Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2004/2005

# FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato V - Livia Corsi (1-04-05)

<u>Esercizio 1.</u> Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 + 2y^2 - 5) \\ \dot{y} = 2x(1 - y^2) \end{cases}$$

(1.1) Detereminare una costante del moto per il sistema.
(1.2) Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
(1.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nello spazio delle fasi.
(1.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
(1.5) Scrivere esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ che abbia come dato iniziale $(\overline{x}, \overline{y}) = (4, 1)$.

<u>Esercizio 2.</u> Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^4 + 5x^2 - 4 \\ \dot{y} = xy(4x^2 - 10) \end{cases}$$

(2.1) Determinare una costante del moto per il sistema.
(2.2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
(2.3) Studiare la curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$$

e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.
(2.4) Studare qualitativamente le altre curve di livello.
(2.5) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2y - x^2 - 1) \\ \dot{y} = (1 - y)(y - 3x^2) \end{cases}$$

(3.1) Si verifichi che la funzione

$$H(x, y) = x(y - x^2)(y - 1)$$

è una costante del moto.
(3.2) Si determinio i punti d'equilibrio del sistema.
(3.3) Se ne discuta la stabilità.
(3.4) Indicando con $\Gamma_E$ la curva di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

si studi la curva di livello $\Gamma_0$ e si analizzino i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.
(3.5) Si studino qualitativamente le altre curve di livello.
(3.6) Si trovi esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ che abbia come dato iniziale $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 4)$.
(3.7) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche