

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO IX - LIVIA CORSI (06-05-05)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale:

$$V(x) = (x^3 - 3x^2 + 5x - 5)e^x$$

- (1.1) Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- (1.2) Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- (1.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio.
- (1.4) Discutere la loro stabilità.
- (1.5) Analizzare qualitativamente il moto nel piano (x, \dot{x}) .
- (1.6) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto ad una forza di energia potenziale:

$$V(x) = x^3(x - 4) - 2\alpha x(x - 6)$$

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere i seguenti punti.

- (2.1) Scrivere le equazioni di Newton associate.
- (2.2) Studiare qualitativamente il grafico dell'energia potenziale.
- (2.3) Determinare eventuali punti d'equilibrio per il sistema dinamico associato.
- (2.4) Discutere la loro stabilità.
- (2.5) Studiare qualitativamente le curve di livello nel piano (x, \dot{x}) .
- (2.6) Determinare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

Sia ora $\alpha = 1$

- (2.7) Verificare che esistono due traiettorie periodiche per $E = 0$.
- (2.8) Scrivere il periodo delle traiettorie trovate al punto (2.7) come integrale definito e darne una stima.

Esercizio 3. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2 - \ln \rho$$

con $k, \in \mathbb{R}$. Al variare di k si discutano i seguenti punti.

- (3.1) Scrivere l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (3.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3.3) Studiare il grafico del potenziale efficace.
- (3.4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico