

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2004/2005
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
TUTORATO VI - LIVIA CORSI (9-04-05)

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 2x - \sin \theta \\ \dot{x} = x \cos \theta \end{cases} \quad (\theta, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$$

- (1.1) Determinare una costante del moto
- (1.2) Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
- (1.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

nello spazio delle fasi.

- (1.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (1.5) Studiare l'andamento asintotico della soluzione che abbia come dato iniziale $(\bar{\theta}, \bar{x}) = (\theta_0, 0)$ al variare di $\theta_0 \in \mathbb{T}$

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(3 - 2y^2) \\ \dot{y} = 2x(5 - 2x^2) \end{cases}$$

- (2.1) Verificare che la funzione:

$$H(x, y) = (x^2 + y^2 - 4)(x^2 - y^2 - 1)$$

è una costante del moto per il sistema.

- (2.2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2.3) Studiare la curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$$

e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

- (2.4) Studiare qualitativamente le altre curve di livello.
- (2.5) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (2.6) Determinare esplicitamente la soluzione che abbia come dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, \sqrt{3})$

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(x^2 + y^2 - 3) \\ \dot{y} = 4x(8 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

(3.1) Si verifichi che la funzione

$$H(x, y) = (x^2 - 2x + y^2 - 3)(x^2 + 2x + y^2 - 3)$$

è una costante del moto.

(3.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema.

(3.3) Se ne discuta la stabilità.

(3.4) Indicando con Γ_E la curva di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

si studi la curva di livello Γ_0 e si analizzino i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.

(3.5) Si studino qualitativamente le altre curve di livello.

(3.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche