Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2004/2005

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prima prova d'esonero (13-04-2005)

CORREZIONE

Esercizio 2.

2.1. Campo vettoriale. Risulta $\dot{x} = H_y$. Quindi

$$\dot{H} = H_x\dot{x} + H_y\dot{y} = H_y\left(H_x + \dot{y}\right) = \left(H_x + f\right),$$

e quindi $\dot{H} = 0$ se $f = -H_x$, che dà

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -y\left[\left(x^2+y^2-1\right)(y+1-x-y-1-x) + 2x\left((y+1)^2 - x^2\right)\right] \\ &= -2xy\left(-x^2-y^2+1+y^2+2y+1-x^2\right) \\ &= -4xy\left(y+1-x^2\right). \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(x^2+y^2-1\right)(y+1) + \left((y+1)^2-x^2\right)\left(x^2+3y^2-1\right), \\ \dot{y} = -4xy\left(y+1-x^2\right). \end{cases}$$

2.2. Punti d'equilibrio. Si ha $\dot{y} = 0$ se $f(x,y) = 0$, quindi se $x = 0$ oppure $y = 0$ oppure $y = x^2 - 1$.

Se $x = 0$ si ha $\dot{x} = 0$ se

$$\begin{aligned} 0 &= 2y\left(y^2-1\right)(y+1) + (y+1)^2\left(3y^2-1\right) \\ &= (y+1)^2\left(5y^2-2y-1\right), \end{aligned}$$

che ammette come zeri $y = -1$ e $y = (1 \pm \sqrt{6})/5$. Quindi tre punti d'equilibrio sono

$$P_1 = (0,-1), \qquad P_2 = \left(0, \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right), \qquad P_3 = \left(0, \frac{1-\sqrt{6}}{5}\right).$$

Se $y = 0$ si ha $\dot{x} = 0$ se

$$0 = \left(1-x^2\right)\left(x^2-1\right),$$

che dà $x = \pm 1$. Quindi altri due punti d'equilibrio sono

$$P_4 = (1,0), \qquad P_5 = (-1,0).$$

Se $y = x^2 - 1$ si ha $\dot{x} = 0$ se

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 \left(x^2 - 1\right) \left(x^4 - x^2\right) + \left(x^4 - x^2\right) \left(3x^4 - 5x^2 + 2\right) \\ &= x^2 \left(x^2 - 1\right) \left(5x^4 - 7x^2 + 2\right), \end{aligned}$$

che ammette come zeri $x = 0$, $x = \pm 1$ e x tale che $x^2 = (7 \pm 3)/10$, quindi $x = \pm 1$ e $x = \pm\sqrt{2/5}$. Poiché $y = x^2 - 1$ si ha $y = -1$ se $x = 0$ e $y = 0$ per $x = \pm 1$: quindi tali punti d'equlibrio coincidono con i punti P_1, P_4 e P_5 già trovati. I valori $x = \pm\sqrt{2/5}$ dànno invece due nuovi punti d'equilibrio

$$P_6 = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{3}{5}\right), \qquad P_7 = \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{3}{5}\right).$$

2.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Sia $P = (x_0, y_0)$ un punto d'equlibrio. La matrice del sistema linearizzato è data da

$$\begin{aligned} A(P_0) &= \begin{pmatrix} H_{xy}(P_0) & H_{yy}(P_0) \\ -H_{xx}(P_0) & -H_{xy}(P_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x_0(1 + 2y_0 - x_0^2) & g(x_0, y_0) \\ -4y_0(1 + y_0 - 3x_0^2) & -4x_0(1 + 2y_0 - x_0^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} g(x, y) = &\left(x^2 + y^2 - 1\right) \left[2\left(y + 1\right) + 2y\right] \\ &+ \left(y + 1\right) \left[(2y)^2 + 2\left(x^2 + 3y^2 - 1\right)\right] + 6y \left[(y + 1)^2 - x^2\right]. \end{aligned}$$

Si vede allora che

$$A(P_1) = A(P_4) = A(P_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi nessuna informazione sulla stabilità di tali punti può essere ricavata dallo studio del sistema linearizzato. D'altra parte anche il calcolo per gli altri punti risulta inutilmente laborioso. In ogni caso si trova che gli autovalori della matrice linearizzata hanno parte reale nulla, quindi anche in questo caso non si ottiene alcuna informazione.

È invece più semplice e proficuo procedere nel modo seguente. Si studia il segno della funzione $H(x, y)$ al variare di (x, y) nel piano. Innanzitutto si nota che

$$\Gamma_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\right\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4,$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1 + x\right\}, \\ \mathcal{C}_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1 - x\right\}, \\ \mathcal{C}_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}, \end{aligned}$$

che definiscono, rispettivamente, l'asse x, due rette di pendenza ± 1 passanti per P_1 e la circonferenza di centro l'origine e raggio $R = 1$.

Il segno della funzione $H(x, y)$ è come determinato dalla Figura 1: nella regione grigia il segno è positivo, nella regione bianca è negativo. Questo si determina dalle seguenti proprietà (di immediata verifica):

$$
\begin{aligned}
&x = 0, y \to \pm\infty \Longrightarrow H(0, y) \to \pm\infty, \\
&x = 0, y = 1/2 \Longrightarrow H(0, 1/2) = -27/32 < 0, \\
&x = 0, y = -1/2 \Longrightarrow H(0, -1/2) = 3/32 > 0, \\
&|x| \to \infty, y = \pm 1 \Longrightarrow H(x, 1) \to \mp\infty, \\
&|x| = \sqrt{2/5}, y = -3/5 \Longrightarrow H(x, -3/5) = -108/3125 < 0.
\end{aligned}
$$

Notiamo che i 7 punti d'equilibrio sono 3 instabili e 4 stabili: i primi (P_1, P_4 e P_5) sulle intersezioni delle rette $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ con la circonferenza $\mathcal{C}_4$, mentre i punti d'equilibrio stabile (P_2, P_3, P_6 e P_7) sono ciascuno all'interno di una delle quattro regioni connesse in cui le tre rette $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ dividono l'interno della circonferenza $\mathcal{C}_4$. Chiameremo tali regioni $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_6$ e $\mathcal{A}_7$, intendendo, ovviamente, che $\mathcal{A}_i$ è la regione che contiene P_i al suo interno.

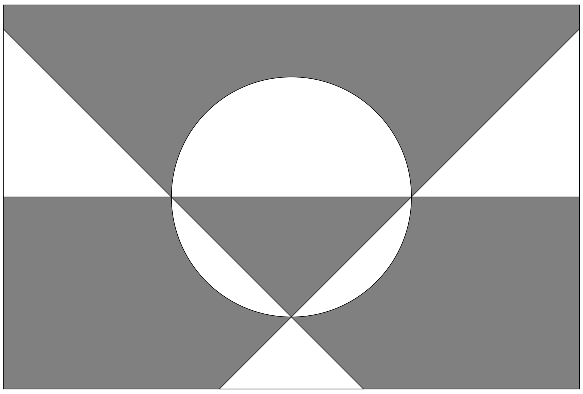

Figura 1. Segno della funzione $H(x, y)$.

Quindi, usando la continuità della funzione $H(x, y)$ e applicando il teorema di Weierstrass, possiamo concludere che i punti P_2, P_6 e P_7 sono punti di minimo isolati per la funzione $H(x, y)$, mentre il punto P_3 è un punto di massimo isolato.

Possiamo quindi applicare il teorema di Ljapunov, prendendo di volta in volta come funzione di Ljapunov la funzione

$$
\begin{aligned}
&W(x, y) = H(x, y) - H(P_i), \qquad i = 2, 6, 7, \\
&W(x, y) = -\left(H(x, y) - H(P_3)\right),
\end{aligned}
$$

per concludere che i punti P_2, P_3, P_6 e P_7 sono punti d'equilibrio stabile per il sistema dinamico. Infatti, con la definizione sopra, per ogni punto P_i, $i = 2, 3, 6, 7$, esiste un intorno $B(P_i)$ tale che (i) $W(P_i) = 0$ e $W(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in B(P_i) \setminus \{P_i\}$, e (ii) $\dot{W}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in B(P_i)$.

Per discutere la stabilità degli altri punti usiamo il fatto che essi si trovano sulla curva di livello Γ_0. Studiamo quindi il verso di percorrenza delle traiettorie che hanno luogo su tale curva di livello.

Su $\mathcal{C}_1$ si ha $\dot{y} = 0$, mentre $\dot{x} = -(1 - x^2) \leq 0$, e vale il segno stretto al di fuori dei punti d'equlibrio. Quindi possiamo concludere subito che i punti P_4 e P_5 sono punti d'equilibrio instabile perché esistono direzioni lungo le quali le traiettorie che partono da dati iniziali arbitrariamente vicini ai punti d'equilibrio si allontano da essi.

Lungo la curva $\mathcal{C}_2$ si ha $\dot{y} = 4x^2 \left(1 - x^2\right) \geq 0$, e di nuovo vale il segno stretto al di fuori dei punti d'equilibrio. Quindi anche il punto P_1 è un punto d'equilibrio instabile.

Possiamo concludere lo studio dei versi di percorrenza su Γ_0, visto che servirà per la domanda successiva. Analogamente a quanto visto per $\mathcal{C}_2$, si vede che anche lungo la curva $\mathcal{C}_3$ si ha $\dot{y} = -4x^2 \left(1 + x\right)^2 \leq 0$, con il segno stretto al di fuori dei punti d'equilibrio. Infine sulla circonferenza $\mathcal{C}_4$ si ha $\dot{y} = -4xy^2 \left(1 + y\right)$, quindi al di fuori dei punti d'equilibrio si ha $\dot{y} > 0$ per $x < 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x > 0$. La situazione è come rappresentata in Figura 2, dove sono stati di nuovo segnati anche i punti d'equilibrio.

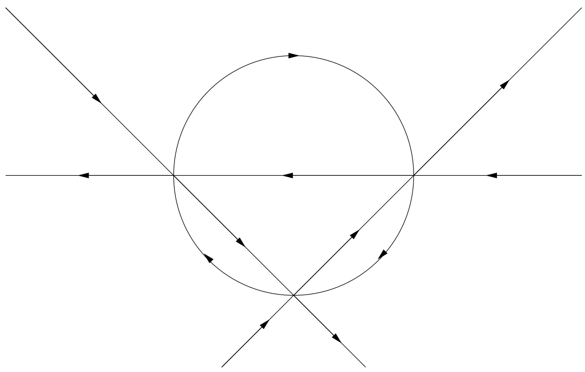

Figura 2. Curva di livello Γ_0 e versi di percorrenza.

2.4. Studio qualitativo delle altre traiettorie. Le altre traiettorie possono essere ottenute utilizzando la continuità della funzione $H(x, y)$. Nelle quattro ragioni aperte $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_6$ e $\mathcal{A}_7$, racchiuse dalla curva di livello Γ_0 e contenenti al loro interno i punti d'equilibrio stabile, possiamo applicare il teorema che afferma che sotto tali condizioni le traiettorie che hanno origine da dati iniziali in tali ragione (private dei punti d'equilibrio stessi) sono periodiche. Quindi si svolgono su orbite chiuse che circondano i punti d'equilibrio. Tutte le altre traiettorie, che non siano all'interno della circonferenza $\mathcal{C}_4$ e non si svolgano sulla curva di livello Γ_0, si svolgeranno su orbite aperte.

La situazione è rappresentata in Figura 3. I versi di percorrenza si possono ricavare utilizzando la Figura 2 e la continuità del campo vettoriale.

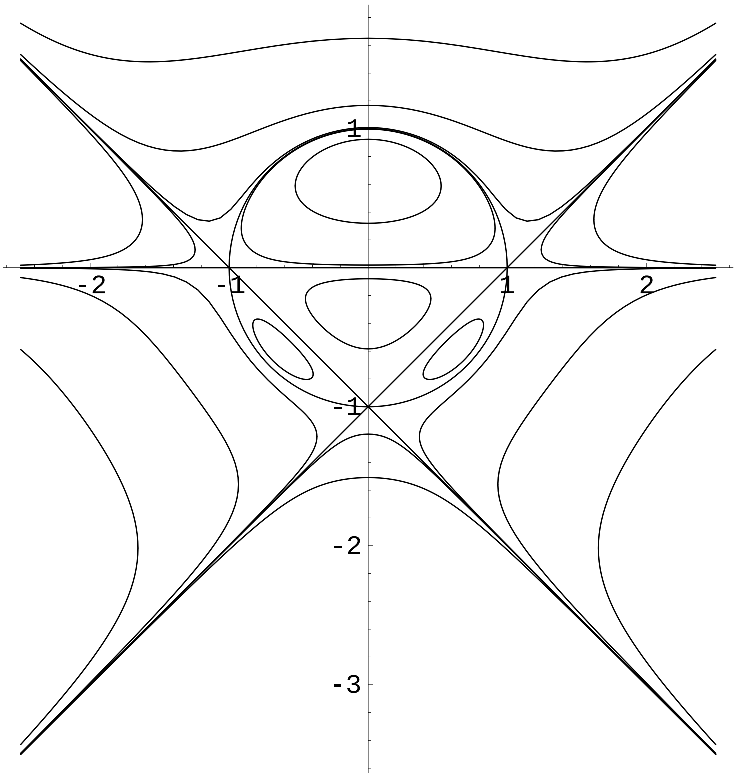

Figura 3. Analisi qualitativa delle traiettorie.