

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO X - LIVIA CORSI (13-05-05)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale:

$$V(x) = \ln(1 + 2 \sin^2 x) - 1, \quad x \in \mathbb{T}$$

- (1.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- (1.2) Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- (1.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (1.4) Discutere la loro stabilità.
- (1.5) Analizzare qualitativamente il moto nel piano (x, \dot{x}) .
- (1.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (1.7) Verificare che esiste una traiettoria periodica per $E = 0$ e scriverne il periodo come integrale definito.

ESERCIZIO 2. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale:

$$V(\rho) = -\ln(\rho^2 + 1)$$

- (2.1) Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
- (2.2) Determinare i punti d'equilibrio per il sistema e discuterne la stabilità.
- (2.3) Studiare il grafico del potenziale efficace.
- (2.4) Studiare qualitativamente le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (2.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

ESERCIZIO 3. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{1}{16\rho^4} - \frac{\alpha}{\rho^3}$$

con $\alpha, \in \mathbb{R}$. Al variare di α si discutano i seguenti punti.

- (3.1) Scrivere l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (3.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3.3) Studiare il grafico del potenziale efficace.
- (3.4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico