

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2004/2005

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

SECONDA PROVA D'ESONERO (31-05-2005)

ESERCIZIO 1. Sistemi di riferimento mobili e legge di trasformazione delle velocità.

ESERCIZIO 2. Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right),$$

con $a \in \mathbb{R}$. Al variare di a si discutano i seguenti punti.

(2.1) Studiare il grafico dell'energia potenziale.

(2.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio per il sistema dinamico associato.

(2.3) Discutere la loro stabilità.

(2.4) Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.

(2.5) Per $a = -1$ studiare qualitativamente la traiettoria con posizione iniziale $x(0) = -1$ ed energia nulla, e dire se esiste un tempo T in cui la soluzione attraversa l'asse y .

ESERCIZIO 3. Operatore d'inerzia. Darne la definizione e dimostrarne le proprietà fondamentali.

ESERCIZIO 4. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove lungo l'asse y con legge oraria $y_{O'}(t) = a \sin t$, mentre il sistema ruota intorno all'asse verticale con velocità angolare $\omega(t) = y_{O'}(t)$. All'istante $t = 0$ i due sistemi di riferimento coincidono.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ è fisso nel sistema K nella posizione $(1, 0, 0)$.

(4.1) Scrivere la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , *i.e.* $D = C \circ B$, e determinare C e B .

(4.2) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .

(4.3) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .

(4.4) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(4.5) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(4.6) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P .

(4.7) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P .