

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO XI - LIVIA CORSI (20-05-05)

ESERCIZIO 1. Dato un sistema di riferimento $k = Oxyx$ (sistema di riferimento fisso o assoluto) consideriamo un sistema di riferimento mobile (o relativo) $K = O'\xi\eta\zeta$, che ruota in senso orario intorno all'asse ζ , parallelo a z , con velocità angolare costante $\omega = \omega_0 > 0$ mentre l'origine O' si muove lungo l'asse x secondo la legge oraria $x(t) = t$. All'istante iniziale i due sistemi coincidono. Un punto P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K secondo una delle due seguenti modalità:

- (a) secondo la legge oraria $\xi(t) = \xi_0 > 0$
- (b) sotto l'azione di una molla di costante elastica $\lambda > 0$

- (1.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow k$ come composizione di una traslazione con una rotazione, $D = C \circ D$, e determinare la forma di C e D .
- (1.2) Determinare la legge del moto nel sistema k nei due casi (a) e (b).
- (1.3) Determinare la velocità assoluta v nei due casi (a) e (b).
- (1.4) Determinare la velocità relativa v' nei due casi (a) e (b).
- (1.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0 nei due casi (a) e (b).
- (1.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T nei due casi (a) e (b).
- (1.7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P nei due casi (a) e (b).
- (1.8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P nei due casi (a) e (b).
- (1.9)* Confrontare la traiettoria del punto P nel sistema k , per il caso (a), con la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tale che le sue componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 \\ \dot{y} = -x - t \end{cases}$$

e passante per il punto $(\xi_0, 0)$. Quanto dovrà valere ω_0 affinché le due traiettorie coincidano? Dare un'interpretazione fisica.

ESERCIZIO 2. Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove in senso antiorario lungo l'ellisse di semiassi di lunghezza $a = 3$ e $b = 2$ e centro l'origine $O = (0, 0)$ nel piano (x, y) , orientata in modo che l'asse maggiore risulti parallelo all'asse y . L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k e K ruota intorno all'asse ζ con velocità angolare costante ω_0 in senso antiorario. All'istante iniziale il punto O' occupa la posizione $q_{O'} = (2, 0, 0)$ e gli assi ξ e η sono diretti come gli assi x e y , rispettivamente. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = \sin t$.

- (2.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow k$ come composizione di una traslazione con una rotazione, $D = C \circ D$, e determinare la forma di C e D .
- (2.2) Scrivere la legge del moto nei sistemi k e K .
- (2.3) Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v' .
- (2.4) Trovare la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0 .
- (2.5) Trovare la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T .
- (2.6) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P

ESERCIZIO 3. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\ln \rho - \frac{2}{\rho}$$

- (3.1) Scrivere l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (3.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3.3) Studiare il grafico del potenziale efficace.
- (3.4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico