

## FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO VIII - LIVIA CORSI (29-04-05)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale:

$$V(x) = x^3(x - 4)e^x$$

- (1.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- (1.2) Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- (1.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio.
- (1.4) Discutere la loro stabilità.
- (1.5) Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .
- (1.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto ad una forza di energia potenziale:

$$V(x) = \frac{x^3}{2x - 1}$$

- (2.1) Scrivere le equazioni di Newton associate.
- (2.2) Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- (2.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio per il sistema dinamico associato.
- (2.4) Discutere la loro stabilità.
- (2.5) Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .
- (2.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (2.7) Verificare in particolare che esiste una traiettoria periodica per  $E = 1$ , scriverne il periodo come integrale definito e darne una stima.

Esercizio 3. Si studi il sistema dinamico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale:

$$V(x) = x^5 + 2kx^2 + \frac{\alpha}{x}$$

con  $\alpha, k \in \mathbb{R}, k > 0$ . Al variare di  $\alpha, k$  si discutano i seguenti punti.

(3.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.

(3.2) Determinare i punti d'equilibrio.

(3.3) Se ne discuta la stabilità.

Sia ora  $\alpha = 9, k = 3$ .

(3.4) Studiare il grafico dell'energia potenziale.

(3.5) Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .

(3.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.