

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO V - LIVIA CORSI (1-04-05)

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 + 2y^2 - 5) \\ \dot{y} = 2x(1 - y^2) \end{cases}$$

- (1.1) Determinare una costante del moto per il sistema.
- (1.2) Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
- (1.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nello spazio delle fasi.

- (1.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (1.5) Scrivere esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ che abbia come dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 1)$.

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^4 + 5x^2 - 4 \\ \dot{y} = xy(4x^2 - 10) \end{cases}$$

- (2.1) Determinare una costante del moto per il sistema.
- (2.2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2.3) Studiare la curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$$

e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

- (2.4) Studiare qualitativamente le altre curve di livello.
- (2.5) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2y - x^2 - 1) \\ \dot{y} = (1 - y)(y - 3x^2) \end{cases}$$

(3.1) Si verifichi che la funzione

$$H(x, y) = x(y - x^2)(y - 1)$$

è una costante del moto.

(3.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema.

(3.3) Se ne discuta la stabilità.

(3.4) Indicando con Γ_E la curva di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

si studi la curva di livello Γ_0 e si analizzino i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(3.5) Si studino qualitativamente le altre curve di livello.

(3.6) Si trovi esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ che abbia come dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4)$.

(3.7) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche