

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2004/2005

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (21-06-2005)

ESERCIZIO 1. Teorema di esistenza e unicità della soluzione per sistemi di equazioni differenziali lineari: enunciato e dimostrazione. Discutere anche la globalità della soluzione.

ESERCIZIO 2. Data la funzione $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$H(x, y) = \frac{1 + (x^2 - 1)^2}{1 + y^2},$$

si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

- (2.1) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.
- (2.2) Discuterne la stabilità.
- (2.3) Studiare analiticamente le curve di livello della funzione $H(x, y)$, e darne una rappresentazione grafica.
- (2.4) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle traiettorie del sistema.
- (2.5) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1/\sqrt{3})$ è periodica.
- (2.6) Scriverne il periodo T come integrale definito.

ESERCIZIO 3. Teorema di Coriolis: dire che forma hanno le forze apparenti in un sistema di riferimento mobile, e darne la dimostrazione.