

FM1 - Tutorato VIII - Lunedì 3 Maggio 2004
tutore Chiara Valenti

1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0 \quad \text{con} \quad V(x) = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

- (a) si scriva il principio di conservazione dell'energia;
- (b) si studi la funzione energia potenziale, si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;
- (c) si discutano qualitativamente le soluzioni del sistema al variare dell'energia totale e tracciare le curve di livello nel piano delle fasi;
- (d) si determini l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche;
- (e) si dimostri che il dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (\sqrt{2}, 0)$ genera un'orbita periodica;
- (f) scrivere il periodo come integrale definito.

2. Si consideri il sistema dinamico unidimensionale

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0 \quad \text{con} \quad V(x) = 1 - \cos x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Si dimostri che se la particella ha energia totale $E = 1$ allora esiste un'orbita periodica con punti di inversione $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ e $x_2 = \frac{\pi}{2}$: se ne scriva il periodo come integrale definito e se ne dia una stima.