

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO XII - LIVIA CORSI (27-05-05)

ESERCIZIO 1. Dato un sistema di riferimento $k = Oxyx$ (sistema di riferimento fisso o assoluto) consideriamo un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove sul cilindro $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ lungo l'elica di passo $a = 2\pi$; la componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge $x_{O'} = \cos t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene ortogonale alla superficie del cilindro. All'istante iniziale il punto O' occupa la posizione $q_{O'} = (1, 0, 0)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse η secondo la legge oraria $\eta(t) = t \sin t$

- (1.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow k$ come composizione di una traslazione con una rotazione, $D = C \circ B$, e determinare la forma di C e B .
- (1.2) Determinare la legge del moto nel sistema k .
- (1.3) Determinare la velocità assoluta v .
- (1.4) Determinare la velocità relativa v' .
- (1.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0 .
- (1.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T .
- (1.7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P .
- (1.8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P .

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto ad una forza di energia potenziale:

$$V(x) = e^{\frac{1}{x}}(x - \alpha)$$

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere i seguenti punti.

- (2.1) Scrivere l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (2.2) Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
- (2.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2.4) Studiare qualitativamente le curve di livello nel piano (x, \dot{x}) .
- (2.5) Determinare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 3. Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove lungo il profilo di equazione

$$y(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = 2t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k , mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo la parabola $\mathcal{P} = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \eta = \xi^2\}$ secondo la legge $\xi(t) = \cos t$.

- (3.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow k$ come composizione di una traslazione con una rotazione, $D = C \circ B$, e determinare la forma di C e B .
- (3.2) Scrivere la legge del moto nei sistemi k e K .
- (3.3) Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v' .
- (3.4) Trovare la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0 .
- (3.5) Trovare la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T .
- (3.6) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P .
- (3.7) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P .