

FM1 - Tutorato V - Lunedì 22 Marzo 2004
tutore Chiara Valenti

1. Dato un sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$$

con $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, verificare che se esiste una funzione $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che

$$f_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} H(x, y), \quad f_2(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, y),$$

allora H è una costante del moto per il sistema.

2. Dato il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che ha un unico punto d'equilibrio;
- (b) Scrivere esplicitamente la soluzione passante per un generico punto (x_0, y_0) ;
- (c) Usando la definizione di stabilità dimostrare che il punto di equilibrio è stabile;
- (d) Mostrare che il punto di equilibrio è attrattivo e trovare il bacino d'attrazione.

3. Dato il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

- (a) Mostrare che esiste un unico punto d'equilibrio;
- (b) Mostrare che la funzione $H(x, y) = x(y - x)$ è costante lungo ogni soluzione del sistema;
- (c) Mostrare che gli autospazi della matrice associata al sistema sono insiemi invarianti per il campo vettoriale e dire quante orbite distinte contengono;
- (d) Mostrare che il punto di equilibrio non è stabile usando la definizione di stabilità.

4. Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x - 1) \\ \dot{y} = -y^2 + 2x - 1 \end{cases}$$

- (a) Determinare una costante del moto per il sistema. Determinare i punti critici e discuterne la natura.
- (b) Analizzare le curve di livello e determinare tutti i possibili dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche.
- (c) Verificare che l'insieme $\{(a, a^2) : a \in \mathbb{R}\}$ è invariante e calcolare esplicitamente le traiettorie $(x(t), y(t))$ per tutti i dati iniziali del tipo:
 $y(0) = a, \quad x(0) = a^2, \quad a \in \mathbb{R}.$