

## FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO VII - LIVIA CORSI (22-04-05)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale:

$$V(x) = \frac{x+1}{x}e^x$$

- (1.1) Scrivere le equazioni di Newton associate.
- (1.2) Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- (1.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio per il sistema dinamico associato.
- (1.4) Discutere la loro stabilità.
- (1.5) Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .
- (1.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (1.7) Verificare in particolare che esiste una traiettoria periodica con energia totale  $E = 2e$  e scriverne il periodo come integrale definito.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto ad una forza di energia potenziale:

$$V(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$$

- (2.1) Scrivere le equazioni di Newton associate.
- (2.2) Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- (2.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio per il sistema dinamico associato.
- (2.4) Discutere la loro stabilità.
- (2.5) Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .
- (2.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

Esercizio 3. Si studi il sistema dinamico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale:

$$V(x) = (x^2 - 1)(x^2 - \alpha)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Al variare di  $\alpha$  si discutano i seguenti punti.

- (3.1) Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- (3.2) Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato.
- (3.3) Se ne discuta la stabilità.
- (3.4) Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .
- (3.5) Per  $\alpha = 4$  verificare che la traiettoria con dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$  è periodica.
- (3.6) Scrivere il periodo della traiettoria considerata al punto (3.5) come integrale definito e darne una stima.