e  $\mathcal{E}_* = \{x_2, x_3, x_5\}$ . I punti  $x_1$  e  $x_4$  sono punti di minimo relativo, i punti  $x_2$  e  $x_5$  sono punti di massimo relativo e il punto  $x_3$  è un punto di flesso orizzontale. La funzione  $V(x)$  è definita solo per  $x > 0$ , tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow 0$  e tende a  $-\infty$  per  $x \rightarrow \infty$ .

Il motivo per cui si distingue tra  $\mathcal{E}_M^0$  e  $\mathcal{E}_M \setminus \mathcal{E}_M^0$  risulterà chiaro dal lemma 27.23 e dal lemma 27.26 (cfr. in particolare (27.10) e (27.11) più avanti).

Se  $V$  è di classe  $C^p$ , con  $p \geq 2$ ,  $\mathcal{E}_*$  conterrà punti in cui sono nulle le derivate fino a qualche ordine  $p' \leq p$  strettamente maggiore di 1; in particolare, se  $x \in \mathcal{E}_*$  è un punto di flesso orizzontale, almeno la derivata seconda di  $V$  è nulla in  $x$ .

Denotiamo con  $V'(x_0)$  la derivata prima di  $V$  in  $x = x_0$ , con  $V''(x_0)$  la derivata seconda di  $V$  in  $x = x_0$  e con  $V'''(x_0)$  la derivata terza di  $V$  in  $x = x_0$ , se esiste; *e.g.* se

$x_0 \in \mathcal{E}_M^0$  si ha  $V'(x_0) = 0$  e  $V''(x_0) \neq 0$  e se  $x_0 \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$  si ha  $V'(x_0) = V''(x_0) = 0$  almeno.

Per ogni valore  $E \in \mathbb{R}$  indichiamo con  $X_E$  i valori  $x \in \mathbb{R}$  in corrispondenza dei quali risulta  $V(x) = E$  (cfr. §25.9): risulterà  $X_E = \{x_1, \dots, x_{\mathcal{N}}\}$ , con  $\mathcal{N} \geq 0$  per  $E \geq V_0$ . Consideriamo anche gli intervalli chiusi  $I_i$  (limitati o illimitati) contenuti in  $\mathbb{R}$  tali che

- (1)  $V(x) \leq E$  se  $x \in I_i$  per qualche  $i$  e
- (2)  $V(x) < E$  se  $x \in I_i \setminus \partial I_i$ ,

e poniamo  $\mathcal{I}_E = \{I_1, \dots, I_{\mathcal{N}'}\}$ , con  $\mathcal{N}' \geq 1$ . La condizione (2) implica che, se  $x_j \in \mathcal{E}_M$  e  $E = V(x_j)$ , allora  $x_j$  è contemporaneamente l'estremo destro di un intervallo  $I_i$  e l'estremo sinistro di un intervallo  $I_{i+1}$ . Sarà quindi  $\mathcal{N}' \leq \mathcal{N}$  se  $\mathcal{N} \geq 1$ : può valere il segno = perché gli intervalli possono avere un estremo in comune.

Se l'intervallo  $I_i$  è limitato risulta  $I_i = [x_j, x_{j+1}]$  per qualche  $j$ , a meno che non si abbia  $x_j \in \mathcal{E}_m$  e  $E = V(x_j)$ : in tal caso esiste allora un intervallo degenere  $I_i = \{x_j\}$  contenente il solo punto  $x_j$ . Se  $I_i$  è illimitato risulterà  $I_i = [x_{\mathcal{N}}, \infty)$ ,  $i = \mathcal{N}'$ , oppure  $I_i = (-\infty, x_1]$ ,  $i = 1$ . Gli ultimi due casi sono possibili solo se, rispettivamente,  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) \leq E$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) \leq E$ . Cfr. la figura 27.2 per il caso rappresentato nella figura 27.1 e per un fissato valore  $E$  dell'energia.

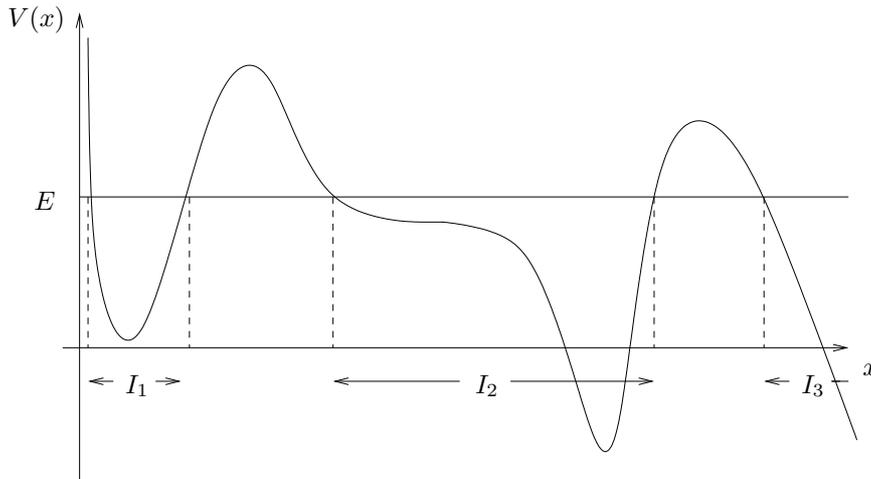


FIGURA 27.2. Fissato il valore di energia  $E$  il dominio di definizione della funzione  $V$  (nel caso in figura  $\mathbb{R}^+$ ) risulta suddiviso in tre intervalli  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ : i primi due sono chiusi e il terzo è aperto a destra.

Nel seguito analizzeremo le curve di livello corrispondenti al sistema (25.2) al variare dei valori che assume l'energia totale del sistema.

**27.2. LEMMA.** *Il punto  $x_0 \in X_E$  è un punto d'inversione del moto per il sistema*

(25.2) se e solo se  $x_0 \notin \mathcal{E}$ .

**27.3.** *Dimostrazione del lemma 27.2.* Se  $x_0$  è un punto d'inversione, allora si deve avere  $[dV/dx](x_0) \neq 0$  e quindi  $x_0 \notin \mathcal{E}$  poiché ogni punto in  $\mathcal{E}$  ha la derivata prima nulla. Viceversa, se  $x_0 \in X_E \setminus \mathcal{E}$  allora  $x_0$  è uno zero semplice di  $E - V(x)$  e quindi è un punto d'inversione. ■

**27.4.** DEFINIZIONE (VALORI CRITICI). *Chiameremo valori critici di  $V$*

(1) *i valori assunti da  $V$  in corrispondenza dei suoi punti critici (se esistono), i.e. dei punti  $x$  tali che  $[dV/dx](x) = 0$  e*

(2) *i valori corrispondenti agli asintoti orizzontali di  $V$  (se esistono).*

**27.5.** LEMMA. *Se la funzione  $V$  ammette un estremo inferiore  $V_0$  l'insieme di valori critici è non nullo. Non esistono curve di livello corrispondenti a valori dell'energia  $E < V_0$ .*

**27.6.** *Dimostrazione del lemma 27.5.* È ovvio dalla definizione 27.4 di valori critici e dalla definizione 26.3 di curva di livello. ■

**27.7.** LEMMA. *Consideriamo le curve di livello del sistema (25.2). Valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Le curve di livello sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse.*

(2) *Il moto nello spazio posizione-velocità si svolge su orbite appartenenti a curve di livello, verso destra nel semipiano superiore e verso sinistra nel semipiano inferiore.*

(3) *Si possono avere punti d'equilibrio solo sull'asse delle ascisse.*

**27.8.** *Dimostrazione del lemma 27.7.* La proprietà (1) segue semplicemente dal fatto che l'equazione (26.1) che definisce la curva di livello è simmetrica rispetto alla variabile  $y = \dot{x}$ . La proprietà (2) segue dal fatto che sulle ordinate è riportata la variabile  $\dot{x}$ . Quindi sul semipiano superiore  $\dot{x} > 0$ :  $x$  è crescente in  $t$ , quindi il moto è tale che avviene verso  $x$  più grandi, i.e. verso destra. Analogamente nel semipiano inferiore  $\dot{x} < 0$  e quindi ci si muove verso sinistra. Infine una posizione d'equilibrio richiede  $\dot{x} = 0$  e questo è possibile solo sull'asse delle ascisse: da qui segue la proprietà (3). ■

**27.9.** LEMMA. *Sia  $E > V_0$  e  $I \in \mathcal{I}_E$ ; se  $I$  è illimitato a destra,  $I = [x_N, \infty)$  e  $x_N \notin \mathcal{E}$ , allora l'orbita corrispondente nello spazio posizione-velocità è una curva aperta che*

(1) *interseca l'asse delle ascisse in  $x = x_N$  e*

(2) *tende a  $\pm\sqrt{(2/m)[E - V(\infty)]}$  per  $x \rightarrow +\infty$ , se  $V(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} V(x)$ .*

*Se  $V_0 > -\infty$  le traiettorie sono asintotiche, nel senso che,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = +\infty$  se  $(x_0, \dot{x}_0) \in \Gamma_E$  con  $x_0 \geq x_N$ .*

**27.10.** *Dimostrazione del lemma 27.9.* Poiché l'energia è costante sulle curve di livello, per  $x = x_N$ , si ha  $E = V(x)$  e quindi  $\dot{x} = 0$ . Se poniamo  $V(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} V(x)$

(dove  $V(\infty) \leq E$  può anche essere  $-\infty$  se  $V_0 = -\infty$ ), si ha

$$E = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) + V(\infty), \quad (27.1)$$

che dà il valore asintotico di  $\dot{x} = y \equiv y(x)$ , tenuto conto che  $V(\infty) \leq E$  per ipotesi (se così non fosse, l'intervallo  $I$  non sarebbe illimitato).

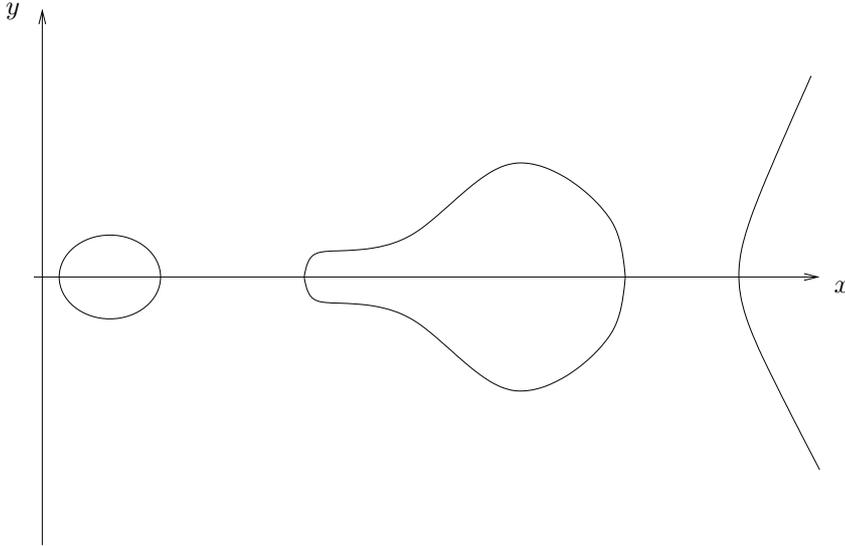


FIGURA 27.3. Curva di livello  $\Gamma_E$  corrispondente al valore di energia  $E$  della figura 27.2:  $\Gamma_E$  è costituita da tre componenti connesse, ciascuna delle quali rappresenta un'orbita.

Il campo vettoriale che descrive il sistema dinamico corrispondente (25.4) è dato da  $(y, -dV/dx)$  e quindi non è mai nullo poiché  $y = 0$  per  $x = x_N$  e  $x_N \notin \mathcal{E}$ ; quindi per il teorema 26.11 non possono esistere punti  $x_{\pm}$  tali che  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_{\pm}$ , con  $x_{\pm} < \infty$ . D'altra parte se  $V_0 > -\infty$  la soluzione  $x(t)$  non può neppure divergere a  $+\infty$  in un tempo finito, perché deve essere definita globalmente (cfr. il teorema 26.9). Quindi  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = +\infty$ . ■

**27.11. LEMMA.** *Sia  $E > V_0$  e  $I \in \mathcal{I}_E$ ; se  $I$  è illimitato a sinistra,  $I = (-\infty, x_1]$  e  $x_1 \notin \mathcal{E}$ , allora l'orbita corrispondente nello spazio posizione-velocità è una curva aperta che*

(1) *interseca l'asse delle ascisse in  $x = x_1$  e*

(2) *tende a  $\pm \sqrt{(2/m)[E - V(-\infty)]}$  per  $x \rightarrow -\infty$ , se  $V(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x)$ .*

*Le traiettorie sono asintotiche, nel senso che,  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = -\infty$  se  $(x_0, \dot{x}_0) \in \Gamma_E$ ,*

con  $x_0 \leq x_1$ .

**27.12.** *Dimostrazione del lemma 27.11.* La dimostrazione è assolutamente analoga a quella del Lemma 27.9. ■

**27.13.** **TEOREMA.** *Se  $E$  non è un valore critico di  $V$  e  $I \in \mathcal{I}_E$  è illimitato, la componente connessa della curva di livello  $\Gamma_E$ , contenente i punti  $(x, \dot{x})$  con  $x \in I$ , è una curva aperta diffeomorfa a una retta.*

**27.14.** *Dimostrazione del teorema 27.13.* È una conseguenza dei Lemmi 27.9 e 27.11; in particolare se  $V$  è di classe  $C^2$  la soluzione

$$t \in (-\infty, \infty) \rightarrow (x(t), \dot{x}(t)) \quad (27.2)$$

stabilisce un'applicazione invertibile di classe  $C^2$  (e quindi un diffeomorfismo) tra la retta e l'orbita nello spazio posizione-velocità, che costituisce una componente connessa di  $\Gamma_E$ . ■

**27.15.** *Osservazione.* Le curve aperte del teorema 27.13 sono quindi rettificabili (non solo localmente, come segue dal teorema 19.2 (teorema della scatola di flusso), non contenendo punti d'equilibrio, ma anche globalmente, come segue dal teorema 27.13) e stabili, nel senso che per ogni compatto  $K \in \mathbb{R}^2$  la distanza tra  $\Gamma_E \cup K$  e  $\Gamma_{E+\varepsilon} \cup K$  è di ordine  $\varepsilon$ , purché  $\varepsilon$  sia sufficientemente piccolo in modo che anche  $I_{E+s\varepsilon}$  non contenga punti di  $\mathcal{E}$  per  $s \in [0, 1]$ .

Un esempio di curva a cui si applica il teorema 27.13 è costituita dalla curva a destra nella figura graf(27.3).

**27.16.** **LEMMA.** *Sia  $E \geq V_0$  e  $I \in \mathcal{I}_E$ ; se  $I = \{x_j\}$  per qualche  $1 \leq j \leq \mathcal{N}$ , allora risulta  $x_j \in \mathcal{E}_m$  e la traiettoria corrispondente è data da  $x(t) \equiv x_j$  per ogni  $t$ , con  $\dot{x}(t) \equiv 0$ .*

**27.17.** *Dimostrazione del lemma 27.16.* Segue dalla conservazione dell'energia e dal fatto che le condizioni  $V(x_j) = E$  e  $I = \{x_j\}$  implicano che  $V(x) > E$  per ogni  $x$  appartenente a un intorno sufficientemente piccolo di  $x_j$ . Possiamo quindi applicare il teorema 25.11, caso (1). ■

**27.18.** **LEMMA.** *Sia  $E > V_0$  e  $I \in \mathcal{I}_E$ ; se  $I = [x_j, x_{j+1}]$  per qualche  $1 \leq j \leq \mathcal{N}-1$ , con  $x_j, x_{j+1} \notin \mathcal{E}$ , allora l'orbita corrispondente nello spazio posizione-velocità è un'orbita chiusa che*

- (1) *interseca l'asse delle ascisse in due punti  $x_j$  e  $x_{j+1}$  e*
- (2) *corrisponde a una traiettoria  $x(t)$  periodica.*

**27.19.** *Dimostrazione del lemma 27.18.* La conservazione dell'energia implica che per  $x = x_j$  e per  $x = x_{j+1}$ , si ha  $V(x) = E$  e quindi  $\dot{x} = 0$ . Inoltre, per  $x \in I$ ,  $V(x)$  è continua e limitata, quindi la parte dell'orbita che va da  $x_j$  a  $x_{j+1}$ , nello spazio

posizione-velocità, è continua e limitata e l'orbita totale si ottiene per riflessione rispetto all'asse delle ascisse (per la proprietà (1) del lemma 27.7): quindi l'orbita deve essere chiusa.

Inoltre i punti  $x_j$  e  $x_{j+1}$  sono punti di regolarità, come segue dal lemma 26.4 (utilizzando il fatto che per ipotesi  $x_j$  e  $x_{j+1}$  non sono punti critici di  $V$ ). Questo si può anche verificare esplicitamente notando che, esprimendo  $y = \dot{x}$  in funzione di  $x$ , *i.e.*  $y = y(x)$  (cfr. la (25.8)), si ha

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2m(E - V(x))}} \frac{dV}{dx}(x), \quad (27.3)$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_j} \left| \frac{dy}{dx} \right| = \lim_{x \rightarrow x_{j+1}} \left| \frac{dy}{dx} \right| = \infty, \quad (27.4)$$

che significa che l'angolo che la tangente alla curva  $y(x)$ , in corrispondenza delle intersezioni dell'orbita con l'asse delle ascisse, forma con quest'ultimo è  $\pi/2$ .

Poiché non ci sono punti d'equilibrio lungo l'orbita (i punti  $x_j$  e  $x_{j+1}$  non sono in  $\mathcal{E}$  per ipotesi e per tutti gli altri punti  $(x, \dot{x})$  dell'orbita si ha  $\dot{x} \neq 0$ ; d'altra parte i punti d'equilibrio devono sempre giacere sull'asse delle ascisse, cfr. la proprietà (3) del lemma 27.7), per il teorema 26.11 non possono esistere punti  $x_{\pm} \in I$  tali che  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_{\pm}$ : quindi la traiettoria nello spazio posizione-velocità che parte da un punto qualsiasi  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \in \Gamma_E$ ,  $\bar{x} \in I$ , deve ritornare nel punto di partenza dopo un tempo finito e, per il teorema 10.36 (teorema di unicità), è di conseguenza periodica; in particolare sarà periodica la traiettoria  $t \rightarrow x(t)$ . ■

**27.20. TEOREMA.** *Se  $E$  non è un punto critico di  $V$  e  $I \in \mathcal{I}_E$  è limitato, la componente connessa  $\gamma$  della curva di livello  $\Gamma_E$ , contenente i punti  $(x, \dot{x})$  con  $x \in I$ , è una curva chiusa diffeomorfa a un cerchio. Se  $E = E_0 + \varepsilon^2$ , con  $E_0 = V(x_0)$ ,  $x_0 \in \mathcal{E}_m$ , per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, l'orbita  $\gamma$  differisce per infinitesimi di ordine  $O(\varepsilon)$  da un'ellisse con semiassi di ordine  $O(\varepsilon)$ .*

**27.21. Dimostrazione del teorema 27.20.** È una conseguenza del lemma 27.18; in particolare la soluzione, essendo periodica, verifica la relazione

$$x(t+T) = x(t), \quad T > 0, \quad (27.5)$$

dove  $T$  è il *periodo* del moto, e quindi se  $V$  è di classe  $C^2$

$$t \in [0, T] \rightarrow (x(t), \dot{x}(t)) \quad (27.6)$$

stabilisce un'applicazione invertibile di classe  $C^2$  (e quindi un diffeomorfismo) tra il cerchio di lunghezza  $T$  e l'orbita nello spazio posizione-velocità, che è una componente connessa di  $\Gamma_E$ .

Inoltre, in corrispondenza di valori dell'energia  $E = E_0 + \varepsilon^2$ , per  $\varepsilon$  piccolo, l'orbita  $\gamma$  assume la forma

$$\frac{1}{2}my^2 + c(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) = \varepsilon^2, \quad c = \frac{1}{2}V''(x_0) \quad (27.7)$$

dove  $V''(x_0) > 0$  è la derivata seconda di  $V(x)$  calcolata in  $x = x_0$ . Quindi  $\gamma$  differisce da un'ellisse di semiassi di ordine  $O(\varepsilon)$  a meno di infinitesimi in  $\varepsilon$  di ordine superiore al secondo. ■

**27.22. Osservazione.** Le curve chiuse del teorema 27.20 sono localmente rettificabili (per il teorema della scatola di flusso 19.2, non contenendo punti d'equilibrio) e stabili, nel senso che per ogni compatto  $K \in \mathbb{R}^2$  la distanza tra  $\Gamma_E \cup K$  e  $\Gamma_{E+\varepsilon} \cup K$  è di ordine  $\varepsilon$ , purché  $\varepsilon$  sia sufficientemente piccolo in modo che anche  $I_{E+s\varepsilon}$  non contenga punti di  $\mathcal{E}$  per  $s \in [0, 1]$ . L'orbita ha diametro che tende a zero per  $E \rightarrow E_0$  se  $E_0 = V(x_0)$  per qualche  $x_0 \in \mathcal{E}_m$  (caso del lemma 27.16). Si noti che il punto  $x_0$  è un punto di equilibrio stabile, per il teorema 18.30.

Esempi di curve a cui si applica il teorema 27.20 sono la curva a sinistra e la curva al centro nella figura 27.3.

**27.23. LEMMA.** Sia  $E > V_0$  e  $I \in \mathcal{I}_E$ ; se  $I = [x_j, x_{j+1}]$  per qualche  $1 \leq j \leq \mathcal{N} - 1$ , con  $x_j \notin \mathcal{E}$  e  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$ , allora ci sono due orbite corrispondenti nello spazio posizione-velocità:

- (1) una è una curva aperta che (25.1) interseca l'asse delle ascisse nel punto  $x_j$  e (25.2) corrisponde a una traiettoria  $x(t)$  asintotica a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ , per ogni dato iniziale  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \in \Gamma_E$ , con  $\bar{x} \in [x_j, x_{j+1}]$ ;
- (2) l'altra è costituita dall'unico punto  $x_{j+1}$  e la corrispondente traiettoria è  $x(t) \equiv x_{j+1} \forall t \in \mathbb{R}$ .

La componente connessa  $\gamma$  della curva di livello  $\Gamma_E$  che contiene le due orbite ha una cuspidine in  $x_{j+1}$ .

Se  $x_{j+1} \notin \mathcal{E}$  e  $x_j \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$ , valgono simili considerazioni, con il ruolo dei due punti scambiato.

Analogamente si discute il caso  $x_j, x_{j+1} \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$ : si hanno due traiettorie, una asintotica a  $x_j$  per  $t \rightarrow -\infty$  e a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow \infty$ , l'altra asintotica a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow -\infty$  e a  $x_j$  per  $t \rightarrow +\infty$  (a seconda che la velocità iniziale sia  $\dot{\bar{x}} > 0$  o  $\dot{\bar{x}} < 0$ ).

**27.24. Dimostrazione del lemma 27.23.** Si procede come per la dimostrazione dei lemmi precedenti. Inoltre, poiché per ipotesi  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$ , si ha  $V'(x_{j+1}) = V''(x_{j+1}) = 0$  e quindi in un intorno di  $x_{j+1}$  risulta

$$V(x) = V(x_{j+1}) + c(x - x_{j+1})^3 + O((x - x_{j+1})^4), \quad c = \frac{1}{3!}V'''(x_{j+1}), \quad (27.8)$$

se  $c \neq 0$ , e quindi in un intorno sufficientemente piccolo di  $x_{j+1}$  l'equazione della curva di livello  $\Gamma_E$  è data da

$$\frac{1}{2}my^2 + c(x - x_{j+1})^3 + O((x - x_{j+1})^4) = 0, \quad (27.9)$$

così che, in un intorno sinistro di  $x_{j+1}$  si ha

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2c}{m}} (x_{j+1} - x)^{3/2} + O((x_{j+1} - x)^{5/2}), \quad (27.10)$$

che ha una cuspidine in  $x_{j+1}$ . Se  $c = 0$  e la prima derivata non nulla in  $x_{j+1}$  è la derivata di ordine  $p > 3$ , allora varrà ancora un'espressione della forma (27.10) con gli esponenti  $3/2$  sostituiti da  $p/2$ : quindi si ha in ogni caso una cuspidine.

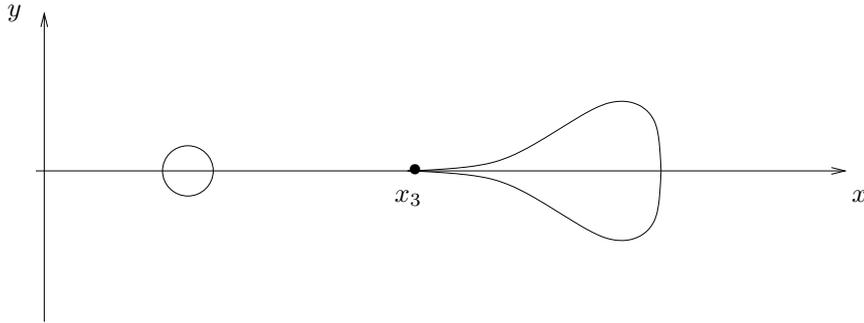


FIGURA 27.4. Curva di livello  $\Gamma_{E_3}$  corrispondente al valore di energia  $E_3$  tale che  $V(x_3) = E_3$ , dove  $V$  è l'energia potenziale graficata nella figura 27.1 e  $x_3 \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M$  è un punto di flesso orizzontale. Si hanno due orbite, una regolare e una con una cuspidine in  $x_3$ .

Il fatto che le traiettorie siano asintotiche segue dal corollario 12.23 (corollario al teorema del prolungamento), tenuto conto che per  $t > 0$  o per  $t < 0$ , rispettivamente, le traiettorie  $t \rightarrow (x(t), \dot{x}(t))$  hanno luogo in una regione limitata. ■

**27.25. Osservazione.** L'orbita aperta del lemma 27.23 è topologicamente equivalente alle orbite vicine (cioè corrispondenti a valori di energia sufficientemente vicini a  $E$ , ma non è a esse diffeomorfa, essendo il punto  $(x_{j+1}, 0)$  una cuspidine per  $\Gamma_E$ .

Un esempio di curva a cui si applicano i risultati del lemma 27.23 è la curva a destra nella figura 27.4.

**27.26. LEMMA.** Sia  $E > V_0$  e  $I = [x_j, x_{j+1}] \in \mathcal{I}_E$ ; se  $x_j$  appartiene a  $\mathcal{E}_M^0$  e  $x_{j+1} \notin \mathcal{E}$ , allora

- (1) il punto  $x_j$  costituisce un'orbita corrispondente a un punto d'equilibrio instabile  $(x, \dot{x}) = (x_j, 0)$  per il sistema dinamico (25.4), mentre
- (2) i dati iniziali  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \in \Gamma_E$  con  $\bar{x} \in (x_j, x_{j+1}]$  si trovano su un'orbita percorsa da traiettorie  $x(t)$  che sono asintotiche a  $x_j$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ .

La componente connessa  $\gamma$  della curva di livello  $\Gamma_E$  che contiene le due orbite ha in  $x_j$  un vertice (i.e. ha tangenza obliqua in  $x_j$ ).

Analoghi risultati valgono se invece  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_M^0$  e  $x_j \notin \mathcal{E}$ .

Se  $x_j, x_{j+1}$  appartengono entrambi a  $\mathcal{E}_M^0$ , allora  $x_j$  e  $x_{j+1}$  sono punti d'equilibrio instabile e le traiettorie  $x(t)$  che si originano da  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \in \Gamma_E$ , con  $\bar{x} \in (x_j, x_{j+1})$ , sono asintotiche

- (1) a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow \infty$  e a  $x_j$  per  $t \rightarrow -\infty$  se  $\dot{\bar{x}} > 0$ , e
- (2) a  $x_j$  per  $t \rightarrow \infty$  e a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow -\infty$  se  $\dot{\bar{x}} < 0$ .

**27.27.** *Dimostrazione del lemma 27.26.* Si ragiona come per la dimostrazione dei lemmi precedenti. Se  $x_j \in \mathcal{E}_M^0$ , le curve di livello, in un intorno destro di  $x_j$ , assumono la forma

$$y = \pm \sqrt{\frac{2c}{m}} |x - x_j| + O((x - x_j)^{3/2}), \quad c = \frac{1}{2!} |V''(x_0)|. \quad (27.11)$$

come si può ottenere facilmente ragionando come in §27.25. Analoghe considerazioni valgono se  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_M^0$ , considerando un intorno sinistro di  $x_{j+1}$ . Ovviamente se un intervallo  $[x_j, x_{j+1}]$  è tale che il suo estremo sinistro  $x_j$  è in  $\mathcal{E}_M^0$ , esiste allora un intervallo contiguo  $[x_{j-1}, x_j]$  (oppure  $(-\infty, x_j]$ ,  $j = 1$ ) il cui estremo destro è in  $\mathcal{E}_M^0$ ; simili considerazioni si possono fare se  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_M^0$ . Quindi esiste un intorno (destro e sinistro insieme) in cui le curve di livello assumono la forma (27.11).

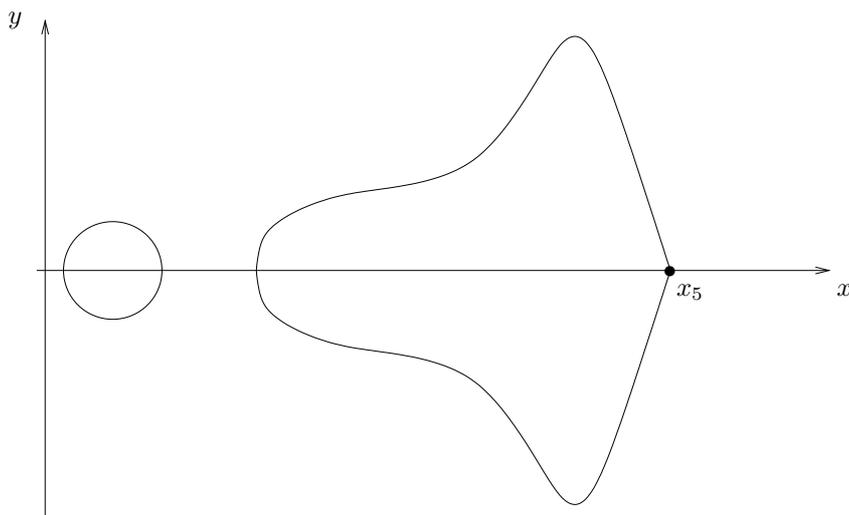


FIGURA 27.5. Curva di livello  $\Gamma_{E_5}$  corrispondente al valore di energia  $E_5$  tale che  $V(x_5) = E_5$ , dove  $V$  è l'energia potenziale graficata nella figura 27.1 e  $x_5 \in \mathcal{E}_M^0$  è un punto di massimo. Si hanno tre orbite: una curva regolare, una curva con una cuspidi in  $x_5$  e il punto d'equilibrio  $x_5$ .

Come in §27.24 il corollario 12.23 implica che le traiettorie sono asintotiche a  $x_{j+1}$  se  $\dot{\bar{x}} > 0$  e a  $x_j$  se  $\dot{\bar{x}} < 0$ . ■

**27.28.** *Osservazione.* Si noti un punto  $x_j$  in  $\mathcal{E}_M^0$  corrisponde a un punto d'equilibrio

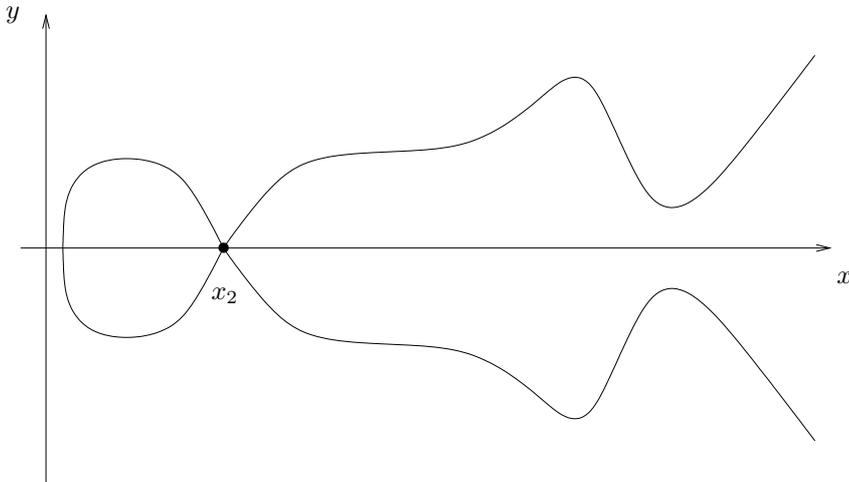


FIGURA 27.6. Curva di livello  $\Gamma_{E_2}$  corrispondente al valore di energia  $E_2$  tale che  $V(x_2) = E_2$ , dove  $V$  è l'energia potenziale graficata nella figura 27.1 e  $x_2 \in \mathcal{E}_M^0$  è un punto di massimo. Si hanno tre orbite: due curve con una cuspidi in  $x_2$  e il punto d'equilibrio  $x_2$ .

instabile  $(x_j, 0)$  per il sistema dinamico corrispondente (25.4). Infatti, dalla forma delle curva di livello contenente  $x_j$  e dalla proprietà (2) del lemma 27.7, possiamo concludere che esistono direzioni lungo cui ci si allontana e direzioni lungo cui ci si avvicina a  $x_j$  (che corrispondono, rispettivamente, ad autovalori positivi e negativi della matrice del sistema linearizzato; cfr. l'esercizio 9).

Esempi di curve a cui si applica il lemma 27.26 sono la curva a destra della figura 27.5 e la curva della figura 27.6.

**27.29. LEMMA.** *Sia  $E > V_0$  e  $I = [x_N, \infty) \in \mathcal{I}_E$ ; se  $x_N$  appartiene a  $\mathcal{E}_*$ , allora il punto  $x_j$  corrisponde a un punto d'equilibrio instabile  $(x, \dot{x}) = (x_N, 0)$  per il sistema dinamico (25.4), mentre i dati iniziali  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \in \Gamma_E$  con  $\bar{x} \in (x_N, \infty)$  generano traiettorie  $x(t)$  che sono asintotiche*

(1) a  $x_N$  per  $t \rightarrow -\infty$  e a  $+\infty$  per  $t \rightarrow \infty$  se  $\dot{\bar{x}} > 0$ , e

(2) a  $+\infty$  per  $t \rightarrow -\infty$  e a  $x_N$  per  $t \rightarrow \infty$  se  $\dot{\bar{x}} < 0$ .

Analoghi risultati valgono se invece  $I = (-\infty, x_1]$ , con  $x_1 \in \mathcal{E}_*$ .

**27.30. Dimostrazione del lemma 27.29.** Segue come corollario dall'analisi necessaria per dimostrare il lemma 27.9, il lemma 27.11 e il lemma 27.26. ■

**27.31. TEOREMA.** *Se  $E$  è un valore critico di  $V$  e  $I \in \mathcal{I}_E$ , ogni componente connessa della curva di livello  $\Gamma_E$ , contenente punti  $(x, \dot{x})$  con  $x \in I \setminus \partial I$ , è una curva aperta diffeomorfa a una retta, percorsa da traiettorie nello spazio posizione-velocità corrispon-*

enti a traiettorie  $x(t)$  asintotiche a qualche estremo (finito o infinito) dell'intervallo  $I$ .

**27.32.** *Dimostrazione del teorema 27.31.* Segue dal lemma 27.23, dal lemma 27.26 e dal lemma 27.29: infatti se  $E$  è un punto critico, allora almeno un estremo di  $I$  deve essere in  $\mathcal{E}_* = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_m$ . In particolare il diffeomorfismo è stabilito dalla soluzione  $t \rightarrow (x(t), \dot{x}(t))$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . ■

**27.33.** DEFINIZIONE (TRAIETTORIE OMOCLINE ED ETEROCLINE). *Una traiettoria  $x(t)$  si dice omoclina se, per  $t \rightarrow \pm\infty$ , è asintotica allo stesso punto. Una traiettoria si dice eteroclina se è asintotica a due punti diversi per  $t \rightarrow +\infty$  e per  $t \rightarrow -\infty$ .*

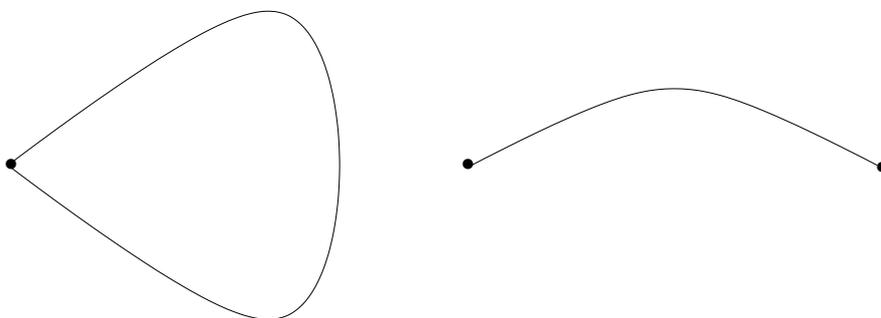


FIGURA 27.7. Esempi di traiettorie omocline ed eterocline.

**27.34.** DEFINIZIONE (SEPARATRICI). *Le componenti connesse di una curva di livello che sono orbite di traiettorie nello spazio posizione-velocità asintotiche a uno stesso punto d'equilibrio instabile prendono il nome di separatrici.*

**27.35.** TEOREMA. *Se  $I = [x_j, x_{j+1}]$  con  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_* = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_m$  e  $x_j \notin \mathcal{E}$ , allora la traiettoria  $x(t)$  con dati iniziali  $(x_0, \dot{x}_0) \in \Gamma_E$ , dove  $x_0 \in I \setminus \{x_{j+1}\}$ , è omoclina. Analogamente, se  $x_j \in \mathcal{E}_*$  e  $x_{j+1} \notin \mathcal{E}$ , allora la traiettoria  $x(t)$  con dati iniziali  $(x_0, \dot{x}_0) \in \Gamma_E$ , dove  $x_0 \in I \setminus \{x_j\}$ , è omoclina.*

**27.36.** *Dimostrazione del teorema 27.35.* La dimostrazione segue immediatamente dal lemma 27.23, dal lemma 27.26, dal lemma 27.29 e dalla definizione 27.33. ■

**27.37.** COROLLARIO. *Dato il sistema meccanico unidimensionale (25.2) e fissata l'energia  $E$ , una componente connessa chiusa  $\gamma$  della curva di livello  $\Gamma_E$  è percorsa da una traiettoria periodica se e solo se  $\gamma$  non contiene punti d'equilibrio. Le intersezioni di  $\gamma$  con l'asse  $\dot{x} = 0$  sono punti d'inversione del moto.*

**27.38.** *Dimostrazione del corollario 27.37.* Segue dall'analisi precedente. ■

## 28. Periodi e tempi di percorrenza delle orbite

**28.1. Introduzione.** Nel presente paragrafo vogliamo mostrare che è sempre possibile scrivere il tempo di percorrenza di un arco di curva di livello non contenente punti d'equilibrio come integrale definito o, al più, come somma di integrali definiti. In particolare si potrà scrivere sempre come integrale definito il periodo di una qualsiasi traiettoria periodica.

Per poter determinare il valore numerico del tempo di percorrenza (e quindi, in particolare, del periodo) occorrerà naturalmente calcolare l'integrale. Non sempre questo è possibile analiticamente: non è infatti detto che la funzione integranda rientri nella classe delle funzioni di cui si sappia calcolare l'integrale.

Ovviamente si può sempre cercare di calcolare l'integrale numericamente. A volte può essere utile, però, avere semplicemente una stima del valore numerico del periodo, senza calcolarne il valore esatto. Vedremo nel prossimo paragrafo alcuni metodi per stimare i periodi delle traiettorie periodiche.

**28.2. Notazioni.** Consideriamo il sistema (25.2), con energia fissata a un valore  $E$ . Sia  $\Gamma_E$  una curva di livello e siano  $P_1 = (x_1, \dot{x}_1)$  e  $P_2 = (x_2, \dot{x}_2)$  due punti appartenenti alla stessa componente connessa di  $\Gamma_E$ , con  $x_1 < x_2$  e  $\dot{x}_1, \dot{x}_2 > 0$ . Indichiamo con  $\gamma$  la parte di  $\Gamma_E$  compresa tra  $P_1$  e  $P_2$ ; per costruzione essa non interseca l'asse delle ascisse (quindi, in particolare, non contiene punti d'equilibrio). Allora il tempo di percorrenza  $\tau$  di  $\gamma$  da  $P_1$  a  $P_2$  è dato da

$$\tau(P_1, P_2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}}, \quad (28.1)$$

come si può ottenere immediatamente dalla (25.5), per separazione di variabili. Infatti risulta

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}, \quad (28.2)$$

e il segno  $+$  è fissato dal dato iniziale  $\dot{x}_1 > 0$ : il verso di percorrenza è ovviamente da sinistra verso destra (per la proprietà (2) del lemma 27.7); cfr. la figura 28.1.

Se al contrario fosse stato  $x_1 > x_2$  e  $\dot{x}_1, \dot{x}_2 < 0$ , il tempo di percorrenza  $\tau$  sarebbe stato dato ancora dalla (28.1) in quanto i due estremi di integrazione sarebbero stati invertiti e, nel contempo, in (28.2) il segno sarebbe stato  $-$  (in tal caso, ovviamente, il verso di percorrenza sarebbe stato da destra a sinistra).

In generale, quindi, purché il segno di  $\dot{x}(t)$  si mantenga costante durante la traiettoria (*i.e.* la parte di  $\gamma$  compresa tra  $P_1$  e  $P_2$  non intersechi l'asse delle ascisse), potremmo scrivere che il tempo perché il sistema si muova dal punto  $P_1$  al punto  $P_2$  è dato da

$$\tau(P_1, P_2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} \right|, \quad (28.3)$$

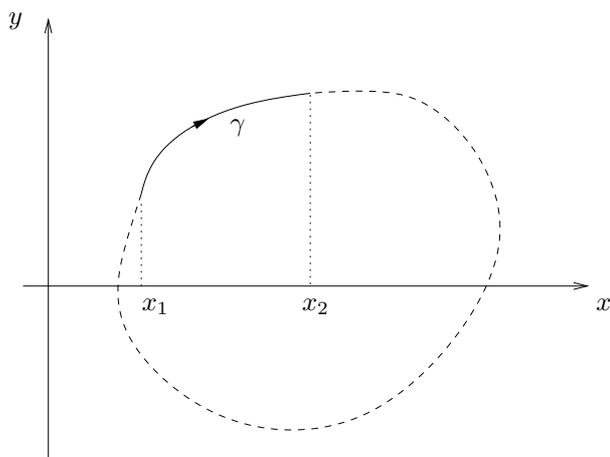


FIGURA 28.1. Esempio di curva  $\gamma$  compresa tra due punti  $P_1$  e  $P_2$  nel semipiano superiore; la curva tratteggiata rappresenta la curva di livello  $\Gamma_E$  contenente  $\gamma$ .

dove il modulo permette di ignorare se  $x_1 < x_2$  o  $x_1 > x_2$ .

Supponiamo ora che, al contrario,  $\gamma$  intersechi l'asse delle ascisse. Sia  $P_0 = (x_0, \dot{x}_0)$  tale punto (o uno di tali punti, se ce ne sono più di uno). Sono possibili due casi:  $P_0$  può essere o non essere un punto d'equilibrio.

**28.3. LEMMA.** *Sia  $\Gamma_E$  una curva di livello del sistema (25.4) e sia  $P_0 = (x_0, 0) \in \Gamma_E$  un punto d'equilibrio. Sia  $P_1 \in \Gamma_E$  tale che*

- (1)  $P_1 = (x_1, \dot{x}_1)$ , con  $x_1 < x_0$  e  $\dot{x}_1 \neq 0$ ,
- (2)  $P_1$  giace sulla stessa componente connessa di  $\Gamma_E$  che contiene  $P_0$  e
- (3) non vi è tra essi alcun altro punto d'equilibrio.

*Allora la traiettoria che parte da  $P_1$  tende a  $P_0$  per  $t \rightarrow \infty$  (se  $\dot{x}_1 > 0$ ) o per  $t \rightarrow -\infty$  (se  $\dot{x}_1 < 0$ ).*

*Se valgono le stesse condizioni (1)÷(3), con  $x_1 > x_0$  in (2), allora la traiettoria che parte da  $P_1$  tende a  $P_0$  per  $t \rightarrow \infty$  (se  $\dot{x}_1 < 0$ ) o per  $t \rightarrow -\infty$  (se  $\dot{x}_1 > 0$ ).*

**28.4. Dimostrazione del lemma 28.3.** Il lemma 28.3 è implicato dal teorema 27.31; qui diamo una dimostrazione alternativa usando l'espressione (28.3) del tempo di percorrenza.

Consideriamo il caso  $x_1 < x_0$  (il caso  $x_1 > x_0$  si discute allo stesso modo). Supponiamo anche per il momento che sia  $x_0 \in \mathcal{E}_M$ . Poiché, nelle vicinanze del punto  $P_0$ , che deve essere un punto d'equilibrio instabile, le curve di livello assumono la forma (27.11), l'integrale

$$\tau(P_1, P_0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} \right| \tag{28.4}$$

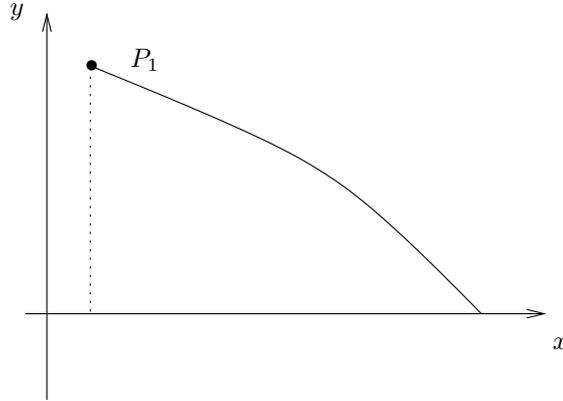


FIGURA 28.2. Discussione del lemma 28.3.

è divergente comunque sia scelto il punto iniziale, come è facile verificare utilizzando il criterio del confronto per la convergenza degli integrali. Infatti possiamo utilizzare l'additività degli integrali per scrivere l'integrale in (28.4) come somma di due integrali, *i.e.*

$$\tau(P_1, P_0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{x_1}^{x_0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(E-V(x))}} + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(E-V(x))}} \right|. \quad (28.5)$$

dove  $\varepsilon$  è tale che

$$\begin{aligned} |y| \equiv |\dot{x}| &\leq 2\sqrt{\frac{2c}{m}} |x - x_0|, \\ E - V(x) &\geq E - V(x_0 - \varepsilon) \quad \forall x \in [x_1, x_0 - \varepsilon], \end{aligned} \quad (28.6)$$

per  $|x - x_0| < \varepsilon$  (questo è possibile per continuità, per la (27.11) e poiché, per ipotesi,  $\dot{x}_1 \neq 0$ ). Quindi in (28.5), utilizzando la (25.8) e il fatto che  $x_0$  deve essere un punto di massimo, possiamo stimare

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(E-V(x))}} \right| &\leq \frac{|x_0 - \varepsilon - x_1|}{\min_{x \in [x_1, x_0-\varepsilon]} \{\sqrt{(E-V(x-\varepsilon))}\}} \\ &\leq \frac{|x_0 - x_1|}{\{\sqrt{(E-V(x_0-\varepsilon))}\}} < \infty, \\ \left| \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(E-V(x))}} \right| &\geq \sqrt{\frac{1}{4c}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{|x - x_0|}, \end{aligned} \quad (28.7)$$

e il secondo integrale in (28.7) diverge.

In particolare se  $\dot{x}_1 > 0$  la traiettoria si muove verso  $P_0$  per  $t \rightarrow \infty$ , se  $\dot{x}_1 < 0$  la traiettoria si muove verso  $P_0$  per  $t \rightarrow -\infty$ .

Se  $x_0 \notin \mathcal{E}_M$  allora in luogo della (27.11) si deve utilizzare la (27.10) (eventualmente con  $3/2$  sostituito da  $p/2$ ; cfr. i commenti finali in §27.25) e valgono le stesse conclusioni. ■

**28.5. LEMMA.** *Sia  $\Gamma_E$  una curva di livello del sistema (25.3) e sia  $P_0 = (x_0, 0)$  un punto di  $\Gamma_E$  sull'asse delle ascisse che non è un punto d'equilibrio. Sia  $P_1 \in \Gamma_E$  tale che (1)  $P_1 = (x_1, \dot{x}_1)$ , con  $\dot{x}_1 \neq 0$ , e (2)  $P_1$  giace sulla stessa componente connessa di  $\Gamma_E$  che contiene  $P_0$  e non vi è tra essi alcun punto d'equilibrio. Allora la traiettoria che parte da  $P_1$  raggiunge  $P_0$  in un tempo finito.*

**28.6. Dimostrazione del lemma 28.5.** Come per il lemma 28.3, anche il lemma 28.5 è stato già dimostrato (cfr. il lemma 27.18 e il teorema 27.20); qui diamo una dimostrazione alternativa usando l'espressione (28.3) e ottenendo quindi anche un'espressione esplicita del tempo di percorrenza.

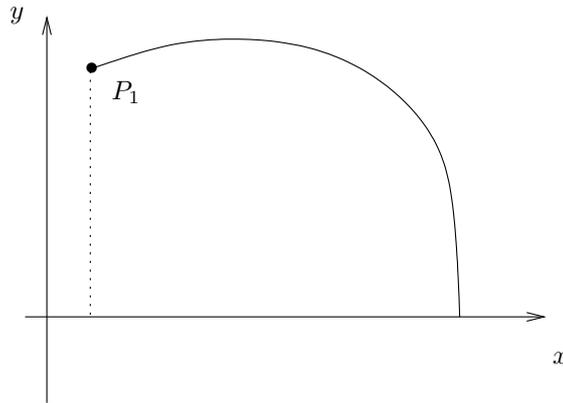


FIGURA 28.3. Discussione del lemma 28.5.

Poiché  $[dV/dx](x_0) \neq 0$ , l'integrale che esprime il tempo di percorrenza, *i.e.*

$$\tau(P_1, P_0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} \right| \tag{28.8}$$

è convergente. Questo si può vedere ragionando come in §28.4: si scrive l'integrale come somma di due integrali, di cui uno è finito perché il divisore non si annulla mai e l'altro è un integrale improprio che, a differenza di quanto accade in (28.7), converge, come è facile ricavare dalla (25.8), sempre utilizzando il criterio del confronto per la convergenza degli integrali. Infatti per  $|x - x_0| < \varepsilon$ , con  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, si

ha  $|V(x) - V(x_0)| \geq c|x - x_0|/2$ , con  $c = |V'(x_0)| \neq 0$ , e quindi

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} \leq \sqrt{\frac{2}{c}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{|x - x_0|}} < \infty, \quad (28.9)$$

così che  $\tau < \infty$  e l'asserto è dimostrato. ■

**28.7. COROLLARIO.** *Siano  $P_1 = (x_1, \dot{x}_1)$  e  $P_2 = (x_2, \dot{x}_2)$  due punti di  $\Gamma_E$  che giacciono sulla stessa componente connessa e tali che  $\dot{x}_1 \dot{x}_2 < 0$ . Sia  $\gamma$  una parte di  $\Gamma_E$  compresa tra  $P_1$  e  $P_2$ . Allora valgono i seguenti risultati.*

(1) *Se  $\gamma$  contiene punti d'equilibrio, non esistono traiettorie, nello spazio posizione-velocità, lungo  $\gamma$  che colleghino i due punti.*

(2) *Se invece  $\gamma$  non contiene punti d'equilibrio, allora il tempo di percorrenza di  $\gamma$  è finito ed è dato da*

$$\tau(P_1, P_2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left( \left| \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} \right| + \left| \int_{x_2}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} \right| \right), \quad (28.10)$$

se  $x_0$ , tale che  $P_0 = (x_0, 0) \in \gamma$ , è l'unico punto d'intersezione di  $\gamma$  con l'asse  $\dot{x} = 0$ .

**28.8. Dimostrazione del corollario 28.7.** Se  $\gamma$  contiene punti d'equilibrio, questi devono giacere sull'asse delle ascisse; il tempo che impiegherà la traiettoria per raggiungere uno di essi partendo da  $P_1$  è infinito per il lemma 28.3. Quindi la traiettoria non raggiungerà  $P_2$ .

Se  $\gamma$  non contiene punti d'equilibrio, allora deve attraversare l'asse delle ascisse in un solo punto, che chiameremo  $P_0$  (per assurdo: se  $\gamma$  intersecasse l'asse delle ascisse una seconda volta, la traiettoria che parte da  $P_1$  dovrebbe ritornare nel semipiano superiore e quindi, dovendo essere chiusa perché simmetrica rispetto all'asse delle ascisse, dovrebbe raggiungere nuovamente  $P_1$ , così che  $P_2$  dovrebbe essere contenuto in  $\gamma$  contro l'ipotesi che ne fosse un estremo). Basta allora applicare il lemma 28.5 e la (28.3), dopo aver diviso  $\gamma$  in due tratti, che connettono, rispettivamente,  $P_1$  a  $P_0$  e  $P_0$  a  $P_2$ . ■

**28.9. Osservazione.** Dati due punti  $P_1$  e  $P_2$  appartenenti alla stessa componente connessa di  $\Gamma_E$ , può succedere che esistano due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che li colleghino. Questo può succedere per esempio se  $P_1$  e  $P_2$  appartengono all'orbita percorsa da una traiettoria periodica; in tal caso l'enunciato (2) del corollario 28.7 si applica sia a  $\gamma_1$  sia a  $\gamma_2$ . Un altro caso possibile si ha se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  intersecano l'asse delle ascisse, rispettivamente, in due punti  $x_1$  e  $x_2$ , con  $x_1$  punto d'inversione e  $x_2 \in \mathcal{E}_M$  (o in generale  $x_2 \in \mathcal{E}_*$ ): allora l'enunciato (1) del corollario 28.6 si applica a  $\gamma_2$ , mentre l'enunciato (2) si applica a  $\gamma_1$ .

**28.10. LEMMA.** *Sia  $E$  tale che  $\Gamma_E$  contiene una componente connessa chiusa  $\gamma$  priva di punti d'equilibrio. Allora il moto su  $\gamma$  è periodico e il periodo è dato da*

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}}, \quad (28.11)$$

dove  $x_-$  e  $x_+$  sono le due radici dell'equazione  $E - V(x) = 0$  (e sono tali che  $(x_{\pm}, 0) \in \gamma$ ).

**28.11.** *Dimostrazione del lemma 28.10.* Dividiamo  $\gamma$  in due parti  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ , che connettono  $(x_-, 0)$  a  $(x_+, 0)$  nel semipiano superiore e, rispettivamente, nel semipiano inferiore dello spazio posizione-velocità. Allora il tempo di percorrenza di  $\gamma$  è dato (tenuto conto dei segni e dell'osservazione 25.7)) da

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_+}^{x_-} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}}. \quad (28.12)$$

I due integrali in (28.12) sono opposti, così che segue immediatamente l'asserto. ■

**28.12.** *TEOREMA.* Sia  $(x_0, 0)$  un punto d'equilibrio stabile per il sistema (25.4) e sia  $V$  di classe  $C^2$  e convessa in un intorno di  $x_0$ . Poniamo  $E_0 = V(x_0)$ . Se  $T(\varepsilon)$  il periodo del moto corrispondente a energia  $E(\varepsilon) = E_0 + \varepsilon^2$ , risulta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = T_0, \quad k = V''(x_0), \quad (28.13)$$

dove  $T_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$  è il periodo dell'oscillatore armonico di costante elastica  $k$ .

**28.13.** *Dimostrazione del teorema 28.12.* Il moto corrispondente all'energia  $E(\varepsilon) = E_0 + \varepsilon^2$  si svolge su un'orbita chiusa non contenente punti d'equilibrio, per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo, poiché la funzione  $V$  ha per ipotesi un punto di minimo isolato in  $x_0$ . Quindi il moto è periodico e, per il lemma 28.10, il periodo è dato da

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-(\varepsilon)}^{x_+(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{(E(\varepsilon) - V(x))}}, \quad (28.14)$$

dove  $x_{\pm}(\varepsilon)$  sono le due soluzioni dell'equazione  $E_0 + \varepsilon^2 - V(x) = 0$  (vicine a  $x_0$  entro  $\varepsilon$ ).

Poiché  $V$  è di classe  $C^2$  si può sviluppare nell'intorno del punto  $x_0$  e si ottiene

$$V(x) = E_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 [1 + r(x - x_0)], \quad (28.15)$$

dove  $k = [d^2V/dx^2](x_0)$  e  $r(x)$  è una funzione tale che  $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$ .

Introducendo la variabile  $y = \varepsilon^{-1}(x - x_0)\sqrt{k/2}$ , nelle quali l'equazione  $E(\varepsilon) - V(x) = 0$  diventa

$$y^2 [1 + r(\varepsilon y/\sqrt{k})] = 1, \quad (28.16)$$

il teorema della funzione implicita (cfr. la nota bibliografica del capitolo 4) garantisce che, posto  $y_{\pm}(\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-1}(x_{\pm}(\varepsilon) - x_0)\sqrt{k/2}$ , risulti  $y_{\pm}(\varepsilon) = \pm 1 + O_{\pm}(\varepsilon)$ , con  $O_{\pm}(\varepsilon)$

funzioni infinitesime in  $\varepsilon$ . Quindi il periodo è dato da

$$T(\varepsilon) = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{y_-(\varepsilon)}^{y_+(\varepsilon)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2 \left(1 + r(\varepsilon y/\sqrt{k})\right)}}. \quad (28.17)$$

Si può quindi applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue (cfr. la nota bibliografica), per passare al limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (28.18)$$

da cui segue la (28.13). ■

## 29. Stime di periodi

**29.1. Introduzione.** Come detto in §28.1, nel presente paragrafo, ci occupiamo del problema di stimare il periodo di una traiettoria periodica, utilizzando i risultati trovati al paragrafo precedente, più precisamente il fatto che è sempre possibile rappresentare il periodo come integrale definito.

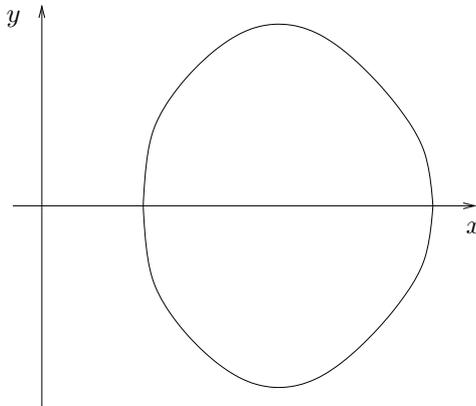


FIGURA 29.1. Curva chiusa corrispondente a un'orbita periodica.

Supponiamo dunque di avere un'orbita chiusa  $\gamma$  percorsa da una traiettoria periodica. Sia  $E$  il valore di energia che compete alla traiettoria e siano  $x_-$  e  $x_+ > x_-$  le intersezioni della curva  $\gamma$  con l'asse delle ascisse: quindi  $x_-$  e  $x_+$  sono valori di  $x$  tali

che  $E - V(x) = 0$ . Il periodo della traiettoria è dato dalla (28.11), che qui riscriviamo per comodità:

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}}. \quad (29.1)$$

Possiamo allora scrivere

$$E - V(x) = (x - x_-)(x_+ - x)\Phi(x), \quad (29.2)$$

dove  $\Phi$  è una funzione di classe  $C^2$  (se  $V$  è di classe  $C^2$ ) e positiva per  $x \in [x_-, x_+]$ .

**29.2. PROPOSIZIONE.** *Sia  $\gamma$  una curva chiusa non contenente punti d'equilibrio e siano  $x_-$  e  $x_+$  le sue intersezioni con l'asse delle ascisse. Se esistono due costanti positive  $C_1$  e  $C_2$  tali che*

$$C_1 \leq \Phi(x) \leq C_2 \quad \forall x \in [x_-, x_+], \quad (29.3)$$

dove  $\Phi(x)$  è definito in (29.2), allora si ha

$$T_1 \leq T \leq T_2, \quad T_1 = \sqrt{\frac{2m\pi^2}{C_2}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{2m\pi^2}{C_1}}. \quad (29.4)$$

dove  $T$  è il periodo (29.1) della traiettoria che ha  $\gamma$  come orbita.

**29.3. Dimostrazione della proposizione 29.2.** Se valgono le stime (29.3) e definiamo

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv \sqrt{\frac{2m}{C_2}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_-)(x - x_+)}} \\ T_2 &\equiv \sqrt{\frac{2m}{C_1}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_-)(x - x_+)}} \equiv T_2, \end{aligned} \quad (29.5)$$

possiamo scrivere

$$T_1 \leq \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} \leq T_2. \quad (29.6)$$

È immediato verificare che si ha

$$I(x_-, x_+) \equiv \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_-)(x - x_+)}} = \pi. \quad (29.7)$$

Infatti, operando la sostituzione

$$x \rightarrow y = \frac{x - x_-}{x_+ - x_-}, \quad (29.8)$$

l'integrale  $I(x_-, x_+)$  diventa

$$I(x_-, x_+) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} \equiv I, \quad (29.9)$$

che mostra innanzitutto che non c'è dipendenza da  $x_-, x_+$ ; con la sostituzione  $y = \sin^2 \theta$ , con  $\theta \in [0, \pi/2]$ , si verifica subito che l'integrale in (29.9) vale  $I = \pi$ : questo implica la (29.6). Dalle (29.5) e (29.6) segue immediatamente la (29.4). ■

**29.4. ESEMPIO.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3). \quad (29.10)$$

Verificare che la traiettoria con condizioni iniziali  $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$  è periodica. Scrivere il periodo della traiettoria come integrale definito e darne una stima.

**29.5. Discussione dell'esempio 29.4.** Si ha

$$\begin{aligned} V(x) &= (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3) = x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6, \\ V'(x) &= \frac{dV}{dx} = 6x^5 - 24x^3 + 22x = 2x(3x^4 - 12x^2 + 11), \\ V''(x) &= \frac{d^2V}{dx^2} = 30x^4 - 72x^2 + 22 = 2(15x^4 - 36x^2 + 11). \end{aligned} \quad (29.11)$$

L'equazione del moto è quindi

$$\ddot{x} = -V'(x) = -2x(3x^4 - 12x^2 + 11). \quad (29.12)$$

I punti stazionari di  $V(x)$  sono i valori  $x$  tali che

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 = 2 - 1/\sqrt{3}, \\ x^2 = 2 + 1/\sqrt{3}, \end{cases} \quad (29.13)$$

quindi sono i 5 valori

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = \pm \sqrt{2 - 1/\sqrt{3}} \equiv x_{\pm 1}, \\ x = \pm \sqrt{2 + 1/\sqrt{3}} \equiv x_{\pm 2}. \end{cases} \quad (29.14)$$

Si ha

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, & V'(0) &= 0 & V''(0) &= 22 > 0, \\ V(x_{\pm 1}) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & V'(x_{\pm 1}) &= 0, & V''(x_{\pm 1}) &= 8(1 - 2\sqrt{3}) < 0, \\ V(x_{\pm 2}) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}, & V'(x_{\pm 2}) &= 0, & V''(x_{\pm 2}) &= 8(1 + 2\sqrt{3}) > 0. \end{aligned} \quad (29.15)$$

Quindi i punti d'equilibrio sono 5:

$$P_0 = (0, 0), \quad P_{\pm 1} = \left( \pm \sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}, 0 \right), \quad P_{\pm 2} = \left( \pm \sqrt{2 + 1/\sqrt{3}}, 0 \right). \quad (29.16)$$

I punti  $P_0$ ,  $P_{-2}$  e  $P_2$  saranno punti d'equilibrio stabile, mentre i punti  $P_{-1}$  e  $P_1$  saranno punti d'equilibrio instabile, come implica la seguente discussione.

Poiché i punti  $x_0 = 0$  e  $x_{\pm 1} = \pm \sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}$  sono punti di minimo per l'energia potenziale  $V(x)$ , per il teorema di Dirichlet 18.30 i punti  $P_0$ ,  $P_{-2}$  e  $P_2$  sono punti d'equilibrio stabile per il sistema dinamico corrispondente

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x); \end{cases} \quad (29.17)$$

basta infatti prendere

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(x_0) \quad (29.18)$$

e, rispettivamente,

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(x_{\pm 1}) \quad (29.19)$$

come funzione di Lyapunov.

Riguardo ai punti  $P_{\pm 2}$  basta analizzare le curve di livello, utilizzando i risultati di §4.3; alternativamente si può studiare il sistema linearizzato e verificare che uno dei due autovalori corrispondenti ha parte reale negativa.

L'energia corrispondente al dato iniziale scelto  $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$  è data da

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\bar{y}^2 + V(\bar{x}) = 0. \quad (29.20)$$

Dal grafico della curva  $x \rightarrow V(x)$  si vede che il dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$  si trova su un'orbita chiusa, percorsa quindi da una traiettoria periodica. L'orbita corrispondente attraversa l'asse delle ascisse nei punti  $x_- = -1$  e  $x_+ = 1$ , come è immediato verificare, di nuovo utilizzando i risultati di §4.3.

Si ha

$$E - V(x) = (1 - x^2)(2 - x^2)(3 - x^2), \quad (29.21)$$

così che

$$T = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{2(1 - x^2)(2 - x^2)(3 - x^2)}}. \quad (29.22)$$

Se definiamo  $Q(x) = E - V(x)$ , si ha

$$Q(x) = \Phi(x)(1 - x^2) = \Phi(x)(1 + x)(1 - x), \quad (29.23)$$

dove si sono utilizzate le notazioni di (29.2); quindi

$$\Phi(x) = (2 - x^2)(3 - x^2). \quad (29.24)$$

Per  $x \in [-1, 1]$  si ha

$$1 \cdot 2 = 2 \leq \Phi(x) \leq 2 \cdot 3 = 6, \quad (29.25)$$

così che vale la (29.3), con  $C_1 = 2$  e  $C_2 = 6$ . Possiamo perciò applicare la proposizione 29.2 e concludere che si ha

$$T_1 \leq T \leq T_2, \quad (29.26)$$

dove

$$T_1 = \sqrt{\frac{2\pi^2}{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{2\pi^2}{2}} = \pi, \quad (29.27)$$

così che

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} \leq T \leq \pi \quad (29.28)$$

fornisce una stima dal basso e dall'alto del periodo  $T$ .

### Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati nel presente capitolo, specie per i primi tre paragrafi, abbiamo seguito prevalentemente [Dell'Antonio], Cap. II.

Per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue cfr. *e.g.* [Giusti2], Cap. 6. Per le proprietà delle curve nel piano (e nello spazio) cfr. [Giusti2], Cap. 7.

Come già nel capitolo precedente, notiamo che esercizi simili a quelli riportati sotto si possono trovare in [Celletti] e, soprattutto, [Dell'Antonio-Orlandi-Teta].

### Esercizi

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = 3x^2 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si scelga l'energia potenziale corrispondente  $V(x)$  in modo tale che sia  $V(0) = 0$ .

(1) Verificare che il moto che si svolge sulla curva di livello  $\Gamma_E$ , con  $E = 1/8$ , per un'opportuna scelta del dato iniziale  $\bar{x}$ , è periodico.

(2) Se ne stimi il periodo.

(3) Si trovi esplicitamente la legge del moto in corrispondenza dei dati iniziali  $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = (1, 0)$ .

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = -a + \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove  $a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$  è tale che  $\sin(\pi/12) = a$ .

(1) Verificare che per ogni valore dell'energia  $E$ , il sistema ammette al più un'orbita periodica.

(2) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi