

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO IV - LIVIA CORSI (18-03-05)

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 1/9x^3 + 3/4xy^2 - x \\ \dot{y} = y - 1/3x^2y - 1/4y^3 \end{cases}$$

- (1.1) Determinare una costante del moto per il sistema.
- (1.2) Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
- (1.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nello spazio delle fasi.

- (1.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (1.5) Scrivere esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ che abbia come dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 0)$.

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 24x^5 - 32x^3 + 8x \end{cases}$$

- (2.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = (y - 2x^3 + 2x)(y + 2x^3 - 2x)$$

è una costante del moto per il sistema.

- (2.2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2.3) Studiare la curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$$

e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

- (2.4) Studiare qualitativamente le altre curve di livello.
- (2.5) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2(2y^2 - 1) - 1) \\ \dot{y} = -2xy^2(y^2 - 1) \end{cases}$$

(2.1) Si verifichi che la funzione

$$H(x, y) = (y^2 - 1)(x^2y^2 - 1)$$

è una costante del moto.

(2.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema.

(2.3) Se ne discuta la stabilità.

(2.4) Indicando con Γ_E la curva di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

si studi la curva di livello Γ_0 e si analizzino i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(2.5) Lo stesso per $E = 1$.

(2.6) Si studino qualitativamente le altre curve di livello.

(2.7) Si trovi esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ che abbia come dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 1)$.

[(2.8) Si dia un argomento per escludere l'esistenza di traiettorie periodiche.]