

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2004/2005
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

SECONDA PROVA D'ESONERO (31-05-2005)

CORREZIONE

ESERCIZIO 2.

2.1. Studio dell'energia potenziale. Si ha

$$V(x) = \frac{2}{\pi} \arctan f(x), \quad f(x) = a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3},$$

e quindi

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{2}{\pi} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}, \\ V''(x) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{f''(x)}{1+f^2(x)} - \frac{2f(x)(f'(x))^2}{(1+f^2(x))^2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{(1+f^2(x))^2} \left((1+f^2(x))f''(x) - 2f(x)(f'(x))^2 \right), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} f'(x) &= ax - x^2 = x(a-x), \\ f''(x) &= a - 2x, \end{aligned}$$

così che si vede che $V'(x) = 0$ se e solo se $f'(x) = 0$, che richiede $x = 0$ oppure $x = a$. Inoltre, in corrispondenza di un punto stazionario x_0 (dove $f'(x_0) = 0$) si ha

$$V''(x_0) = \frac{2}{\pi} \frac{f''(x_0)}{1+f^2(x_0)},$$

e quindi $V''(x_0)$ ha il segno di $f''(x_0)$. Risulta allora $f''(0) = a$ e $f''(a) = -a$.

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = \mp 1.$$

Si vede inoltre che, se $a > 0$, si ha $V'(x) > 0$ per $x \in (0, a)$ e $V'(x) < 0$ per $x < 0$ e $x > a$, mentre se $a < 0$, si ha $V'(x) > 0$ per $x \in (a, 0)$ e $V'(x) < 0$ per $x < a$ e $x > 0$. Infine se $a = 0$ si ha $V'(x) < 0$ per ogni $x \neq a$.

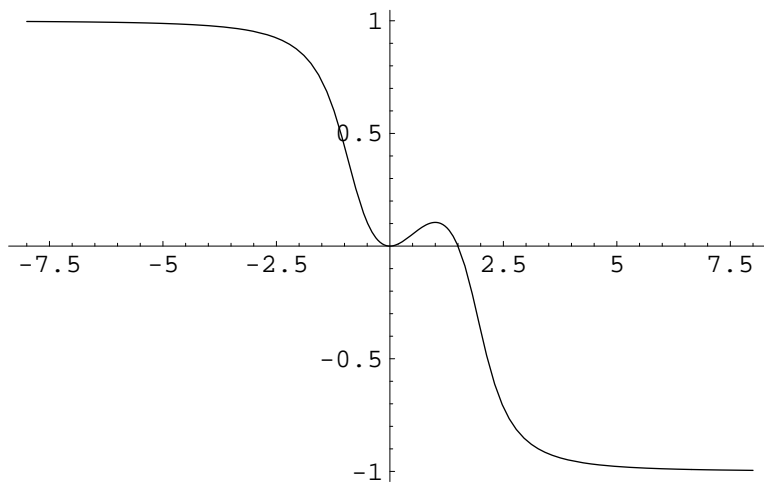


Figura 1. Grafico della funzione $V(x)$ per $a > 0$.

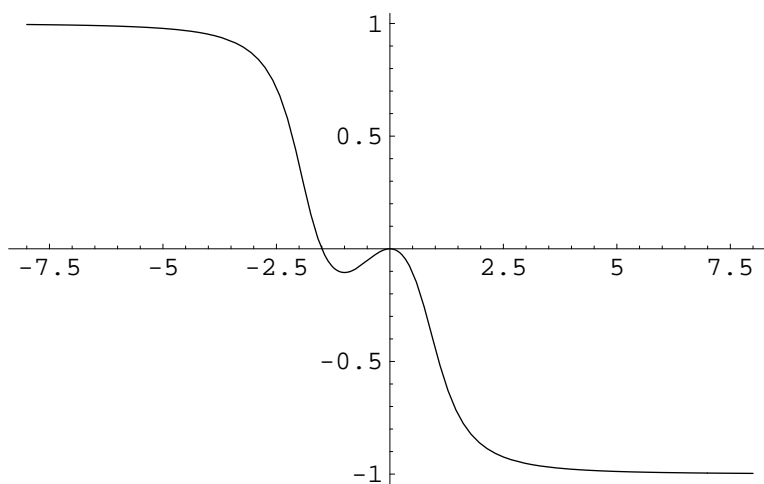


Figura 2. Grafico della funzione $V(x)$ per $a < 0$.

In conclusione se $a \neq 0$ si hanno due punti stazionari: se $a > 0$ il punto $x = 0$ è un punto di minimo e il punto $x = a$ è un punto di massimo.

Se $a < 0$ il punto $x = 0$ è un punto di massimo e il punto $x = a$ è un punto di minimo.

Se invece $a = 0$ si ha un unico punto critico, $x = 0$, che è un punto di flesso orizzontale.

Il grafico della funzione $V(x)$ è rappresentato in Figura 1 per $a > 0$, in Figura 2 per $a < 0$ e in Figura 3 per $a = 0$.

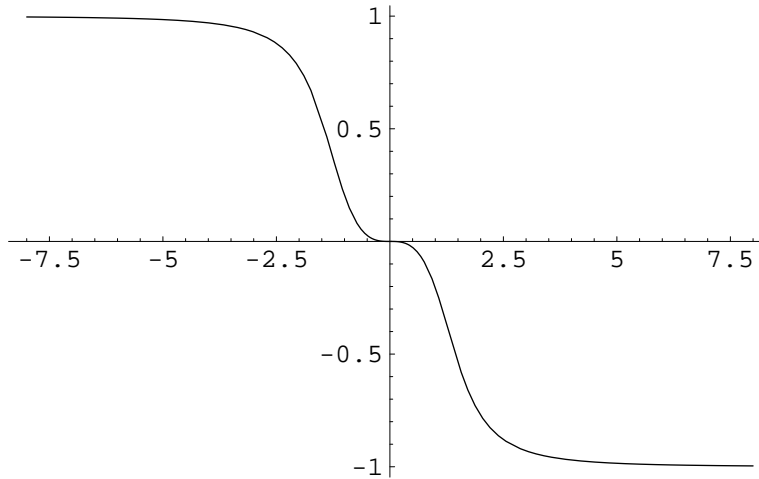


Figura 3. Grafico della funzione $V(x)$ per $a = 0$.

2.2. Punti d'equilibrio. Il sistema dinamico associato si scrive

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases}$$

quindi i punti d'equilibrio sono i punti $P = (x_0, 0)$, con x_0 punto stazionario di $V(x)$.

Per $a > 0$ abbiamo due punti d'equilibrio, $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (a, 0)$.

Anche per $a < 0$ abbiamo due punti d'equilibrio, $P_1 = (a, 0)$ e $P_2 = (0, 0)$.

Per $a = 0$ c'è un solo punto d'equilibrio $P_0 = (0, 0)$.

2.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Per $a > 0$ troviamo che P_1 è un punto d'equilibrio stabile per il teorema di Dirichlet (perché corrispondente a un punto di minimo isolato per $V(x)$), mentre P_2 è un punto d'equilibrio instabile (perché corrispondente a un punto di massimo isolato per $V(x)$).

Per $a < 0$, di nuovo, P_1 è un punto d'equilibrio stabile per il teorema di Dirichlet e P_2 è un punto d'equilibrio instabile.

Per $a = 0$ il punto P_0 è un punto d'equilibrio instabile (perché corrispondente a un punto di flesso orizzontale per $V(x)$).

2.4. Analisi qualitativa. Nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$, per $a > 0$, si trova la situazione rappresentata in Figura 4, dove sono rappresentate le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}y^2 + V(x) = E \right\}$$

del sistema. Solo valori $E > -1$ sono possibili. I versi di percorrenza delle orbite sono sempre da sinistra a destra nel semipiano superiore e da destra a sinistra nel semipiano inferiore (poiché $y = \dot{x}$): le stesse considerazioni valgono per le figure successive.

Per $1 > E > V(a)$ ed $E < 0$ le curve di livello hanno un'unica componente connessa, costituita da un'orbita aperta. Per $0 \leq E < V(a)$ le curve di livello Γ_E hanno due componenti connesse: una aperta e una chiusa. Se $E > 0$ quest'ultima è percorsa da una traiettoria periodica, mentre per $E = 0$ si riduce al solo punto d'equilibrio P_1 . Infine per $E \geq 1$ ogni curva di livello Γ_E è costituita da due componenti connesse, una nel semipiano superiore e una nel semipiano inferiore, entrambe costituite da un'orbita aperta.

Per $E = V(a)$ la curva di livello interseca l'asse x in $x = a$ con tangente obliqua (poiché $V''(a) \neq 0$): essa contiene quattro orbite: il punto d'equilibrio instabile P_2 , due orbite illimitate (una asintotica a P_2 per $t \rightarrow \infty$ e all'infinito per $t \rightarrow -\infty$, l'altra asintotica a P_2 per $t \rightarrow -\infty$ e all'infinito per $t \rightarrow \infty$) e un'orbita omoclina asintotica a P_2 .

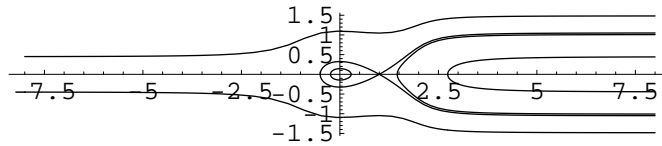


Figura 4. Analisi qualitativa per $a > 0$.

Per $a < 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 5. Di nuovo si deve avere $E > -1$.

Per $1 > E > 0$ ed $E < V(a)$ le curve di livello hanno un'unica componente connessa, costituita da un'orbita aperta. Per $0 > E \geq V(a)$ le curve di livello Γ_E hanno due componenti connesse: una aperta e una chiusa. Se $E > V(a)$ quest'ultima è percorsa da una traiettoria periodica, mentre per $E = V(a)$ si riduce al solo punto d'equilibrio P_1 . Infine per $E \geq 1$ ogni curva di livello Γ_E è costituita da due componenti connesse, una nel semipiano superiore e una nel semipiano inferiore, entrambe costituite da un'orbita aperta.

Per $E = 0$ la curva di livello interseca l'asse x in $x = 0$ con tangente obliqua (poiché $V''(0) \neq 0$): essa contiene quattro orbite: il punto d'equilibrio instabile P_2 , due orbite illimitate (una asintotica a P_2 per $t \rightarrow \infty$ e all'infinito per $t \rightarrow -\infty$, l'altra asintotica a P_2 per $t \rightarrow -\infty$ e all'infinito per $t \rightarrow \infty$) e un'orbita omoclina asintotica a P_2 .

Per $a = 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 6. Di nuovo si deve avere $E > -1$. Per $E = 0$ la curva di livello interseca l'asse x in $x = 0$ formando una cuspidine (poiché $V''(0) = 0$). Tutte le curve di livello Γ_E contengono un'unica curva aperta, tranne che per $E = 0$: in tal caso Γ_0 contiene il punto d'equilibrio P_0 e due orbite aperte, una asintotica a P_0 per $t \rightarrow \infty$ e all'infinito per $t \rightarrow -\infty$, l'altra

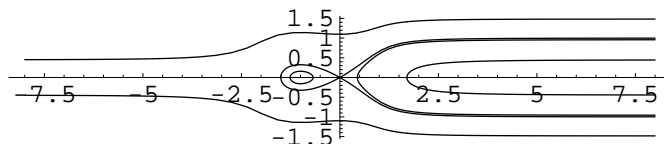


Figura 5. Analisi qualitativa per $a < 0$.

asintotica a P_0 per $t \rightarrow -\infty$ e all'infinito per $t \rightarrow \infty$ Per $E > 1$ si hanno due orbite aperte, una nel semipiano superiore e una nel semipiano inferiore.

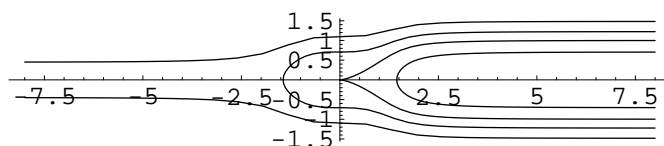


Figura 6. Analisi qualitativa per $a = 0$.

2.5. Traiettoria con energia nulla. Sia $a = -1$. Il dato iniziale $(x(0), y(0))$ con $x(0) = -1$ ed energia $E = 0$ si trova sulla curva di livello contenente il punto d'equilibrio instabile. Quale che sia il valore iniziale di $y(0)$ (sono possibili due valori, uno positivo e uno negativo), la traiettoria tende asintoticamente (sia per $t \rightarrow \infty$ sia per $t \rightarrow -\infty$) a $x = 0$. Quindi non esiste alcun T finito tale che $x(T) = 0$.

ESERCIZIO 4.

4.1. Trasformazione rigida. Si ha

$$\mathbf{r} = \mathbf{q}_{O'} = (0, a \sin t, 0),$$

e

$$B = B^{(3)}(\theta(t)) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\dot{\theta}(t) = \omega(t) = a \sin t$, che implica $\theta(t) = -a \cos t + c$, dove la costante c va scelta in modo tale che si abbia $\theta(0) = 0$: quindi $c = a$ e $\theta(t) = a(1 - \cos t)$.

Quindi $\mathbf{q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r}$ con $\mathbf{Q} = (1, 0, 0)$, che dà

$$\mathbf{q}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t) + a \sin t, 0),$$

con $\theta(t) = a(1 - \cos t)$.

4.2. Velocità assoluta. Si ha

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = (-a \sin \theta(t) \sin t, a \cos \theta(t) \sin t + a \cos t, 0).$$

4.3. Velocità relativa. Si ha

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} = (0, 0, 0).$$

4.4. Componente traslatoria della velocità di trascinamento. Si ha

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} = (0, a \cos t, 0).$$

4.5. Componente rotatoria della velocità di trascinamento. Si ha

$$\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}],$$

dove $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\theta}(t)) = (0, 0, a \sin t)$ e $\mathbf{q} - \mathbf{r} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0)$. Quindi

$$\mathbf{v}_T = (-a \sin \theta(t) \sin t, a \cos \theta(t) \sin t, 0).$$

4.6. Forza di Coriolis. Si ha

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2 [\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] = \mathbf{0},$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = B^{-1}\boldsymbol{\omega} = (0, 0, a \sin t)$.

4.7. Forza centrifuga. Si ha

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = -[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]],$$

dove $\mathbf{Q} = (1, 0, 0)$. Quindi $[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = (0, a \sin t, 0)$, e $[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]] = (-a^2 \sin^2 t, 0, 0)$ che implica

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = -[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]] = (a^2 \sin^2 t, 0, 0).$$