INTRODUZIONE AI SISTEMI DINAMICI
Meccanica lagrangiana e hamiltoniana

Guido Gentile

Indice generale

Prefazione . . . . . **v**

Capitolo 11. Meccanica Lagrangiana **1**

47. Primo principio variazionale di Hamilton 1
48. Principio variazionale per moti su varietà 9
49. Formalismo lagrangiano per sistemi vincolati 12
50. Vincoli approssimati 20
51. Un criterio di perfezione per vincoli approssimati 25
52. Applicazione ai sistemi rigidi 30

Nota bibliografica 34

Esercizi 34

Capitolo 12. Alcuni esempi di sistemi lagrangiani **37**

53. Stabilità delle configurazioni d'equilibrio 37
54. Variabili cicliche e metodo di Routh 41
55. Un esempio di sistema lagrangiano 44
56. Un altro esempio di sistema lagrangiano 53

Nota bibliografica 63

Esercizi 63

Capitolo 13. Simmetrie e costanti del moto 69

57. Teorema di Noether 69
58. Gruppi di simmetrie che dipendono da più parametri 76
Nota bibliografica 88
Esercizi 88

Capitolo 14. Teoria delle piccole oscillazioni 91

59. Linearizzazione 91
60. Piccole oscillazioni 93
61. Piccole oscillazioni per pendoli accoppiati 100
62. Piccole oscillazioni per sistemi vincolati 106
Nota bibliografica 111
Esercizi 111

Capitolo 15. Moto dei corpi rigidi pesanti 115

63. Trottola di Lagrange 115
64. Trottola addormentata e trottola veloce 123
Esercizi 128

Capitolo 16. Meccanica Hamiltoniana 129

65. Sistemi Hamiltoniani 129
66. Secondo principio variazionale di Hamilton 132
Esercizi 134

Capitolo 17. Trasformazioni canoniche 135

67. Trasformazioni canoniche e simplettiche 135
68. Parentesi di Poisson 141
69. Invariante integrale di Poincaré–Cartan) 145
70. Funzioni generatrici 152
Esercizi 158

Capitolo 18. Metodo di Hamilton Jacobi 161

71. Equazione di Hamilton-Jacobi 161
72. Variabili azione-angolo 161
Esercizi 161

Bibliografia ragionata **163**

Indice analitico **165**

Prefazione

Capitolo 11. Meccanica Lagrangiana

sec.47

47. Primo principio variazionale di Hamilton

p.47.1 **47.1. Introduzione.**

p.47.2 **47.2. Notazioni.** Consideriamo un sistema meccanico in $\mathbb{R}^N$ che sia descritto dalle coordinate $q = (q_1, \dots, q_N)$. Vedremo al paragrafo §48 come modificare la discussione nel caso in cui il moto si svolga su una varietà su cui non sia possibile utilizzare un sistema di coordinate definito globalmente.

Dato un sistema meccanico conservativo, indichiamo con $T(q, \dot q, t)$ l'energia cinetica del sistema e con $U(q, t)$ la sua energia potenziale.

Siano P_1 e P_2 due punti nello spazio delle configurazioni individuati dalle coordinate $q^{(1)}$ e $q^{(2)}$, e sia $[t_1, t_2]$ un intervallo di tempo. Se $t \to q(t)$ è una traiettoria indichiamo con

47.1
$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2) \tag{47.1}$$

lo *spazio delle traiettorie* che verificano le seguenti proprietà:
(1) sono di classe C^1 in $[t_1, t_2]$;
(2) verificano le condizioni al contorno $q(t_1) = q^{(1)}$ e $q(t_2) = q^{(2)}$.

Definiamo anche $\mathcal{M}_0$ lo spazio delle traiettorie $t \to h(t)$ che hanno la stessa regolarità degli elementi di $\mathcal{M}$ e verificano le condizioni al contorno $h(t_1) = h(t_2) = 0$. Chiameremo *deformazioni* gli elementi di $\mathcal{M}_0$ e *spazio delle deformazioni* lo spazio $\mathcal{M}_0$.

p.47.3 **47.3.** LEMMA. *Lo spazio $\mathcal{M}_0$ è uno spazio vettoriale, mentre lo spazio $\mathcal{M}$ è uno spazio affine.*

p.47.4 **47.4.** *Dimostrazione del lemma 47.3.* Basta applicare le definizioni di spazio vettoriale e di spazio affine notando che se $t \to q(t)$ e $t \to q'(t)$ sono due traiettorie in $\mathcal{M}$ allora $h(t) \equiv q(t) - q'(t)$ è un elemento di $\mathcal{M}_0$ (cfr. l'esercizio 1). ■

p.47.6 **47.5.** DEFINIZIONE (LAGRANGIANA). *Dato un sistema meccanico con energia cinetica $T(q, \dot q, t)$ ed energia potenziale $U(q, t)$, definiamo* lagrangiana *la funzione*

47.6
$$\mathcal{L}(q, \dot q, t) = T(q, \dot q, t) - U(q, t), \tag{47.2}$$

definita sullo spazio delle posizioni-velocità.

p.47.7 **47.6.** *Osservazione.* La lagrangiana è una funzione definita sul fibrato tangente dello spazio delle configurazioni, e solo la sua forma esplicita dipende dal sistema di coordinate scelto.

p.47.8 **47.7.** DEFINIZIONE (FUNZIONALE D'AZIONE). *Dato un sistema meccanico con lagrangiana (47.2), definiamo* funzionale d'azione *l'integrale* $I\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *dato da*

47.7
$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(q(t), \dot q(t), t), \tag{47.3}$$

dove γ *è la traiettoria* $t \to q(t)$.

p.47.9 **47.8.** LEMMA. *Se per* $h \in \mathcal{M}_0$ *definiamo*

47.8
$$\|h\| \equiv \max_{t_1\le t\le t_2} |h(t)| + \max_{t_1\le t\le t_2} |\dot h(t)|, \tag{47.4}$$

allora lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_0$ *è uno spazio normato, dotato della norma (47.4)*

p.47.10 **47.9.** *Dimostrazione del lemma 47.8.* È immediato verificare che la funzione $\|\cdot\|$ soddisfa le proprietà di una norma, *i.e.* (1) $\|h\| \ge 0$ $\forall h \in \mathcal{M}_0$ e $\|h\| = 0$ se e solo se $h = 0$; (2) $\|\lambda h\| = |\lambda|\,\|h\|$ $\forall h \in \mathcal{M}_0$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; (3) $\|h_1 + h_2\| \le \|h_1\| + \|h_2\|$ $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{M}_0$. ■

p.47.11 **47.10.** LEMMA. *Data la lagrangiana (47.2), se le funzioni* $T(q, \dot q, t)$ *e* $U(q, t)$ *sono di classe* C^1 *nelle loro variabili, allora il funzionale d'azione (47.3) è di classe* C^1 *e il suo differenziale in* γ *è dato da*

47.9
$$DI_\gamma(h) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\, h_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\, \dot h_k \right) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, h \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}, \dot h \right\rangle \right), \tag{47.5}$$

per $h \in \mathcal{M}_0$, *se* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *indica il prodotto scalare in* $\mathbb{R}^N$.

p.47.12 **47.11.** *Dimostrazione del lemma 47.10.* Sotto le ipotesi fatte sulle funzioni T e U, possiamo scrivere, per $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$,

47.10
$$\begin{aligned} \left| T(q+\xi, \dot q+\eta, t) - T(q, \dot q, t) - \left\langle \frac{\partial T}{\partial q}, \xi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial T}{\partial \dot q}, \eta \right\rangle \right| &\le (|\xi| + \eta|)\, R_1(\xi, \eta, t), \\ \left| U(q+\xi, t) - U(q, t) - \left\langle \frac{\partial U}{\partial q}, \xi \right\rangle \right| &\le |\xi|\, R_2(\xi, t), \end{aligned} \tag{47.6}$$

dove R_1, R_2 sono, uniformemente in $t \in [t_1, t_2]$, funzioni positive infinitesime nei loro argomenti, *i.e.* per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|\xi| + |\eta| < \delta$ allora $R_1 + R_2 < \varepsilon$.

Quindi, per $\gamma \in \mathcal{M}$ e $h \in \mathcal{M}_0$, si ha

$$\begin{aligned}
&\left| I(\gamma+h) - I(\gamma) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\big(q(t),\dot q(t),t\big), h(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}\big(q(t),\dot q(t),t\big), \dot h(t) \right\rangle \right) \right| \\
&\qquad \le \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(|h(t)| + |\dot h(t)| \right) \Big(R_1(h(t),\dot h(t),t) + R_2(h(t),t) \Big), \qquad (47.7) \\
&\qquad \le |t_2 - t_1|\, \|h\| \sup_{t_1 \le t \le t_2} \Big\{ R_1(h(t),\dot h(t),t) + R_2(h(t),t) \Big\},
\end{aligned}$$

47.11

e, per $\|h\| < \delta$, risulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|h\|} \Bigg| I(\gamma+h) - I(\gamma) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Bigg(&\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\big(q(t),\dot q(t),t\big), h(t) \right\rangle \\
&+ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\big(q(t),\dot q(t),t\big), \dot h(t) \right\rangle \Bigg) \Bigg| \le \varepsilon\, |t_2 - t_1|,
\end{aligned} \qquad (47.8)$$

47.12

che dimostra che esiste il limite, per $\|h\| \to 0$, del membro di sinistra di (47.8) ed è uguale a zero. Quindi $I(\gamma)$ è differenziabile e il suo differenziale è dato dal funzionale lineare da $\mathcal{M}_0$ in $\mathbb{R}$ definito dalla (47.5). Poiché si verifica immediatamente che il differenziale $DI_\gamma(\eta)$ è continuo in γ (la regolarità di $DI_\gamma(h)$ in γ è data dalla regolarità della lagrangiana nelle sue variabili), segue che I è di classe C^1. ■

p.47.13 **47.12.** LEMMA *Sia $p \ge 0$. Sia $\zeta(t)$ una funzione continua in $[t_1,t_2]$. Se per ogni funzione $g(t)$ di classe C^p in $[t_1,t_2]$ tale che $g(t_1) = g(t_2) = 0$ vale l'identità*

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \zeta(t)\, g(t) = 0, \qquad (47.9)$$

47.13

allora la funzione $\zeta(t)$ è identicamente nulla in $[t_1,t_2]$.

p.47.14 **47.13.** *Dimostrazione del lemma 47.12.* Supponiamo per assurdo che esista $t_0 \in (t_1,t_2)$ tale che $\zeta(t_0) \neq 0$; per definitezza supponiamo che risulti $\zeta(t_0) = c > 0$. Allora per continuità esiste un intervallo $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subset [t_1,t_2]$, con $\delta > 0$, tale che $\zeta(t) > c/2$ per ogni $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$. Sia g una funzione continua, positiva, non nulla e con supporto strettamente contenuto in $[t_0-\delta, t_0+\delta]$. Si ha allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \zeta(t)\, g(t) > \frac{c}{2} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \mathrm{d}t\, g(t) > 0, \qquad (47.10)$$

47.14

contro l'ipotesi (47.9). Quindi $\zeta(t)$ deve essere nulla nell'aperto (t_1,t_2) e, per continuità, è allora nulla in $[t_1,t_2]$. ■

p.47.15 **47.14.** *Osservazione.* Il lemma 47.12 si può dimostrare sotto la sola condizione che le funzioni g siano continue in $[t_1,t_2]$; tuttavia, nella dimostrazione del teorema 47.16

più avanti, servirà la formulazione data nel lemma 47.12 con $p = 1$.

p.47.16 **47.15.** DEFINIZIONE (EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE). *Data la lagrangiana (47.2), chiameremo equazioni di Eulero-Lagrange le equazioni*

47.15
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}, \qquad k = 1, \dots, N, \tag{47.11}$$

dove $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$.

p.47.17 **47.16.** TEOREMA. *Data la lagrangiana (47.2), se le funzioni $T(q, y, t)$ e $U(q, t)$ sono di classe C^2 nelle loro variabili, allora una traiettoria $t \to q(t)$ di classe C^2 rende stazionario il funzionale d'azione (47.3) se e solo se $q(t)$ soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange (47.11).*

p.47.18 **47.17.** *Dimostrazione del teorema 47.16.* Una traiettoria γ data da $t \to q(t)$ rende stazionario il funzionale d'azione (47.3) se e solo se $DI_\gamma(h) = 0$ per ogni $h \in \mathcal{M}_0$, *i.e.* se e solo se

$$DI_\gamma(h) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\, h_k(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\, \dot{h}_k(t) \right) = 0,$$

47.16 (47.12)

per ogni $h \in \mathcal{M}_0$. Per ipotesi

47.17
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}, t) \tag{47.13}$$

è di classe C^1 in $\dot{q}$, che a sua volta è di classe C^1 in t (poiché $q(t)$ è di classe C^2); quindi

47.18
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{47.14}$$

è differenziabile in t. Integrando per parti il termine lineare in $\dot{h}(t)$ in (47.12) e ricordando che $h(t_1) = h(t_2) = 0$ (così che i termini di bordo si annullano), si ottiene

47.19
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) h_k = 0, \tag{47.15}$$

dove $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$. In particolare se si fissa $i \in \{1, \dots, N\}$ e si prende $h \in \mathcal{M}_0$ tale che $h_j(t) = 0\ \forall t \in [t_1, t_2]$ per ogni $j \neq i$, per il lemma 47.12 e per l'osservazione 47.14, si ottiene

47.19*a*
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{47.16}$$

Ripetendo l'argomento per ogni $i = 1, \dots, N$ possiamo concludere che valgono le equazioni (47.11) per $t \in [t_1, t_2]$. ■

p.47.19 **47.18.** *Osservazione.* Le condizioni di regolarità di $\mathcal{L}$ nel teorema 47.16 potrebbero essere indebolite, richiedendo che

(1) la funzione $U(q,t)$ sia di classe C^1 nelle sue variabili, e che
(2) la funzione $T(q,y,t)$ sia di classe C^2 nelle variabili y e di classe C^1 nelle restanti variabili. Infatti quello che realmente occorre è che la funzione (47.13) sia di classe C^1 nelle sue variabili, e tale condizione è appunto soddisfatta sotto le condizioni più deboli (1) e (2). Tuttavia, perché il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni sia applicabile, occorre che sia $U(q,t)$ di classe C^2; inoltre nei problemi che si incontrano comunemente si ha spesso una regolarità della lagrangiana molto superiore (*e.g.* C^∞) a quella minima che serve per poter applicare i risultati enunciati nel presente capitolo, quindi non è essenziale ai fini pratici insistere sulle condizioni di regolarità ottimali.

p.47.20 **47.19.** TEOREMA. *Dato un sistema di N punti materiali nello spazio euclideo tridimensionale E^3, che interagiscono attraverso forze conservative, le equazioni di Eulero-Lagrange sono equivalenti alle equazioni di Newton.*

p.47.21 **47.20.** *Dimostrazione del teorema 47.19.* Lo spazio delle configurazioni del sistema è $\mathbb{R}^{3N}$, quindi è rappresentabile mediante un unico sistema di coordinate (globale), *e.g.* utilizzando le coordinate cartesiane dei punti materiali rispetto a una terna di assi cartesiani prefissata. Notando che, in tale sistema di coordinate, si ha

47.20
$$T(x,\dot x,t)\equiv T(\dot x)=\frac12\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} m_n\left(\dot x_k^{(n)}\right)^2,\qquad U(x,t)\equiv U(x), \tag{47.17}$$

abbiamo

47.21
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x_k^{(n)}}=\frac{\partial T}{\partial\dot x_k^{(n)}}=m_n\dot x_k^{(n)},\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_k^{(n)}}=-\frac{\partial U}{\partial x_k^{(n)}}\equiv f_k^{(n)}, \tag{47.18}$$

e possiamo quindi scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma

47.22
$$m_n\ddot x_k^{(n)}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x_k^{(n)}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_k^{(n)}}=f_k^{(n)}, \tag{47.19}$$

che sono appunto le equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali sottosposti alle forze conservative f. ■

p.47.22 **47.21.** PRINCIPIO VARIAZIONALE DI HAMILTON. *Dato un sistema meccanico conservativo, le traiettorie che descrivono il moto sono i punti stazionari del funzionale d'azione.*

p.47.23 **47.22.** *Osservazione.* Le traiettorie che si ottengono dal primo principio variazionale di Hamilton sono soluzioni di un problema con condizioni al contorno per un sistema di equazioni differenziali, dal momento che le soluzioni vengono cercate in uno spazio di funzioni che hanno valori assegnati agli estremi di un dato intervallo di tempo.

Si tratta quindi di un problema diverso dal problema di Cauchy (per lo stesso sistema di equazioni) in cui sono prescritti i valori di $q(t)$ e $\dot q(t)$ all'istante iniziale.

Non varranno quindi in generale i risultati di esistenza e unicità noti per il problema di Cauchy.

In particolare possono esistere problemi al contorno che non hanno soluzioni (corrispondentemente il funzionale d'azione non ha punti stazionari) e altri che hanno più (anche infinite) soluzioni.

p.47.24 **47.23.** ESEMPIO. Si considerino le equazioni dell'oscillatore armonico

47.23
$$\ddot{x} = -x, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{47.20}$$

e sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un dato iniziale. Purché non sia $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ ogni soluzione di (47.17) è periodica con periodo 2π (ed è data da da $x(t) = \bar{x}\cos t + \bar{y}\sin t$).

Quindi il problema con condizioni al contorno

47.24
$$x(0) = x(\tau) = a, \qquad \tau \notin 2\pi\mathbb{Z}, \qquad 0 \neq a \in \mathbb{R}^N, \tag{47.21}$$

per le equazioni (47.20) può non ammettere soluzione, mentre il problema

47.25
$$x(0) = x(2\pi) = a, \qquad 0 \neq a \in \mathbb{R}^N, \tag{47.22}$$

ha infinite soluzioni (che corrispondono agli infiniti problemi di Cauchy che si ottengono fissando la velocità $\bar{y}$ all'istante iniziale).

p.47.25 **47.24.** *Osservazione.* Il teorema 47.16 mostra che per un sistema meccanico conservativo di N punti materiali in E^3 il primo principio variazionale di Hamilton è equivalente ad assumere le equazioni di Newton. In generale quindi l'assunzione del principio variazionale di Hamilton significa che un sistema può essere individuato attraverso l'assegnazione della lagrangiana: le equazioni del moto si ottengono allora a partire da essa, e sono appunto le equazioni di Eulero-Lagrange. Ovviamente la validità del principio risiederà nell'accordo con i dati sperimentali.

p.47.26 **47.25.** *Osservazione.* In generale dimostrare l'esistenza di punti stazionari per il funzionale d'azione è molto complesso. Quello che si riesce a dimostrare è che, nelle ipotesi che il potenziale U sia sufficientemente regolare e la distanza dei punti P_1 e P_2 nonché l'ampiezza dell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ siano entrambi abbastanza piccoli, se il funzionale d'azione ammette un punto stazionario γ nello spazio (47.1), allora γ deve essere un minimo ; cfr. il teorema 47.26 sotto.

Sotto analoghe condizioni si può dimostrare che il problema al contorno ha almeno una soluzione. Si noti che nell'esempio 47.23, quando il problema (47.21) non ammette soluzioni, la condizione che $|t_2 - t_1|$ fosse piccolo non è soddisfatta.

Per questo motivo il primo principio variazionale di Hamilton è talora chiamato, impropriamente, *principio di minima azione*.

p.47.27 **47.26.** TEOREMA. *Data la lagrangiana (47.2), se le funzioni $T(q, \dot{q}, t)$ e $U(q, t)$ sono di classe C^2 nelle loro variabili e la matrice di elementi*

47.26
$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t) \tag{47.23}$$

è definita positiva, indicando con $I(\gamma)$ il funzionale d'azione (47.3) definito sulle traiettorie nello spazio (47.1), allora esiste un tempo $t_2 > t_1$ tale che se la traiettoria $t \to q(t)$ di classe C^2 rende stazionario $I(\gamma)$, tale traiettoria, per $t \in [t_1, t_2]$, costituisce un punto di minimo locale per $I(\gamma)$.

p.47.28 **47.27.** *Dimostrazione del teorema 47.26.* Consideriamo una traiettoria $t \to q(t)$ che renda stazionario $I(\gamma)$, e sia $h \in \mathcal{M}_0$; al solito indichiamo con h sia l'elemento di $\mathcal{M}_0$ sia la sua rappresentazione nel sistema di coordinate scelto. Vogliamo dimostrare che

47.27
$$I(\gamma + h) > I(\gamma), \qquad \forall h \in \mathcal{M}_0 \text{ tale che } \|h\| \ll 1, \tag{47.24}$$

purché le ipotesi del teorema siano soddisfatte e t_2 sia sufficientemente piccolo.

Possiamo scrivere

47.28
$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q+h, \dot q + \dot h, t) = \mathcal{L}(q, \dot q, t) &+ \left\langle h, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q, \dot q, t) \right\rangle + \left\langle \dot h, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}(q, \dot q, t) \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^2}(\xi, \dot\xi, t)\, h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \dot h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q^2}(\xi, \dot\xi, t)\, \dot h \right\rangle \\ &+ \left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot q}(\xi, \dot\xi, t)\, \dot h \right\rangle,\end{aligned} \tag{47.25}$$

dove $(\xi, \dot\xi)$ è un opportuno punto (che dipende da q e h) e il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è in $\mathbb{R}^N$.

Possiamo inoltre dire, in virtù delle ipotesi del teorema, che, per $\|h\| \ll 1$, esistono due costanti strettamente positive c, M tali che

47.29
$$\frac{1}{2}\left\langle \dot h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q^2}(\xi, \dot\xi, t)\, \dot h \right\rangle \geq c \left\langle \dot h, \dot h \right\rangle, \tag{47.26}$$

e

47.30
$$\frac{1}{2}\left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^2}(\xi, \dot\xi, t)\, h \right\rangle \leq M \langle h, h \rangle, \qquad \left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot q}(\xi, \dot\xi, t)\, \dot h \right\rangle \leq M \left\langle h, \dot h \right\rangle, \tag{47.27}$$

così che possiamo scrivere

47.31
$$\begin{aligned} I(\gamma + h) - I(\gamma) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left\langle h, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q, \dot q, t) \right\rangle + \left\langle \dot h, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}(q, \dot q, t) \right\rangle \right. \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^2}(\xi, \dot\xi, t)\, h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \dot h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q^2}(\xi, \dot\xi, t)\, \dot h \right\rangle \\ &\quad \left. + \left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot q}(\xi, \dot\xi, t)\, \dot h \right\rangle \right) \\ &\geq c \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\langle \dot h, \dot h \right\rangle - M \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\langle h, h \rangle + \left\langle h, \dot h \right\rangle \right), \end{aligned} \tag{47.28}$$

avendo tenuto conto che $DI_\gamma(h) = 0$.

Possiamo allora applicare, per stimare il secondo integrale nell'ultima linea (47.28) in termini del primo e dell'ampiezza dell'intervallo $[t_1, t_2]$, la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, che, nel caso che a noi interessa, implica che, per ogni coppia di funzioni f, g a quadrato integrabile in $[t_1, t]$, si ha

47.32
$$\left|\int_{t_1}^t \mathrm{d}\tau\, f(\tau)\, g(\tau)\right| \le \left(\int_{t_1}^t \mathrm{d}\tau\, f^2(\tau)\right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^t \mathrm{d}\tau\, g^2(\tau)\right)^{1/2}. \tag{47.29}$$

Pertanto, tenendo conto che

47.33
$$h(t) = \int_{t_1}^t \mathrm{d}t'\, \dot h(t'), \tag{47.30}$$

poiché $h \in \mathcal{M}_0$, otteniamo subito

47.34
$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \langle h, h\rangle &\le \sum_{k=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Big(\int_{t_1}^t \mathrm{d}t'\, \dot h_k(t') \cdot 1\Big)^2 \\
&\le \sum_{k=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, (t - t_1) \int_{t_1}^t \mathrm{d}t'\, \dot h_k^2(t') \\
&\le \sum_{k=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t' \dot h_k^2(t') \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, (t_2 - t_1) \\
&\le \frac{(t_2 - t_1)^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \langle \dot h, \dot h\rangle,
\end{aligned} \tag{47.31}$$

utilizzando la (47.29), con $(f, g) = (\dot h_k, 1)$, e

47.34a
$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\langle h, \dot h\right\rangle &\le \sum_{k=1}^N \Big(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, h_k^2(t) \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \dot h_k^2(t)\Big)^{1/2} \\
&\le \sum_{k=1}^N \Big(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \dot h_k^2(t)\Big)^{1/2} \Big(\frac{(t_2 - t_1)^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \dot h_k^2(t)\Big)^{1/2} \\
&\le \sqrt{\frac{(t_2 - t_1)^2}{2}} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \langle \dot h, \dot h\rangle,
\end{aligned} \tag{47.32}$$

utilizzando la (47.29) prima con $(f, g) = (h_k, \dot h_k)$, poi di nuovo con $(f, g) = (\dot h_k, 1)$.

Le (47.31), introdotte nella (47.28), dànno, per $t_2 - t_1 < \sqrt{2}$,

47.35
$$I(\gamma + h) - I(\gamma) \ge \big(c - \sqrt{2} M (t_2 - t_1)\big) \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \langle \dot h, \dot h\rangle, \tag{47.33}$$

e possiamo quindi concludere che vale la (47.24) purché t_2 sia scelto così piccolo da soddisfare la diseguaglianza

47.36
$$t_2 - t_1 < \min\left\{\sqrt{2}, \frac{c}{\sqrt{2}M}\right\}; \tag{47.34}$$

Quindi la traiettoria considerata è un punto di minimo per il funzionale d'azione per $t \in [t_1, t_2]$, se t_2 è tale che $|t_2 - t_1|$ soddisfi la (47.34). ■

p.47.29 **47.28.** *Osservazione.* Si noti che le ipotesi del teorema 47.26 sono soddisfatte nel caso di un sistema meccanico di N punti materiali, descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L} = T - U$, con T e U date dalle (47.17).

p.47.30 **47.29.** *Osservazione.* La lagrangiana di un sistema meccanico è definita a meno di una derivata totale. In altre parole, data una lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot q, t)$, a cui siano associate le equazioni di Eulero-Lagrange (47.11), se definiamo una nuova lagrangiana

47.37
$$\mathcal{L}'(q, \dot q, t) = \mathcal{L}(q, \dot q, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(q, t), \tag{47.35}$$

per qualche funzione A di classe C^2, allora $\mathcal{L}'$ ammette le stesse equazioni di Eulero-Lagrange. Infatti i funzionali d'azione I e I', corrispondenti alle due lagrangiane $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$, differiscono per il termine

47.38
$$\tilde A(t_2) - \tilde A(t_1) \qquad \tilde A(t) \equiv A(q(t), t), \tag{47.36}$$

che non dipende dalla traiettoria γ, così che $DI_\gamma(h) = DI'_\gamma(h)$ per ogni h, e quindi le due lagrangiane, per il teorema 47.16, devono ammettere le stesse equazioni di Eulero-Lagrange.

p.47.31 **47.30.** *Osservazione.* Si noti anche che, data una funzione $G\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, una lagrangiana della forma

47.39
$$\mathcal{L} = \langle F(q), \dot q\rangle - U(q), \qquad F(q) = \nabla G(q), \tag{47.37}$$

così che la condizione che la matrice di elementi (47.23) sia non singolare è violata, è priva di qualsiasi interesse fisico. Infatti si ha $\langle F(q), \dot q\rangle = \langle \nabla G(q), \dot q\rangle = \mathrm{d}G/\mathrm{d}t$, e quindi la lagrangiana $\mathcal{L}$ è equivalente alla lagrangiana $\mathcal{L}' = -U(q)$, così che le equazioni di Eulero-Lagrange possono essere soddisfatte solo se $U(q)$ è costante.

sec.48 48. Principio variazionale per moti su varietà

p.48.1 **48.1. Introduzione.** Vogliamo vedere come si estendono i risultati di §47 al caso in cui non sia possibile descrivere il sistema attraverso un unico sistema di coordinate

globali, e, più in generale, al caso in cui il sistema sia definito su una varietà regolare (differenziabile).

p.48.2 **48.2.** Un insieme M è detto *varietà* se è fornito di una collezione finita o numerabile di *carte*, tale che ogni suo punto sia rappresentabile almeno su una carta. Per carta si intende un dominio aperto U di $\mathbb{R}^N$ munito delle coordinate $q = (q_1, \dots, q_N)$ e di una trasformazione Φ invertibile da U in un sottoinsieme di M, $\Phi\colon U \to \Phi(U) \subset M$.

Se un punto x di M è rappresentabile su due carte U e U', *i.e.* $x = \Phi(q)$, $q \in U$, e $x = \Phi'(q')$, $q' \in U'$, allora questo deve accadere anche per degli intorni V e V' di x nelle rispettive carte. Si ottiene allora una trasformazione $(\Phi')^{-1} \circ \Phi\colon V \to V'$ di una parte di una carta U in una parte di una carta U', tale che $q' = q'(q)$; se la funzione $q \to q'(q)$ e la sua inversa $q' \to q(q')$ sono differenziabili diremo che le carte sono compatibili.

Definiremo *atlante* l'insieme di carte compatibili tra loro, e diremo che due atlanti sono equivalenti se la loro unione è ancora un atlante.

Una *varietà differenziale* (o *regolare*) è una classe di equivalenza di atlanti. Se la varietà è connessa, ogni carta è un aperto di $\mathbb{R}^N$, con lo stesso indice N: diremo quindi che N è la dimensione della varietà.

p.48.3 **48.3.** DEFINIZIONE (LAGRANGIANA E FUNZIONALE D'AZIONE SU VARIETÀ). *Dato un sistema meccanico definito su una varietà Σ, sia, per ogni $x \in \Sigma$, $T_x\Sigma$ lo spazio tangente in x a Σ. Per ogni $x \in \Sigma$ scegliamo una carta in cui x sia descritto dalle coordinate q; definiamo l'energia cinetica $T(q, \dot q, t)$ e l'energia potenziale $U(q, t)$, e poniamo*

48.1
$$\mathcal{L}(q, y, t) = T(q, y, t) - U(q, t), \tag{48.1}$$

che è dunque una funzione definita su $T\Sigma \times \mathbb{R}$, se $T\Sigma \equiv \cup_{x\in\Sigma} T_x\Sigma$ è il fibrato tangente di Σ; scriveremo in generale che la lagrangiana è una funzione $\mathcal{L}\colon T\Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, senza specificarne le coordinate, che variano a seconda delle carta scelta. Definiamo quindi

48.2
$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}, \tag{48.2}$$

La funzione (48.2) prende il nome di lagrangiana *del sistema considerato e il funzionale (48.3) è il corrispondente* funzionale d'azione.

p.48.4 **48.4.** TEOREMA. *Dato un sistema meccanico il cui spazio delle configurazioni sia una varietà regolare e data una lagrangiana che soddisfi, in ogni carta, le condizioni di regolarità del teorema 47.15, una traiettoria di classe C^2 è un punto di stazionarietà per il corrispondente funzionale d'azione se e solo se in ogni carta il suo rappresentativo soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange.*

p.48.5 **48.5.** *Dimostrazione del teorema 48.4.* Sia γ una traiettoria di classe C^2 su una varietà regolare Σ di dimensione N: allora il funzionale d'azione è ben definito, poiché,

per l'additività dell'integrazione, si può scrivere come somma di più integrali ciascuno dei quali è definito in un intervallo di tempo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, \dots, \mathcal{N}$, con $\tau_0 = t_1$ e $\tau_{\mathcal{N}} = t_2$, in cui sia possibile utilizzare un unico sistema di coordinate, *i.e.* la traiettoria γ, per $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, è rappresentabile su una sola carta U_i.

Inoltre il valore numerico di ogni singolo integrale non dipende dal sistema di coordinate scelto e il valore finale del funzionale d'azione (fissata γ) non dipende dalla particolare scomposizione di $[t_1, t_2]$ scelta.

Vogliamo innazitutto dimostrare che i punti stazionari del funzionale d'azione corrispondono alle traiettorie che, in ogni carta, soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange.

Sia γ_0 una traiettoria che rende stazionario il funzionale d'azione, *i.e.* $DI_{\gamma_0}(h) = 0$ per ogni $h \in \mathcal{M}_0$, se $I(\gamma)$ è il funzionale (48.3).

Possiamo scrivere

48.3
$$I(\gamma) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(q^{(i)}(t), \dot{q}^{(i)}(t), t), \tag{48.3}$$

dove $q^{(i)} = (q_1^{(i)}, \dots, q_N^{(i)})$ è il sistema di coordinate della carta U_i. Quindi il differenziale di $I(\gamma)$ diventa

48.4
$$DI_\gamma(h) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathrm{d}t \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(i)}}, h^{(i)} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{(i)}}, \dot{h}^{(i)} \right\rangle, \tag{48.4}$$

dove $h^{(i)} = (h_1^{(i)}, \dots, h_N^{(i)})$ sono le coordinate della deformazione h nella carta U_i.

Sotto le ipotesi di regolarità di della lagrangiana possiamo integrare per parti i termini lineari in $\dot{h}^{(i)}$, ottenendo per ogni $i = 1, \dots, \mathcal{N}$

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathrm{d}t \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{(i)}}(q^{(i)}(t), \dot{q}^{(i)}(t), t), \dot{h}^{(i)}(t) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{(i)}}(q^{(i)}(t), \dot{q}^{(i)}(t), t), h^{(i)}(t) \right\rangle \Bigg|_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}$$

48.5
$$- \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathrm{d}t \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{(i)}}(q^{(i)}(t), \dot{q}^{(i)}(t), t), h^{(i)}(t) \right\rangle, \tag{48.5}$$

Ora i termini di bordo non si annullano singolarmente (poiché in generale $h^{(i)}(\tau_{i_1})$ e $h^{(i)}(\tau_i)$ sono diversi da zero). Tuttavia per ogni $2 = 1, \dots, \mathcal{N}$ si ha

48.6
$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{(i)}}(q(\tau_{i-1}), \dot{q}^{(i)}(\tau_{i-1}), \tau_{i-1}), h^{(i)}(\tau_{i-1}) \right\rangle \\ &\qquad = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{(i-1)}}(q(\tau_{i-1}), \dot{q}^{(i-1)}(\tau_{i-1}), \tau_{i-1}), h^{(i-1)}(\tau_{i-1}) \right\rangle, \end{aligned} \tag{48.6}$$

poiché la carte sono compatibili, e, inoltre, i termini che corrispondono a τ_0 e a τ_N si annullano poiché $h \in \mathcal{M}_0$. In conclusione se sommiamo (48.5) su $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ otteniamo

48.7
$$DI_\gamma(h) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathrm{d}t \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(i)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{(i)}}, \dot{h}^{(i)} \right\rangle, \tag{48.7}$$

per ogni $h \in \mathcal{M}_0$. In particolare possiamo scegliere $h \in \mathcal{M}_0$ tale che $h(t) \neq 0$ solo per $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, così che ragionando come nel paragrafo §47.17 concludiamo che nella carta $U^{(i)}$ si deve avere

48.8
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(i)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{(i)}} = 0. \tag{48.8}$$

Ovviamente l'argomento si applica a ogni carta U_i: abbiamo quindi dimostrato che se γ è una traiettotia di classe C^2 che rende stazionario il funzionale d'azione (48.2) allora in ogni carta il suo rappresentativo soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange.

Esattamente come nella dimostrazione del teorema 47.16 gli stessi passaggi possono essere eseguiti nel verso opposto, e quindi otteniamo che se in ogni carta il rappresentativo di una traiettoria γ di classe C^2 soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange allora γ rende stazionario il funzionale d'azione (48.2).

Il teorema è quindi dimostrato. ■

p.48.6 **48.6.** DEFINIZIONE (SISTEMA LAGRANGIANO). *Dato un sistema meccanico definito su una varietà regolare* Σ *e descritto da una lagrangiana* $\mathcal{L} : T\Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, diremo che tale* $(\Sigma, \mathcal{L})$ *è un* sistema lagrangiano.

p.48.7 **48.7.** *Osservazione.* I sistemi considerati nel paragrafo precedente sono un esempio particolare di sistemi lagrangiani, in cui $\Sigma = \mathbb{R}^N$.

p.48.8 **48.8.** Il principio variazionale 47.21 si può estendere al caso di sistemi lagrangiani generali, senza necessariamente supporre che la lagrangiana $\mathcal{L}$ descriva un sistema meccanico. Possiamo quindi formulare, più in generale il principio variazionale di Hamilton nel modo seguente: dato un sistema lagrangiano $(\Sigma, \mathcal{L})$ (quale è definito in §48.6), le traiettorie che risolvono le corrispondenti equazioni del moto sono i punti stazionari del funzionale d'azione (48.3) associato alla lagrangiana $\mathcal{L}$.

sec.49
49. Formalismo lagrangiano per sistemi vincolati

p.49.1 **49.1. Introduzione.** Dato un sistema soggetto a vincoli olonomi bilateri che determinano una superficie regolare Σ (in generale dipendente dal tempo) di codimensione M, defineremo la lagrangiana $\mathcal{L}_V$ del sistema come la restrizione della lagrangiana $\mathcal{L}$ dello stesso sistema in assenza dei vincoli al fibrato tangente $T\Sigma$; scriveremo quindi $\mathcal{L}_V = \mathcal{L}|T\Sigma$ e chiameremo $\mathcal{L}_V$ *lagrangiana vincolata*. Introdotto in (un intorno di) Σ un sistema di coordinate locali $q \equiv (q_1, \dots, q_{3N-M})$, per tempi sufficientemente piccoli così che il moto si possa considerare limitato all'intorno considerato, potremmo allora esprimere le coordinate cartesiane naturali $x \in \mathbb{R}^{3N}$ in termini delle $3N - M$ coordinate locali, $x = x(q, t)$, o, più estesamente,

49.1
$$x_k^{(n)} = x_k^{(n)}(q_1, \dots, q_{3N-M}, t) \equiv x_k^{(n)}(q, t), \qquad n = 1, \dots, N\,, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{49.1}$$

dove si ha dipendenza esplicita dal tempo solo se il vincolo dipende dal tempo; altrimenti scriveremo $x = x(q)$.

Chiameremo *sistema di coordinate lagrangiane* (o *sistema di coordinate generalizzate*) il sistema di coordinate locali q.

Se per $t = 0$ si ha $\bar{x} = x(\bar{q}, 0) \in U$, dove U è l'intorno di Σ in cui si usano le coordinate q, allora per tempi t tali che la traiettoria di dato iniziale $\bar{x}$ rimane in U si ha

49.2
$$\frac{\mathrm{d}x_k^{(n)}}{\mathrm{d}t} = \sum_{m=1}^{3N-M} \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_m} \frac{\mathrm{d}q_m}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial t}, \tag{49.2}$$

che permette di esprimere anche le velocità $\dot{x}$ in termini delle coordinate locali $q, \dot{q}$ (e di t).

Quindi in U la lagrangiana vincolata $\mathcal{L}_V$ è rappresentata dalla funzione

49.3
$$\mathcal{L}_V(q, \eta, t) = \mathcal{L}(x(q,t), \dot{x}(q,\eta,t), t) = T(x(q,t), \dot{x}(q,\eta,t), t) - U(x(q,t), t), \tag{49.3}$$

se $\mathcal{L} = T - U$ è la lagrangiana del sistema in assenza di vincoli.

Infine scriveremo il *funzionale d'azione per il sistema vincolato*, definito sulle traiettorie γ in Σ che connettono $q^{(1)}$ a $q^{(2)}$, come

49.4
$$I_V(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}_V(q(t), \dot{q}(t), t), \tag{49.4}$$

dove $q(t_1) = q^{(1)}$ e $q(t) = q^{(2)}$ (si noti che $q^{(1)}, q^{(2)} \in \mathbb{R}^{3N-M}$).

Utilizzando il fatto che la superficie è regolare e la proprietà additiva dell'integrazione, è possibile estendere la definizione (49.4) anche al caso in cui le traiettorie non siano ristrette a un intorno prefissato di Σ.

p.49.2 **49.2.** *Osservazione.* Utilizzando la definizione §35.15, possiamo supporre che i punti della superficie di vincolo Σ siano descritti, almeno localmente, da un sistema di coordinate regolari β di base Ω adattato a Σ. Questo vuol dire che possiamo scegliere come coordinate q le coordinate $(\beta_{M+1}, \dots, \beta_{3N})$. Quindi la notazione $x = x(q)$ equivale alla notazione $x = \Xi(0, \dots, 0, \beta_{M+1}, \dots, \beta_{3N})$.

p.49.3 **49.3.** PRINCIPIO VARIAZIONALE DI HAMILTON PER SISTEMI SOGGETTI A VINCOLI OLONOMI BILATERI. *Le traiettorie di sistemi meccanici conservativi soggetti a vincoli olonomi bilateri sono i punti critici del funzionale d'azione (49.4).*

p.49.4 **49.4.** *Osservazione.* Il principio 49.3 afferma che le equazioni del moto del sistema vincolato sono le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti alla lagrangiana $\mathcal{L}_V$.

p.49.5 **49.5.** TEOREMA. *Dato un sistema di N punti materiali soggetti a forze conservative e a vincoli olonomi bilateri, le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti alla La-*

grangiana $\mathcal{L}_V$ sono equivalenti alle equazioni di Newton supplementate dal principio di d'Alembert.

p.49.6 **49.6.** *Dimostrazione del teorema 49.5.* Supponiamo che la traiettoria γ sia un punto stazionario del funzionale d'azione (49.4). Se γ è descritta da $t \to q(t)$, con $t \in [t_1, t_2]$, sia γ' una traiettoria descritta da $t \to q(t)+h(t)$, con $h(t_1) = h(t_2) = 0$. Introduciamo

49.5
$$\delta = x(q + h) - x(q), \tag{49.5}$$

che, per costruzione, è infinitesima di ordine $\|h\|$. Se $x = x(q, t)$ continuiamo a scrivere la (49.5) sottointendendo la dipendenza da t; si noti che se q e $q + h$ dipendono da t anche $\delta = \delta(t)$ è una funzione di t.

Inoltre esiste un vettore $\zeta \in T_{x(q)}\Sigma$ tale che

49.6
$$\delta = \|h\|\zeta + o(\|h\|), \tag{49.6}$$

dove $o(\|h\|)$ indica una quantità che tende a zero più velocemente di $\|h\|$, per $\|h\| \to 0$.

Viceversa, per ogni vettore $\zeta \in T_{x(q)}\Sigma$, è possibile scegliere una funzione h per la quale la (49.6) sia soddisfatta.

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(q + h, \dot q + \dot h, t) - \mathcal{L}_V(q, \dot q, t) &= \mathcal{L}(x(q + h), \dot x(q + h, \dot q + \dot h), t) - \mathcal{L}(x(q), \dot x(q, \dot q), t)\\ &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, x(q + h) - x(q) \right\rangle \qquad (49.7)\\ &+ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x}, \dot x(q + h, \dot q + \dot h) - \dot x(q, \dot q) \right\rangle + o(\|h\|).\end{aligned}$$

49.6a

Se $I_V(\gamma)$ e $I_V(\gamma')$ indicano i funzionali d'azione in corrispondenza, rispettivamente, delle traiettorie γ e γ', abbiamo quindi

49.6b
$$I_V(\gamma') - I_V(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^{(n)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x_k^{(n)}}, x_k^{(n)}(q + h) - x_k^{(n)}(q) \right\rangle + o(\|h\|), \tag{49.8}$$

avendo integrato per parti la seconda somma dell'ultima riga di (49.7). In conclusione abbiamo

49.7
$$\left| I_V(\gamma') - I_V(\gamma) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^{(n)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x_k^{(n)}} \right) \zeta_k^{(n)} \|h\| \right| = o(\|h\|). \tag{49.9}$$

Poiché per ipotesi γ è un punto critico, deve essere nulla la variazione del funzionale d'azione in corrispondenza di γ, *i.e.* $DI_{V\gamma}(h) = 0$ per ogni deformazione h: poiché il vettore ζ in (49.6) è arbitario (essendo arbitaria la funzione h, all'interno del suo spazio d'appartenenza), il vettore f_V di componenti

49.8
$$f_{Vk}^{(n)} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x_k^{(n)}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^{(n)}} \right) \tag{49.10}$$

deve essere in ogni istante $t \in [t_1, t_2]$ perpendicolare alla superficie Σ nel punto di coordinate $x(q(t))$.

Tenuto conto che per un sistema di N punti materiali soggetti a forze conservative, la lagrangiana assume la forma $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - U(x)$, con

49.9
$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, m\dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} m_n \left(\dot{x}_k^{(n)} \right)^2, \tag{49.11}$$

dove m è la matrice di massa introdotta nel paragrafo §35.12, possiamo riscrivere la (49.10) nella forma

49.10
$$m_n \ddot{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)} + \mathbf{f}_V^{(n)}, \qquad \mathbf{f}^{(n)} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}^{(n)}}, \tag{49.12}$$

dove, per quanto detto, il vettore f_V è perpendicolare alla superficie di vincolo Σ.

Quindi la traiettoria γ dà la soluzione delle equazioni di Newton supplementate del principio di d'Alembert e il vettore f_V rappresenta le forze di vincolo.

Sotto opportune ipotesi di regolarità le equazioni di Newton supplementate del principio di d'Alembert ammettono una soluzione unica per ogni scelta di dati iniziali compatibili con il vincolo, quindi la soluzione trovata è la soluzione del sistema di equazioni (49.12) con i dati iniziali del problema variazionale.

Supponiamo ora che x, f_V siano una soluzione delle equazioni di Newton (49.26), in cui i vettori f_V sono legati ai vincoli attraverso le relazioni (39.5), con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$. Questo vuol dire che vale la (49.12), con i vettori f_V perpendicolari alla superficie di vincolo, per il principio di d'Alembert. Per ogni $t \in [t_1, t_2]$, il vettore $m\ddot{x} - f$ è ortogonale alla superficie di vincolo Σ nel punto $x \equiv x(q(t))$: quindi per ogni traiettoria h con $h(t_1) = h(t_2) = 0$ esiste una funzione a valori vettoriali ζ tale che il vettore definito in (49.5) soddisfi la (49.6). Ne segue che deve essere $|I_V(\gamma') - I_V(\gamma)| = o(\|h\|)$ e quindi $DI_{V\gamma}(h) = 0$ per ogni deformazione h. ■

p.49.7 **49.7.** *Osservazione.* Il teorema 49.5 legittima il principio variazionale 49.3. Infatti la validità del principio è garantita dall'accordo con i dati sperimentali e il teorema 49.5, mostrando appunto che le traiettorie che si trovano mediante l'applicazione del principio sono le stesse che si ottengono dalle equazioni del moto (se si assume il principio variazionale di Hamilton per sistemi non soggetti a vincoli) attraverso l'applicazione del principio di d'Alembert, riconduce la ragionevolezza del principio 49.3 alla ragionevolezza del principio di d'Alembert.

p.49.8 **49.8.** *Osservazione.* La trattazione precedente può essere imediatamente estesa al caso di sistemi con vincoli anolonomi integrabili: infatti, per l'osservazione 41.7, un vincolo anolonomo integrabile si può sempre esprimere come vincolo olonomo.

p.49.8a **49.9.** ESEMPIO. Trovare l'energia cinetica di un cilindro omogeneo di massa m e raggio r che rotoli senza strisciare (1) su un piano orizzontale π, e (2) all'interno di

una superficie cilindrica di raggio $R > r$. Nel secondo caso discutere i limiti $R = r$ e $R \to \infty$.

p.49.8b **49.10.** *Discussione dell'esempio 49.9.* Consideriamo prima il caso (1). Scegliamo un sistema di riferimento in cui il piano (x, y) coincida con il piano π e l'asse y sia parallelo all'asse del cilindro (poiché il moto è di rotolamento senza strisciamento se i due assi sono paralleli all'istante iniziale t_0 restano tali per ogni tempo t). Sia θ l'angolo tra la verticale al piano e un diametro prefissato del cilindro (tale che $\theta = 0$ per $t = 0$); cfr. l'esempio 41.14. Il centro d'inerzia del cilindro ha velocità parallela al piano, data da

49.10a $$\dot{x} = r\dot{\theta}, \tag{49.13}$$

quindi

49.10b $$T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2, \tag{49.14}$$

dove I_3 è dato dalla (42.32) dell'esempio 42.33.

Nel caso (2), sia φ l'angolo tra la verticale e la linea che unisce i centri dei due cilindri. Il centro d'inerzia O del cilindro che rotola si muove con velocità di modulo $v_O = (R-r)\dot{\varphi}$. La velocità angolare di una rotazione pura intorno all'asse istantaneo che coincide con la retta di contatto dei due cilindri è data da

49.10c $$\dot{\theta} = \frac{v_O}{r} = \frac{R-r}{r}\,\dot{\varphi}. \tag{49.15}$$

Quindi, se I_3 è il momento d'inerzia del cilindro intorno al suo asse di simmetria, si ha

49.10d $$T = \frac{1}{2}m\,(R-r)^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}m\,(R-r)^2\,\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2. \tag{49.16}$$

Per $R = r$ l'energia cinetica in (49.16) è nulla: questo è consistente con il fatto che per $R = r$ il cilindro interno non può rotolare senza strisciare su quello esterno, e quindi l'unico modo in cui il vincolo di rotolamento senza strisciamento possa essere soddisfatto è che il cilindro interno sia fermo.

Se $R \to \infty$ ritroviamo il caso (1), come si vede dal fatto che l'espressione in (49.16) di T in termini di $\dot{\theta}$ è uguale alla (49.14).

p.49.8c **49.11.** ESEMPIO. Scrivere l'energia cinetica di un cono omogeneo nel caso in cui (1) esso rotoli senza strisciare su un piano π, e (2) la sua base rotoli senza strisciare su un piano π mentre il suo vertice è fissato a un'altezza uguale al raggio della base (così che l'asse del cono risulti parallelo al piano π).

p.49.8d **49.12.** *Discussione dell'esempio 49.11.* Sia h l'altezza del cono e r il raggio della sua base; indichiamo con 2α l'angolo di apertura del cono ($h\tan\alpha = r$) e con $a = 3h/4$ la distanza del centro d'inerzia O dal vertice C del cono.

Consideriamo prima il caso (1). Si fissi un sistema di coordinate la cui orgine sia in C ($\mathbf{q}_C = \mathbf{0}$) e i cui assi $\mathbf{e}_x$ ed $\mathbf{e}_y$ generino il piano π su cui il cono rotola: sia θ l'angolo che l'asse di contatto s del cono con il piano forma con una direzione prefissata, *e.g.* con $\mathbf{e}_x$.

La velocità del centro d'inerzia è data (in modulo) da $v_O = a\dot\theta\cos\alpha$. Il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ può essere calcolato come una rotazione pura intorno all'asse s: risulta, in modulo, $\Omega = v_O(a\sin\alpha)^{-1} = \dot\theta\cot\alpha$, e la sua direzione è parallela a s.

Come assi d'inerzia del cono si possono prendere (cfr. l'esempio 42.36) l'asse $\mathbf{e}_3$ del cono e due assi $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ tali che $\mathbf{e}_1$ appartenga al piano contenente l'asse del cono e la retta s. Quindi le componenti di $\boldsymbol{\Omega}$ sono

49.10e
$$\Omega_1 = \Omega\sin\alpha = \dot\theta\cos\alpha, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = \Omega\cos\alpha = \dot\theta\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}, \tag{49.17}$$

così che l'energia cinetica (cfr. i paragrafi §37 e §42) si può scrivere nella forma

49.10f
$$T = T' + T'' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_O^2 + \frac{1}{2}\left\langle\boldsymbol{\Omega}, I\boldsymbol{\Omega}\right\rangle, \tag{49.18}$$

dove

49.10g
$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_O^2 = \frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2\cos^2\alpha, \\ T'' &= \frac{1}{2}\left\langle\boldsymbol{\Omega}, I\boldsymbol{\Omega}\right\rangle = \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}I_3\dot\theta^2\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}, \end{aligned} \tag{49.19}$$

e quindi, tenendo conto che (cfr. l'esempio 42.36)

49.10h
$$I_1 = I_2 = \frac{3}{80}m\left(4r^2 + h^2\right), \qquad I_3 = \frac{3}{10}mr^2, \tag{49.20}$$

si trova che l'energia cinetica è data da

49.10i
$$T = \frac{3}{40}mh^2\dot\theta^2\left(1 + 5\cos^2\alpha\right). \tag{49.21}$$

Si noti anche che dal confronto tra la (49.21) e la (42.19), se esprimiamo $\dot\theta$ in termini di Ω attraverso la (49.17), possiamo concludere che il momento d'inerzia di un cono rispetto a un asse $\mathbf{e}$ coincidente con una generatrice del cono è dato da

49.10j
$$I_{\mathbf{e}} = \frac{3}{20}mh^2\left(\tan^2\alpha + 5\sin^2\alpha\right). \tag{49.22}$$

Nel caso (2), se θ è l'angolo tra l'asse $\mathbf{e}_x$ e la proiezione dell'asse del cono sul piano π (generato dagli assi $\mathbf{e}_x$ ed $\mathbf{e}_y$), allora la velocità del centro d'inerzia è $v_O = a\dot\theta$. L'asse di moto è la generatrice s del cono che passa per il punto di contatto della base del cono con il piano π, e il centro d'inerzia è a distanza $a\sin\alpha$ da tale asse, così che la velocità angolare risulta data da $\Omega = v_0(a\sin\alpha)^{-1} = \dot\theta/\sin\alpha$. Se gli assi d'inerzia

sono scelti in modo tale che $\mathbf{e}_1$ sia nel piano contenente l'asse del cono e la retta s, si ha

49.10k $$\Omega_1 = \Omega \sin\alpha = \dot\theta, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = \Omega\cos\alpha = \dot\theta\cot\alpha, \tag{49.23}$$

e quindi

40.10l $$T = \frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_3\dot\theta^2\cot^2\alpha = \frac{3}{40}mh^2\dot\theta^2\left(\cos^{-2}\alpha + 5\right), \tag{49.24}$$

con le stesse notazioni della (49.20).

p.49.9 **49.13.** Possiamo anche considerare il caso di un sistema meccanico non conservativo. In questo caso non è possibile associare al sistema una lagrangiana; ci si può tuttavia porre il problema se il formalismo lagrangiano è ancora utilizzabile e, più in particolare, se fornisce un metodo utile per scrivere le equazioni del moto.

p.49.10 **49.14.** TEOREMA. *Consideriamo un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi bilateri (o anolonomi integrabili bilateri), definito dalle equazioni di Newton (49.12). Introdotto un sistema di coordinate generalizzate q, tale che valga la (49.1), possiamo allora scrivere le equazioni di Newton nella forma*

49.11 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m, \qquad m = 1, \dots, 3N - M, \tag{49.25}$$

dove $T = T(q, \dot q, t)$ è l'energia cinetica del sistema e le grandezze

49.12 $$Q_m = Q_m(q) \equiv \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} f_k^{(n)}\frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_m}, \tag{49.26}$$

prendono il nome di forze generalizzate.

p.49.11 **49.15.** *Dimostrazione del teorema 49.14.* Introduciamo un sistema di coordinate η per lo spazio tangente a Σ, così che, dato $\xi \in T_x\Sigma$, possiamo scrivere

49.13 $$\xi_k^{(n)} = \sum_{m=1}^{3N-M}\frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_m}\,\eta_m, \tag{49.27}$$

dal momento che i $3N - M$ vettori $\partial x/\partial q_1, \dots, \partial x/\partial q_{3N-M}$ (ciascuno dei quali ha componenti $x_k^{(n)}/\partial q_m$) formano una base per lo spazio tangente a Σ nel punto $x = x(q)$ (cfr. l'esercizio 2).

Per il principio di d'Alembert 48.2 abbiamo, per ogni $\xi \in T_x\Sigma$,

49.14 $$\langle f_V, \xi\rangle = \langle f - m\ddot x, \xi\rangle \equiv \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\left(f_k^{(n)} - m_n\ddot x_k^{(n)}\right)\xi_k^{(n)} = 0, \tag{49.28}$$

dove possiamo riscrivere

49.15
$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} f_k^{(n)}\xi_k^{(n)} = \sum_{m=1}^{3N-M} Q_m\eta_m, \tag{49.29}$$

come conseguenza delle definizioni (49.26) e (49.27).

È inoltre immediato verificare che

49.16
$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} m_n\ddot{x}_k^{(n)}\xi_k^{(n)} = \sum_{m=1}^{3N-M}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m}\right)\eta_m, \tag{49.30}$$

come adesso faremo, semplicemente utilizzando la definizione di energia cinetica e il fatto che, per le (49.1) e (49.2), si ha

49.17
$$\frac{\partial\dot{x}_k^{(n)}}{\partial\dot{q}_m} = \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_m}. \tag{49.31}$$

Possiamo infatti riscrivere l'energia cinetica in (49.11) come

49.18
$$T = \frac{1}{2}\left\langle\dot{x}, m\dot{x}\right\rangle, \tag{49.32}$$

così che, per la (49.31),

49.19
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_m} = \left\langle m\dot{x}, \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{q}_m}\right\rangle = \left\langle m\dot{x}, \frac{\partial x}{\partial q_m}\right\rangle, \tag{49.33}$$

e quindi

49.20
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_m} = \left\langle m\ddot{x}, \frac{\partial x}{\partial q_m}\right\rangle + \left\langle m\dot{x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x}{\partial q_m}\right\rangle = \left\langle m\ddot{x}, \frac{\partial x}{\partial q_m}\right\rangle + \left\langle m\dot{x}, \frac{\partial\dot{x}}{\partial q_m}\right\rangle. \tag{49.34}$$

Poiché inoltre

49.21
$$\frac{\partial T}{\partial q_m} = \left\langle m\dot{x}, \frac{\partial\dot{x}}{\partial q_m}\right\rangle, \tag{49.35}$$

si vede, dalle (49.34) e (49.35), che

49.22
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_m} - \frac{\partial T}{\partial q_m} = \left\langle m\ddot{x}, \frac{\partial x}{q_m}\right\rangle, \tag{49.36}$$

da cui segue la (49.30). ■

p.49.12 **49.16.** COROLLARIO. *Sotto le stesse ipotesi del teorema 49.14, se le forze sono conservative, i.e. se esiste un potenziale $U(x,t)$ tale che $f = -\partial U/\partial x$, allora le equazioni*

(49.25) sono equivalenti alle equazioni di Eulero-Lagrange associate alla lagrangiana $\mathcal{L} = T - U$.

p.49.13 **49.17.** *Dimostrazione del Corollario 49.16.* Nel caso di forze conservative, possiamo scrivere, utilizzando la definizione (49.26),

49.23
$$Q_m = -\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U(x,t)}{\partial x_k^{(n)}} \frac{\partial x_j^{(n)}}{\partial q_m} \equiv -\frac{\partial U(x(q,t),t)}{\partial q_m}, \tag{49.37}$$

e quindi, definendo

49.24
$$\mathcal{L}(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - U(x(q,t),t) = T(x(q,t),\dot x(q,\dot q,t),t) - U(x(q,t),t), \tag{49.38}$$

le equazioni (49.25) si possono riscrivere nella forma

49.25
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_m} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_m} = 0, \qquad m = 1,\dots,3N-M, \tag{49.39}$$

che sono le equazioni di Eulero-Lagrange associate alla lagrangiana (49.38). ■

p.49.14 **49.18.** *Osservazione.* Nel caso del corollario 49.16 la funzione lagrangiana $\mathcal{L}(q,\dot q,t)$ si ottiene da $\mathcal{L}(x,\dot x,t)$ scrivendo x e $\dot x$ in termini di q e $\dot q$. Possiamo quindi riscrivere $\mathcal{L}(q,\dot q,t)$ come $\mathcal{L}_V(q,\dot q,t)$, sia per evitare confusione notazionale sia per sottolineare che tale lagrangiana descrive il sistema vincolato. Questo dimostra quindi che la funzione (49.3) è la funzione che si deve considerare se si vuole applicare il formalismo lagrangiano a un sistema vincolato.

p.49.15 **49.19. Calcolo delle forze vincolari.** Per determinare le forze vincolari $\mathbf{f}_V$ che compaiono nelle equazioni del moto (49.12) si può procedere come segue. Si lavora nelle coordinate lagrangiane $q = (q_1,\dots,q_{3N-M})$ risolvendo le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti alla lagrangiana vincolata $\mathcal{L}_V(q,\dot q,t)$: in tali coordinate le forze vincolari non compaiono: una volta trovata la soluzione $q(t)$, possiamo esprimerla nelle coordinate cartesiane originarie attraverso la (49.1). Risulta allora

49.26
$$\mathbf{f}_V^{(n)} \equiv m_n \ddot{\mathbf{x}}^{(n)}(q(t)) - \mathbf{f}^{(n)}(x(q(t))), \tag{49.40}$$

per definizione di forza vincolare.

sec.50
50. Vincoli approssimati

p.50.1 **50.1. Introduzione.** La definizione di vincolo data nei paragrafi precedenti è di natura puramente matematica, e non è quindi chiaro se può essere in pratica assunta per descrivere, e con che precisione, i vincoli reali.

Da un punto di vista fisico si può pensare che i vincoli si possano ottenere da un sistema di forze molto intense che agiscono sui punti materiali costringendoli a rimanere su una supeficie dello spazio delle configurazioni; i punti materiali tendono a opporsi a tale forze, a causa della loro inerzia, e producono così delle deformazioni (impercettibili macroscopicamente) degli ostacoli rappresentati dai vincoli.

Ci si può quindi chiedere se i vincoli perfetti siano una descrizione approssimata ragionevole dei vincoli reali (che vincolano i punti materiali solo in modo approssimato).

p.50.2 **50.2.** DEFINIZIONE (MODELLO DI VINCOLO APPROSSIMATO). *Dato un sistema di N punti materiali in $\mathbb{R}^3$ e una superficie Σ in $\mathbb{R}^{3N}$ di codimensione M, sia $W\colon \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che si annulli su Σ e sia strettamente positiva al di fuori di Σ, i.e. tale che*

50.1
$$W(x) = 0 \text{ per } x \in \Sigma, \qquad W(x) > 0 \text{ per } x \notin \Sigma. \tag{50.1}$$

Diremo che la forza conservativa con energia potenziale $\lambda W(x)$, $\lambda > 0$, è un modello di vincolo (olonomo bilatero) approssimato *alla superficie Σ con* struttura W *e* rigidità λ, *e la indicheremo con (Σ, W, λ).*

p.50.3 **50.3.** DEFINIZIONE (MATRICE CINETICA). *Dato un intorno $U \in \mathbb{R}^{3N}$ e un sistema di coordinate (locali) regolari (U, Ξ) con base Ω, tale che per $x \in U$ si abbia $x = \Xi(\beta)$, $\beta \in \Omega$, la matrice $3N \times 3N$ di elementi*

50.2
$$g_{ij}(\beta) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \Xi_k^{(n)}(\beta)}{\partial \beta_i} \frac{\partial \Xi_k^{(n)}(\beta)}{\partial \beta_j} \equiv \left\langle \frac{\partial \Xi(\beta)}{\partial \beta_i}, \frac{\partial \Xi(\beta)}{\partial \beta_j} \right\rangle, \tag{50.2}$$

è chiamata matrice cinetica.

p.50.4 **50.4.** LEMMA. *Dato un sistema di N punti materiali l'energia cinetica*

50.3
$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} m_n \left(\dot{x}_k^{(n)} \right)^2, \tag{50.3}$$

può essere espressa nelle coordinate β nella forma

50.4
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3N} g_{ij}(\beta) \dot{\beta}_i \dot{\beta}_j \equiv \left\langle \dot{\beta}, g(\beta) \dot{\beta} \right\rangle, \tag{50.4}$$

dove g è la matrice cinetica (50.2) e il prodotto scalare è in $\mathbb{R}^{3N}$.

p.50.5 **50.5.** *Dimostrazione del lemma 50.4.* Basta notare che

50.5
$$\dot{x} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \Xi(\beta)}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j \equiv \left\langle \frac{\partial \Xi}{\partial \beta}, \dot{\beta} \right\rangle, \tag{50.5}$$

e utilizzare la definizione 50.3 di matrice cinetica. ■

p.50.6 **50.6.** LEMMA. *La matrice cinetica (50.2) gode delle seguenti proprietà:*
(1) g è simmetrica e definita positiva;
(2) gli elementi della matrice g, della sua inversa g^{-1} e dell'inversa di ogni sua sottomatrice principale sono di classe C^1 in β;
(3) esiste una funzione continua $C\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tale che, se $\mu(\beta)$ è una qualsiasi sottomatrice principale $q \times q$, risulta

50.6
$$C^{-1}(\beta)\,\langle \sigma, \sigma\rangle \le \langle \sigma, \mu(\beta)\sigma\rangle \le C(\beta)\,\langle \sigma, \sigma\rangle\,, \tag{50.6}$$

per ogni $\sigma \in \mathbb{R}^q$, se $\langle \cdot, \cdot\rangle$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^q$.

p.50.7 **50.7.** *Dimostrazione del lemma 50.6.* La proprietà (1) segue dalla definizione (50.2), dalla relazione (50.4) e dal fatto che l'energia cinetica (50.3) è una quantità positiva e si annulla solo per $\dot{x} = 0$.

La proprietà (2) è conseguenza del fatto che le sottomatrici principali di una matrice definita positiva sono anch'esse definite positive e quindi invertibili con inversa definita positiva (l'appartenenza a C^1 segue dal fatto che ogni elemento di matrice di g è in C^1, per le ipotesi fatte sulla trasformazione Ξ, e le operazioni di inversione per quanto visto sono ben definite).

Anche la proprietà (3) è ovvia. Infatti ogni matrice μ $q \times q$ simmetrica definita positiva ammette q autovalori reali positivi $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_q$, e quindi

50.7
$$\lambda_1\,\langle \sigma, \sigma\rangle \le \langle \sigma, \mu\sigma\rangle \le \lambda_q\,\langle \sigma, \sigma\rangle\,, \qquad \forall \sigma \in \mathbb{R}^q \tag{50.7}$$

e, se si tiene conto che $\mu = \mu(\beta)$, così che anche $\lambda_j = \lambda_j(\beta)$ per $j = 1, \ldots, q$ (con la stessa regolarità in β della matrice μ), segue la (50.6), con $C(\beta) = \max\{\lambda_q(\beta), \lambda_1(\beta)\}$ $= \lambda_q(\beta)$. ■

p.50.8 **50.8.** DEFINIZIONE (SISTEMA DI COORDINATE BENE ADATTATO E ORTOGONALE). *Dato un intorno U di $x_0 \in \Sigma$ e un sistema di coordinate (locali) regolari (U, Ξ) adattato a Σ, diremo che il sistema di coordinate è* bene adattato *se si ha*

50.8
$$g_{ij}(0, \beta^{(M)}) = \gamma_{ij}\,, \qquad i, j = 1, \ldots, M, \tag{50.8}$$

dove $(0, \beta^{(M)}) = (0, \ldots, 0, \beta_{M+1}, \ldots, \beta_{3N})$ e γ è una matrice $M \times M$ indipendente da $\beta^{(M)}$, e diremo che il sistema di coordinate è ortogonale *se si ha*

50.9
$$g_{ij}(0, \beta^{(M)}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, M, \qquad j = M+1, \ldots, 3N, \tag{50.9}$$

dove $(0, \beta^{(M)}) = (0, \ldots, 0, \beta_{M+1}, \ldots, \beta_{3N})$.

p.50.9 **50.9.** *Osservazione.* Come conseguenza della definizione 50.8 e del fatto che la matrice g è simmetrica (cfr. la proprietà (1) del emma 50.6), se il sistema di coordinate $\beta = (0, \ldots, 0, \beta_{M+1}, \ldots, \beta_{3N})$ è ben adattato e ortogonale, si ha dunque

50.10
$$g(0, \beta^{(M)}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & g^{(M)}(0, \beta^{(M)}) \end{pmatrix}, \tag{50.10}$$

dove γ è una matrice $M \times M$ indipendente da $\beta^{(M)}$, delle due matrici indicate con 0 quella a destra di γ è una matrice $M \times (3N-M)$ e l'altra è una matrice $(3N-M) \times M$, e $g^{(M)}(0, \beta^{(M)})$ è una matrice $(3N-M) \times (3N-M)$.

p.50.10 **50.10.** LEMMA. *Consideriamo un sistema di N punti materiali in $\mathbb{R}^3$ soggetti a una forza di energia potenziale V, con V di classe C^2. Espresse nel sistema di coordinate locali (U, x) con base Ω, le equazioni di Eulero-Lagrange sono, per $i = 1, \dots, 3N$,*

50.11
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(g(\beta)\dot\beta\Big)_i = -\frac{\partial V(\Xi(\beta))}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2}\left\langle \dot\beta, \frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta_i}\dot\beta \right\rangle, \tag{50.11}$$

per tempi $t \in [t_1, t_2]$ tali che il moto si svolge in U, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^{3N}$.

p.50.11 **50.11.** *Dimostrazione del lemma 50.10.* Segue dal principio variazionale di Hamilton e dalla definizione della trasformazione $\beta \to \Xi(\beta)$. ■

p.50.12 **50.12.** COROLLARIO. *Consideriamo un sistema di N punti materiali in $\mathbb{R}^3$, soggetti a una forza di energia potenziale V, con V di classe C^2, e vincolati su una superficie Σ di codimensione M. Espresse nel sistema di coordinate locali (U, x) con base Ω, adattato a Σ, le equazioni di Eulero-Lagrange sono, per $j = M+1, \dots, 3N$, se $(0, \beta^{(M)}) = (0, \dots, 0, \beta_{M+1}, \dots, \beta_{3N})$,*

50.12
$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{j=M+1}^{3N} g^{(M)}_{ij}(0, \beta^{(M)})\dot\beta_j\Big) \\ &\qquad = -\frac{\partial V(\Xi(0, \beta^{(M)}))}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=M+1}^{3N} \dot\beta_j \frac{\partial g^{(M)}_{jj'}(\beta)}{\partial \beta_i}\dot\beta_j, \end{aligned} \tag{50.12}$$

per tempi $t \in [t_1, t_2]$ tali che il moto si svolge in U.

p.50.13 **50.13.** *Dimostrazione del corollario 50.12.* Segue dal lemma 50.10, tenendo conto che il moto si svolge sulla superficie di vincolo Σ, i cui punti, nell'intorno $U \cap \Sigma$, sono descritti in termini di β dalla condizione (35.9). ■

p.50.14 **50.14.** DEFINIZIONE (VINCOLO APPROSSIMATO PERFETTO). *Sia (Σ, W, λ) un modello di vincolo approssimato per un sistema di N punti materiali. Sia V una funzione di classe C^2 limitata inferiormente e sia $t \to x_\lambda(t)$ la soluzione delle equazioni del moto corrispondente all'energia potenziale*

50.13
$$V + \lambda W, \tag{50.13}$$

con dato iniziale $(\bar x, \bar y)$, dove $\bar x \in \Sigma$. Diremo che (Σ, W, λ) è un modello di vincolo approssimato perfetto *se*
(1) esiste il limite

50.14
$$\lim_{\lambda \to \infty} x_\lambda(t) = x(t), \qquad \forall t \geq 0, \tag{50.14}$$

e $x(t) \in \Sigma$, $\forall t \geq 0$;
(2) il moto $t \to x(t)$ è il moto che si svolge su Σ soggetto alla forza di energia potenziale V e al vincolo di rimanere su Σ;
(3) il dato iniziale per $x(t)$ è dato da $(\bar{x}, \bar{y}_\Sigma)$, dove $\bar{y}_\Sigma$ è la proiezione di $\bar{y}$ sul piano tangente a Σ in $\bar{x}$.

p.50.15 **50.15.** *Osservazione.* In termini delle coordinate β le condizioni (1)÷(3) della definizione 50.14 equivalgono alle seguenti:
(1) esiste il limite

50.15
$$\lim_{\lambda\to\infty} \beta_\lambda(t) = (0, \beta^{(M)})(t), \qquad \beta^{(M)} = (\beta_{M+1}, \dots, \beta_{3N}), \tag{50.15}$$

$\forall t \in [t_1, t_2]$;

(2) il moto $t \to \beta^{(M)}(t)$ risolve le equazioni di Eulero-Lagrange (50.12);
(3) il dato iniziale è tale che $\dot{\beta}_i = 0$ per $i = 1, \dots, M$.

p.50.16 **50.16.** LEMMA. *Data una superficie regolare Σ e un punto $x_0 \in \Sigma$, è sempre possibile trovare un intorno U di x_0 in cui si può definire un sistema locale di coordinate che sia bene adattato e ortogonale. Inoltre si può costruire tale sistema di coordinate in modo che, in $U \cap \Sigma$ risulti*

50.16
$$\gamma_{ij} = \Gamma\delta_{ij}, \qquad \Gamma > 0\,, \tag{50.16}$$

per $i, j = 1, \dots, M$, se M è la codimensione di Σ e γ_{ij} è definita in (50.10).

p.50.17 **50.17.** *Dimostrazione del lemma 50.16.* Sia $x_0 \in \Sigma$, U un intorno di x_0 e (U, Ξ) un sistema di coordinate regolari adattato a Σ.

Per ogni punto $x' \in \Sigma \cap U$ si consideri un piano $\pi(x')$ in $\mathbb{R}^{3N}$ ortogonale a Σ in x', nel senso che

50.17
$$\langle m\eta_1, \eta_2\rangle = 0, \qquad \forall \eta_1 \in T_{x'}\Sigma\,,\ \forall \eta_2 \in \pi(x'), \tag{50.17}$$

se m è la matrice di massa introdotta nel paragrafo §35.12; anche nel seguito intenderemo l'ortogonalità rispetto al prodotto scalare definito in (50.17). Il piano $\pi(x')$ avarà dimensione M: si fissi su $\pi(x')$ un sistema di assi cartesiani ortonormali $\mathbf{e}_1(x'), \dots, \mathbf{e}_M(x')$.

Esisterà allora un intorno $U' \subset U$ di x_0 tale che per ogni punto $x \in U'$ esiste un unico piano $\pi(x')$, con $x' \in \Sigma$, che lo contiene. Il punto x sarà allora individuato dalle $3N$ coordinate $\hat{\beta}$, di cui le prime M sono le sue coordinate nel sistema cartesiano scelto sul piano $\pi(x')$ e le restanti $3N - M$ sono le coordinate di x' in (U, Ξ), *i.e.* $(\beta_{M+1}, \dots, \beta_{3N})$. Possiamo allora porre, per $x \in U'$, $x = \hat{\Xi}(\hat{\beta})$, con $\hat{\beta} \in \Omega' \subset \Omega$, dove $\hat{\Xi}$ è una funzione di classe C^2 invertibile.

Sia S^{3N} una sfera in $\mathbb{R}^{3N}$ contenuta in Ω': definiamo $\hat{U} = \hat{\Xi}(S^{3N})$. Abbiamo quindi che, per costruzione, $(\hat{U}, \hat{\Xi})$ è un sistema di coordinate regolari su Σ, di base S^{3N}, tale che le relazioni (50.8) e (50.9) sono soddisfatte. Inoltre risulta $\gamma_{ij} = \Gamma\delta_{ij}$ con $\Gamma = 1$. Quindi l'asserto è dimostrato. ■

sec.51

51. Un criterio di perfezione per vincoli approssimati

p.51.1 **51.1. Introduzione.** Nel presente paragrafo si considera il problema sollevato in §50.1 sulla ragionevolezza dell'uso del principio di d'Alembert per la descrizione di vincoli reali, *i.e.* il problema se i vincoli reali possano essere effettivamente descritti approssimativamente come vincoli perfetti (come definiti matematicamente in §48.3).

p.51.2 **51.2.** TEOREMA (ARNOL'D-GALLAVOTTI). *Consideriamo un sistema di N punti materiali soggetti a una forza conservativa di energia potenziale V, e sia (Σ, W, λ) un modello di vincolo olonomo bilatero approssimato. Sia inoltre (U, Ξ) un sistema di coordinate bene adattato e ortogonale per Σ, di base Ω. Se*

51.1
$$W(\Xi(\beta)) = \overline{W}(\beta_1, \dots, \beta_M), \qquad \beta \in \Omega, \tag{51.1}$$

con $\overline{W} \in C^2(\mathbb{R}^M, \mathbb{R})$, nulla all'origine e strettamente positiva in un intorno di essa, allora (Σ, W, λ) è un vincolo approssimato perfetto.

p.51.3 **51.3.** *Dimostrazione del teorema 51.2.* Dobbiamo dimostrare che se (Σ, W, λ) è un modello di vincolo approssimato, secondo la definizione 50.2, e la (51.1) è soddisfatta, allora (Σ, W, λ) è un vincolo approssimato perfetto, secondo la definizione 50.14: dobbiamo cioè dimostrare che, sotto l'ipotesi (51.1), le condizioni (1)÷(3) di §50.15 sono soddisfatte.

Assumeremo, per semplificare i conti, che la funzione $\overline{W}$ abbia una forma molto particolare, *i.e.*

51.2
$$\overline{W}(\beta_1, \dots, \beta_M) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} \beta_j^2, \tag{51.2}$$

(cfr. l'osservazione 51.4 più avanti).

Sia $t \to x_\lambda(t)$ un moto con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$, dove $\bar{x} \in \Sigma$, che si sviluppa sotto l'azione della forza di energia potenziale

51.3
$$V(x) + \lambda W(x); \tag{51.3}$$

la conservazione dell'energia dà

51.4
$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\dot{x}_\lambda^{(n)} \right)^2 + V(x_\lambda(t)) + \lambda W(x_\lambda(t)) = E, \tag{51.4}$$

che è indipendente da λ poiché, per $t = 0$, $\bar{x} \in \Sigma$ e W è nulla su Σ. Quindi

51.5
$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\dot{x}_\lambda^{(n)} \right)^2 \le E - \inf_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \{V(x)\} = C_0 < \infty, \tag{51.5}$$

per le ipotesi di positività di W. Dalla (51.5) segue che la velocità $\dot{x}_\lambda(t)$ si mantiene limitata e quindi, comunque fissato un intorno $B_\rho(\bar{x})$ di centro $\bar{x}$ e raggio ρ, esiste un tempo

51.6
$$T \le \rho \sqrt{\frac{\min_n m_n}{2C_0}} \tag{51.6}$$

tale che per $t \in [0,T]$ il moto $t \to x_\lambda(t)$ rimane confinato in $B_\rho(\bar{x})$.

Sia $t \to \beta_\lambda(t)$ l'immagine del moto $t \to x_\lambda(t)$ nella base Ω, per $t \in [0,T]$. La conservazione dell'energia (51.4), nelle coordinate β, diventa

51.7
$$\frac{1}{2}\left\langle \dot{\beta}_\lambda(t), g(\beta_\lambda(t))\dot{\beta}_\lambda(t)\right\rangle + V(\Xi(\beta_\lambda(t))) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\beta_{\lambda j}^2(t) = E, \tag{51.7}$$

e quindi, utilizzando il fatto che l'energia cinetica e la funzione W sono sempre positive, si ottiene

51.8
$$\begin{aligned} &|\beta_{\lambda j}(t)| \le \sqrt{2C_0\lambda^{-1}}, \qquad j = 1,\dots,M, \\ &\left|\dot{\beta}_{\lambda j}(t)\right| \le \sqrt{2C_0 g}, \qquad j = 1,\dots,3N, \end{aligned} \tag{51.8}$$

dove C_0 è definta in (51.5) e $g = \max_{\beta\in\Omega} C(\beta)$, se $C(\beta)$ è la funzione introdotta nel lemma 50.6.

Il sistema di coordinate (U,Ξ) è per ipotesi bene adattato e ortogonale. Utilizzando il fatto, inoltre, che le funzioni $g(\beta)$ sono di classe C^1, possiamo allora scrivere

51.9
$$g_{ij}(\beta) = \sum_{h=1}^{M} g_{ijh}(\beta)\beta_h \qquad i = 1,\dots,M, \qquad j = M+1,\dots,3N, \tag{51.9}$$

poiché per $\beta = (0,\beta^{(M)})$ tali elementi di matrice sono nulli (cfr. la (50.9)), e

51.10
$$g_{ij}(\beta) = \gamma_{ij} + \sum_{h=1}^{M} g_{ijh}(\beta)\beta_h \qquad i = 1,\dots,M, \qquad j = 1,\dots,M, \tag{51.10}$$

per la (50.8).

Le equazioni del moto (50.11) diventano allora

51.11
$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left[\sum_{j,h=1}^{M} g_{ijh}(\beta_\lambda)\dot{\beta}_{\lambda j}\beta_{\lambda h}\right] + \sum_{j=M+1}^{3N} g_{ij}(\beta_\lambda)\dot{\beta}_{\lambda j}\right\} \\ &\quad = -\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial V(\Xi(\beta_\lambda))}{\partial \mathbf{x}^{(n)}}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}^{(n)}(\beta_\lambda)}{\partial\beta_i} + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=M+1}^{3N}\dot{\beta}_{\lambda j}\frac{\partial g_{jj'}(\beta_\lambda)}{\partial\beta_i}\dot{\beta}_{\lambda j'} \\ &\quad + \left[\sum_{j,h=1}^{M}\sum_{j'=M+1}^{3N}\dot{\beta}_{\lambda j}\frac{\partial g_{jj'h}(\beta_\lambda)}{\partial\beta_i}\dot{\beta}_{\lambda j'}\beta_{\lambda h}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2}\sum_{j,j',h=1}^{M}\dot{\beta}_{\lambda j}\frac{\partial g_{jj'h}(\beta_\lambda)}{\partial\beta_i}\dot{\beta}_{\lambda j'}\beta_{\lambda h}\right], \end{aligned} \tag{51.11}$$

e, integrando rispetto a t, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=M+1}^{3N}\Big(g_{ij}(\beta_\lambda(t)\dot\beta_{\lambda j}(t)-g_{ij}(\beta_\lambda(0)\dot\beta_{\lambda j}(0)\Big)+\left[\sum_{j,h=1}^{M}g_{ijh}(\beta_\lambda(t))\dot\beta_{\lambda j}(t)\beta_{\lambda h}(t)\right]\\
&\quad=\int_0^t \mathrm{d}t'\left\{-\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial V(\Xi(\beta_\lambda(t')))}{\partial \mathbf{x}^{(n)}}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}^{(n)}(\beta_\lambda(t'))}{\partial\beta_i}\right.\\
&\qquad+\frac12\sum_{j,j'=M+1}^{3N}\dot\beta_{\lambda j}(t')\frac{\partial g_{jj'}(\beta_\lambda(t'))}{\partial\beta_i}\dot\beta_{\lambda j'}(t')\qquad(51.12)\\
&\qquad+\left[\sum_{j,h=1}^{M}\sum_{j'=M+1}^{3N}\dot\beta_{\lambda j}(t')\frac{\partial g_{jj'h}(\beta_\lambda(t'))}{\partial\beta_i}\dot\beta_{\lambda j'}(t')\beta_{\lambda h}(t')\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac12\sum_{j,j',h=1}^{M}\dot\beta_{\lambda j}(t')\frac{\partial g_{jj'h}(\beta_\lambda(t'))}{\partial\beta_i}\dot\beta_{\lambda j'}(t')\beta_{\lambda h}(t')\right]\right\},
\end{aligned}$$

poiché $\beta_{\lambda j}(0)=0$ per $j=1,\dots,M$.

Possiamo riscrivere la (51.12), per $s=M+1,\dots,3N$,

$$\begin{aligned}
\dot\beta_{\lambda s}(t)&=\sum_{i=M+1}^{3N}\Big(g^{(M)}(\beta_\lambda(t))\Big)^{-1}_{si}\left\{\sum_{j=M+1}^{3N}g_{ij}(\beta_\lambda(0)\dot\beta_{\lambda j}(0)\right.\\
&\qquad+\left[\sum_{j,h=1}^{M}g_{ijh}(\beta_\lambda(t))\dot\beta_{\lambda j}(t)\beta_{\lambda h}(t)\right]\\
&\quad=\int_0^t \mathrm{d}t'\left\{-\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial V(\Xi(\beta_\lambda(t')))}{\partial \mathbf{x}^{(n)}}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}^{(n)}(\beta_\lambda(t'))}{\partial\beta_i}\right.\\
&\qquad+\frac12\sum_{j,j'=M+1}^{3N}\dot\beta_{\lambda j}(t')\frac{\partial g_{jj'}(\beta_\lambda(t'))}{\partial\beta_i}\dot\beta_{\lambda j'}(t')\\
&\qquad+\left[\sum_{j,h=1}^{M}\sum_{j'=M+1}^{3N}\dot\beta_{\lambda j}(t')\frac{\partial g_{jj'h}(\beta_\lambda(t'))}{\partial\beta_i}\dot\beta_{\lambda j'}(t')\beta_{\lambda h}(t')\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac12\sum_{j,j',h=1}^{M}\dot\beta_{\lambda j}(t')\frac{\partial g_{jj'h}(\beta_\lambda(t'))}{\partial\beta_i}\dot\beta_{\lambda j'}(t')\beta_{\lambda h}(t')\right]\right\},
\end{aligned}\tag{51.13}$$

51.13

e, dalle (51.8), concludiamo che i termini in parentesi quadre tendono uniformemente a zero per $\lambda\to0$.

Se definiamo $\delta_{\lambda s}(t)$ i termini in (51.13) che non sono tra parentesi quadre, abbiamo che, considerate come funzioni di λ, le $\delta_{\lambda s}(t)$ sono equilimitate ed equicontinue (sempre

per le diseguaglianze (51.8), e per il fatto che gli integrali di funzioni equilimitate sono equicontinui e la composizione di funzioni equilimitate ed equicontinue dà funzioni ancora equilimitate ed equicontinue)

Allora per il teorema di Ascoli-Arzelà, è possibile estrarre da ogni successione divergente di numeri positivi λ una sottosuccessione λ_n tale che esiste il limite

51.14
$$\lim_{n\to\infty} \delta_{\lambda_n j}(t) \equiv \delta_j(t), \qquad j = M+1, \dots, 3N, \tag{51.14}$$

uniformemente per $t \in [0, T]$.

Quindi

51.15
$$\lim_{\lambda_n\to\infty} \dot\beta_{\lambda j}(t) = \delta_j(t), \tag{51.15}$$

da cui segue, per integrazione, che

51.16
$$\beta_j(t) \equiv \lim_{\lambda_n\to\infty} \beta_{\lambda j}(t) = \beta_j(0) + \int_0^t \mathrm{d}t' \delta_j(t'), \qquad j = M+1, \dots, 3N, \tag{51.16}$$

poiché il dato iniziale non dipende da λ.

Scrivendo esplicitamente $\delta(t)$, partendo dalla (51.13) e facendo il limite $\lambda_n \to \infty$, si ha allora che per $\beta(t) = (0, \beta^{(M)}(t))$

51.17
$$\begin{aligned} g(\beta(t))\dot\beta(t) &= g(\beta(0))\dot\beta(0) \\ &+ \int_0^t \mathrm{d}t' \left\{ -\left\langle \frac{\partial V(\Xi(\beta(t')))}{dx}, \frac{\partial \Xi(\beta(t'))}{\partial \beta} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \dot\beta(t'), \frac{\partial g(\beta(t'))}{\partial \beta}\dot\beta(t') \right\rangle \right\}, \end{aligned} \tag{51.17}$$

dove i prodotti scalari sono in $\mathbb{R}^{3N-M}$.

Tuttavia la (51.17) vale, a questo livello, solo se il limite $\lambda \to \infty$ è fatto sulla sottosuccessione λ_n. Tuttavia se mostriamo che il limite è lo stesso comunque venga scelta la sottosuccessione, allora segue che esiste il limite per $\lambda \to \infty$ di $\beta_\lambda(t)$, ed è dato quindi dalla soluzione di (51.17).

A questo fine è sufficiente mostrare che la soluzione di (51.17) è unica e in C^2, poiché ogni limite di $\beta_{\lambda_n}(t)$, indipendentemente da come viene scelta la sottosuccessione λ_n, deve soddisfare le equazioni (51.17).

Se definiamo

51.18
$$p = g(\beta)\dot\beta, \qquad p \in \mathbb{R}^{3N-M}, \tag{51.18}$$

possiamo riscrivere la (51.17) nella forma

51.19
$$\begin{aligned} \dot\beta &= g^{-1}(\beta)p, \\ \dot p &= -\left\langle \frac{\partial V(\Xi(\beta(t')))}{dx}, \frac{\partial \Xi(\beta(t'))}{\partial \beta} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \dot\beta(t'), \frac{\partial g(\beta(t'))}{\partial \beta}\dot\beta(t') \right\rangle, \end{aligned} \tag{51.19}$$

e notare che, per $t \in [0, T]$, le funzioni $\beta(t)$ che si ottengono con la costruzione usata sono nella regione di Ω immagine secondo Ξ^{-1} di $B_\rho(\bar x)$ (scegliendo T sufficientemente

piccolo), cioè nella regione in cui il membro di destra di (51.19) è definito: quindi il sistema (51.19) è un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, e scelto un dato iniziale $(\beta(0), p(0))$, allora possiamo applicare il teorema di esistenza e unicità.

In conclusione, per $\lambda \to \infty$, la soluzione $\beta_\lambda(t)$ delle equazioni (51.11) tende alla soluzione delle equazioni (51.17), che non sono altro che le equazioni (50.12) che descrivono il moto in presenza di un vincolo perfetto. Quindi segue l'asserto. ■

p.51.4 **51.4.** *Osservazione.* L'assunzione (51.2) sulla forma del potenziale $\overline{W}$ può essere limitata facilmente, comportando solo complicazioni formali ma non inficiando in alcun modo il risultato.

p.51.5 **51.5.** ESEMPIO. Consideriamo un punto materiale di massa m in $\mathbb{R}^2$, (cfr. l'osservazione 35.20), soggetto a una forza elastica corrispondente all'energia potenziale

51.20
$$V(x,y) = \frac{1}{2} k\omega^2 \left(x^2 + y^2\right), \tag{51.20}$$

e a una forza che tende a portarlo verso l'asse $y = 0$, corrispondente all'energia potenziale

51.21
$$\lambda W(x,y) = \frac{1}{2} m\lambda y^2 \,. \tag{51.21}$$

Possiamo allora applicare il teorema 51.2 e concludere che per $\lambda \to \infty$ il sistema tende a un sistema vincolato a rimanere sull'asse y. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

51.22
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega^2 x, \\ m\ddot{y} &= -m\omega^2 y - m\lambda y, \end{aligned} \tag{51.22}$$

e possono essere facilemente integrate. Si vede allora, in accordo con il teorema 51.2, che per $\lambda < \infty$, il punto materiale si muove anche nella direzione y, con ampiezza sempre più piccola e frequenza sempre più grande: questo fisicamente si può interpretare, per λ grande, come una tendenza da parte del punto di deformare il vincolo. Nel limite $\lambda \to \infty$, la componente del moto nella direzione y diviene nulla, e il sistema si muove solo in direzione x, con legge del moto corrispondente a un sistema unidimensionale soggetto a una forza di energia potenziale

51.23
$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \tag{51.23}$$

Se al contrario avessimo scelto un potenziale W della forma

51.24
$$\lambda W(x,y) = \frac{1}{2} m\lambda y^2 \left(1 + x^2\right), \tag{51.24}$$

le condizioni del teorema 51.2 non sarebbero state soddisfatte. In effetti si può dimostrare che la soluzione $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ che si trova per $\lambda < \infty$, quando $\lambda \to \infty$, non

tende più alla soluzione $(x(t), 0)$ delle equazioni del moto per un sistema unidimensionale soggetto alla forza di energia potenziale (51.23).

sec.52

52. Applicazione ai sistemi rigidi

p.52.1 **52.1. Introduzione.** Utilizzando il teorema 51.2 mostriamo che un modello naturale (*i.e.* fisicamente ragionevole) del vincolo di rigidità è un vincolo approssimato perfetto.

p.52.2 **52.2. teorema.** *Dato un sistema di N punti materiali $P_1, \dots, P_N$ soggetti al vincolo*

52.1
$$|\mathbf{x}^{(n)}(t) - \mathbf{x}^{(n')}(t)| = L_{nn'}, \tag{52.1}$$

dove L è una matrice $N \times N$ di elementi costanti, se Σ è la superficie di codimensione 6 individuata dal vincolo (52.1) e $W\colon \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ è la funzione data da

52.2
$$W(x) = \sum_{n>n'=1}^{N} \psi_{nn'} \left(|\mathbf{x}^{(n)}(t) - \mathbf{x}^{(n')}(t)|^2 - L^2_{nn'} \right), \tag{52.2}$$

con $\psi_{nn'} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tale che ogni $\psi_{nn'}$ ha in 0 un minimo stretto, sia (Σ, W, λ) un modello di vincolo approssimato per il sistema cosiderato. Allora (Σ, W, λ) è un modello di vincolo approssimato perfetto.

p.52.3 **52.3.** *Dimostrazione del teorema 52.2.* Per dimostrare il teorema sarà sufficiente mostrare che è possibile introdurre un sistema (U, Ξ) di coordinate regolari bene adattato e ortogonale per Σ, tale che la condizione (51.1) sia soddisfatta, con $M = 3N - 6$.

Supponiamo anche che sia $N \geq 3$, e che i punti non siano tutti collineari: tali casi possono essere trattati analogamente e sono più semplici.

Ogni configurazione del sistema può essere individuata come segue. Innanzitutto si assegnano le coordinate $\mathbf{x}_0$ del centro d'inerzia,

52.3
$$\mathbf{x}_0 = \sum_{n=1}^{N} m_n \mathbf{x}^{(n)}, \tag{52.3}$$

in un sistema di coordinate prefissato. Quindi, per ogni punto P_n, scriviamo la sua posizione nella forma $\boldsymbol{\xi}^{(n)} + \boldsymbol{\kappa}^{(n)}$, dove $\xi \in \Sigma$ e κ denota la deviazione dei punti dal vincolo.

Introduciamo anche un sistema di coordinate $(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ solidale con Σ, tale che $\mathbf{e}_3$ sia parallelo al segmento che unisce il punto P_1 al punto P_2, ed $\mathbf{e}_1$ sia perpendicolare al piano contenente i tre punti P_1, P_2 e P_3. Rispetto al sistema fisso, il sistema

$(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è individuato dalla posizione del suo centro $\mathbf{x}_0$, che supponiamo coincidere con il centro d'inerzia del sistema (perciò è stato indicato con lo stesso simbolo) e dagli angoli di Eulero (φ, θ, ψ).

Dato il vincolo (52.1) abbiamo quindi, come coordinate per descrivere il sistema, le $3N + 6$ quantità $\mathbf{x}_0$, (φ, θ, ψ) e $\{\boldsymbol{\kappa}^{(n)}\}_{n=1}^N$. Esse sono ovviamente sovrabbondanti: imponendo le restrizioni

52.4
$$\sum_{n=1}^{N} m_n \boldsymbol{\kappa}^{(n)} = \mathbf{0}, \tag{52.4}$$

52.5
$$\sum_{n=1}^{N} m_n [\boldsymbol{\xi}^{(n)}, \boldsymbol{\kappa}^{(n)}] = \mathbf{0}, \tag{52.5}$$

possiamo eliminarne 6, *e.g.* le componenti

52.6
$$(\kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}, \kappa_1^{(2)}, \kappa_2^{(2)}, \kappa_3^{(2)}, \kappa_1^{(3)}), \tag{52.6}$$

e quindi utilizzare le (52.4) e (52.5) per ottenere le componenti (52.6) dalle altre, una volta che queste ultime siano note (cfr. la parte finale della dimostrazione).

Definiremo allora le $3N$ coordinate β come $\beta = (\beta_V, \boldsymbol{\beta}_{\rm rot}, \boldsymbol{\beta}_0)$, dove $\boldsymbol{\beta}_0 \equiv \mathbf{x}_0$, $\boldsymbol{\beta}_{\rm rot} = (\varphi, \theta, \psi)$ e β_V sono le $3N - 6$ coordinate κ che non compaiono in (52.6), ordinate secondo il loro ordine naturale.

Se poniamo $x = \Xi(\beta)$, la trasformazione $\beta \to \Xi(\beta)$ è regolare e invertibile, come è facile verificare.

Vogliamo ora dimostrare che il sistema di coordinate (U, Ξ) è bene adattato e ortogonale (ovviamente esso è adattato a Σ poiché Σ si ottiene ponendo $\beta_V = 0$). Per questo dobbiamo calcolare la matrice cinetica, e quindi scrivere l'energia cinetica in termini delle coordinate β.

Per ogni punto P_n, tenendo conto che $\mathrm{d}\mathbf{e}_k/\mathrm{d}t = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_k]$, se $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore velocità angolare, si ha

52.7
$$\dot{\mathbf{x}}^{(n)} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{K}}^{(n)} + \left[\boldsymbol{\omega}, \left(\boldsymbol{\kappa}^{(n)} + \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right)\right], \tag{52.7}$$

dove $\mathbf{K}^{(n)}$ è definito in modo tale che

52.8
$$\dot{\mathbf{K}}^{(n)} = \sum_{k=1}^{3} \dot{\kappa}_k^{(n)} \mathbf{e}_k, \tag{52.8}$$

e quindi rappresenta la velocità del punto n nel sistema di riferimento solidale a Σ (ed è quindi differente da $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{(n)}$, che è la componente della velocità del punto n nel sistema fisso dovuta alla deviazione della sua posizione rispetto a $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$).

Si ottiene quindi, dalla (50.3),

$$
\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\mathbf{x}}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \left[\boldsymbol{\omega}, \left(\boldsymbol{\kappa}^{(n)} + \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right)\right]^2 \\
& + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \left(\dot{\mathbf{K}}^{(n)}\right)^2 + \sum_{n=1}^{N} m_n \left\langle \dot{\mathbf{x}}_0, \left[\boldsymbol{\omega}, \left(\boldsymbol{\kappa}^{(n)} + \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right)\right]\right\rangle \\
& + \sum_{n=1}^{N} m_n \left\langle \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{K}}^{(n)}\right\rangle + \sum_{n=1}^{N} m_n \left\langle \left[\boldsymbol{\omega}, \left(\boldsymbol{\kappa}^{(n)} + \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right)\right], \dot{\mathbf{K}}^{(n)}\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{52.9}
$$

dove la quarta e la quinta somma sono identicamente nulle, per definizione di centro d'inerzia e per la (52.4).

Se si definisce il *momento angolare interno*

$$
\mathbf{L}_0 = \sum_{n=1}^{N} m_n \left[\left(\boldsymbol{\kappa}^{(n)} + \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right), \dot{\mathbf{K}}^{(n)}\right], \tag{52.10}
$$

si pone

$$
\mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=1}^{N} m_n \left[\left(\boldsymbol{\kappa}^{(n)} + \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right), \left[\boldsymbol{\omega}, \left(\boldsymbol{\kappa}^{(n)} + \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right)\right]\right], \tag{52.11}
$$

e si considera che risulta

$$
\sum_{n=1}^{N} m_n \left[\boldsymbol{\xi}^{(n)}, \dot{\mathbf{K}}^{(n)}\right] \equiv \mathbf{0}, \tag{52.12}
$$

e che vale la relazione

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} m_n \left\langle \left[\boldsymbol{\omega}, \left(\boldsymbol{\kappa}^{(n)} + \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right)\right], \dot{\mathbf{K}}^{(n)}\right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{\omega}, \sum_{n=1}^{N} m_n \left[\left(\boldsymbol{\kappa}^{(n)} + \boldsymbol{\xi}^{(n)}\right), \dot{\mathbf{K}}^{(n)}\right]\right\rangle \\
&\equiv \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{L}_0 \rangle,
\end{aligned}
\tag{52.13}
$$

possiamo riscrivere la (52.9)

$$
\begin{aligned}
T &= T_0 + T_{\text{int}} + T_{\text{rot}} + T_C, \\
T_0 &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\mathbf{x}}_0^2, \qquad T_{\text{int}} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\dot{\mathbf{K}}^{(n)}\right)^2, \\
T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}(\boldsymbol{\omega})\rangle, \qquad T_C = \langle \mathbf{L}_0, \boldsymbol{\omega}\rangle,
\end{aligned}
\tag{52.14}
$$

dove T_0 rappresenta l'energia cinetica del centro d'inerzia, T_{int} rappresenta l'energia cinetica interna, T_{rot} rappresenta l'energia cinetica rotazionale e T_C rappresenta l'energia cinetica di Coriolis.

Per $x \in \Sigma$, dove $\beta_V = 0$, si ha
(1) $T_C = 0$;
(2) T_{int} è una forma quadratica in $\dot\beta_V$ con coefficienti che, dipendendo dalla struttura di Σ solo attraverso le quantità $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ (che sono costanti date), sono indipenenti da x, e quindi da β_V;
(3) T_0 è una forma quadratica in $\dot{\mathbf{x}}_0 \equiv \dot{\boldsymbol{\beta}}_0$ con coefficienti costanti;
(4) T_{rot} è una forma quadratica in $\boldsymbol{\omega}$ con coefficienti che dipendono solo dalle quantità $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$, e, in termini degli angoli di Eulero, nel sistema di coordinate $(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ si ha

52.15
$$\boldsymbol{\omega} = \left(\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi, -\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi, \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\right), \tag{52.15}$$

così che segue che T_{rot} è una forma quadratica in $(\dot\varphi, \dot\theta, \dot\psi)$ con coefficienti che dipendono solo da (φ, θ, ψ).

Possiamo dunque concludere che il sistema di coordinate (U, Ξ) è bene adattato e ortogonale.

Resta da verificare che la funzione (52.2) verifica la condizione (51.1) del teorema 51.2. Questo è ovvio: infatti W dipende solo dalle deviazioni $\boldsymbol{\kappa}^{(n)}$, e i vettori (52.6) possono essere espressi in termini dei vettori β_V e risultano essere indipendenti da $\boldsymbol{\beta}_{\text{rot}}$ e $\boldsymbol{\beta}_0$.

Infatti supponiamo che le coordinate $(\beta_V, \boldsymbol{\beta}_{\text{rot}}, \boldsymbol{\beta}_0)$ siano note. Dalla (52.4) otteniamo

52.16
$$\boldsymbol{\kappa}^{(2)} = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{\kappa}^{(1)} - \sum_{n=3}^{N}\frac{m_n}{m_2}\boldsymbol{\kappa}^{(n)}, \tag{52.16}$$

che, introdotta nella (52.5), dà

52.17
$$m_1\left[\left(\boldsymbol{\xi}^{(1)} - \boldsymbol{\xi}^{(2)}\right), \boldsymbol{\kappa}^{(1)}\right] + \sum_{n=3}^{N} m_n\left[\left(\boldsymbol{\xi}^{(n)} - \boldsymbol{\xi}^{(2)}\right), \boldsymbol{\kappa}^{(n)}\right] = 0. \tag{52.17}$$

Il prodotto scalare della (52.17) con il vettore $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \boldsymbol{\xi}^{(1)}$ implica

52.18
$$\sum_{n=3}^{N} m_n\left\langle\left[\left(\boldsymbol{\xi}^{(n)} - \boldsymbol{\xi}^{(2)}\right), \boldsymbol{\kappa}^{(1)}\right], \left(\boldsymbol{\xi}^{(2)} - \boldsymbol{\xi}^{(1)}\right)\right\rangle = 0, \tag{52.18}$$

che permette di determinare $\kappa_1^{(3)}$; infatti

52.19
$$\left\langle\left[\left(\boldsymbol{\xi}^{(3)} - \boldsymbol{\xi}^{(2)}\right), \mathbf{e}_1\right], \left(\boldsymbol{\xi}^{(2)} - \boldsymbol{\xi}^{(1)}\right)\right\rangle \neq 0, \tag{52.19}$$

data la scelta degli assi cartesiani $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ a partire dai punti P_1, P_2, P_3. Determinato $\boldsymbol{\kappa}^{(3)}$, la (52.17) permette di trovare le prime due componenti di $\boldsymbol{\kappa}^{(1)}$ (la (52.17) lascia indeterminata $\kappa_3^{(1)}$, che però è già nota se le β_V sono note). Si può quindi

utilizzare la (52.16) per determinare $\boldsymbol{\kappa}^{(2)}$. In conclusione tutte le $\boldsymbol{\kappa}^{(n)}$ si ottengono in termini delle coordinate β_V, che è quello che volevamo.

Quindi il teorema 51.2 è dimostrato. ■

p.52.4 **52.4.** *Osservazione.* Oltre che il vincolo (52.1), potremmo considerare un vincolo più generale, in cui oltre alle condizioni (52.1) fossero soddisfatte anche le condizioni

52.20
$$\mathbf{x}^{(n')} \in \sigma_{n'}, \tag{52.20}$$

per qualche indice $n' \in T \subset \{1, \dots, N\}$, dove $\sigma_{n'}$ sono delle superfici regolari in $\mathbb{R}^3$. In particolare si può supporre che il sistema rigido abbia un punto fisso.

Si può allora dimostare un risultato analogo al teorema 52.2, sostituendo la (52.2) con

52.21
$$\begin{aligned} W(x) = \sum_{n,n'=1}^{N} \psi_{nn'} \left(|\mathbf{x}^{(n)}(t) - \mathbf{x}^{(n')}(t)|^2 - L_{nn'}^2 \right) \\ + \sum_{n' \in T} \psi_{n'} \left(|\mathbf{x}^{(n')} - \sigma_{n'}|^2 \right), \end{aligned} \tag{52.21}$$

dove $\psi_{n'} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tale che $\psi_{n'}$ abbia in 0 un minimo stretto.

Nota bibliografica

Nel presente capitolo abbiamo seguito essenzialmente [Dell'Antonio], Cap. VII, per i paragrafi §47, §48 e §49, e [Gallavotti], Cap 5, per i paragrafi §50, §51 e §52.

Esercizi

Esercizio 1. Dato uno spazio vettoriale V un insieme non vuoto A si definisce *spazio affine* se, definita una addizione $+$ tra elementi di A e V e fissato un elemento $a \in A$, si ha $v + a \in A$ per ogni $v \in V$ e, inoltre, risultano soddisfatte le seguenti proprietà: (1) $(a + v) + w = a + (v + w)$ per ogni $v, w \in V$, (2) per ogni $b \in A$ esiste un unico $v \in V$ tale che $b = a + v$. Si dimostri che lo spazio $\mathcal{M}_0$ definito nel paragrafo §47.1 è uno spazio affine.

Esercizio 2. Sia Σ una superficie determinata dalle condizioni $x = x(q)$, con $q \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^N$ (dove $n < N$). Si dimostri che i vettori $\partial x/\partial q_1, \dots, \partial x/\partial q_n$ formano una base per $T_{x(q)}\Sigma$, lo spazio tangente a Σ nel punto $x(q)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema meccanico costituito da un disco di massa m e raggio r, che rotoli senza strisciare su un piano orizzontale, mentenendosi sempre ortogonale al piano. Risolvere esplicitamente le equazioni del moto e determinare le reazioni vincolari utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 4. Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m_1 = m_2 = 1$, che si muovono su un piano orizzontale, sotto l'azione della forza generata dal

potenziale

$$U = \frac{1}{2}k\left[r_{12}^2 - \left(r_1^2 - r_2^2\right)^2\right],$$

dove r_{12} è la distanza tra i punti P_1 e P_2, r_1 è la distanza del punto P_1 da un punto fisso O e r_2 è la distanza del punto P_2 da O.

I due punti P_1 e P_2 sono inoltre vincolati a muoversi, rispettivamente, su una circonferenza di raggio a_1 e centro O e su una circonferenza di raggio $a_2 > a_1$ e centro O.
(1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 che i raggi vettori OP_1 e OP_2 formano con un asse prefissato (*e.g.* l'asse x).
(2) Si consideri la configurazione iniziale

$$\theta_1(0) = 0, \qquad \dot\theta_1(0) = 0, \qquad \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \dot\theta_2(0) = 0.$$

Si determini il primo istante t_0, in cui si abbia $\theta_1(t_0) = \theta_2(t_0)$, come integrale definito.
(3) In corrispondenza della configurazione del punto (2) si determini la reazione vincolare che agisce sul punto P_1.

Esercizio 5. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema lagrangiano $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L})$, con

$$\mathcal{L}(q, \dot q) = q_2\dot q_1 - q_1\dot q_2 - 2q_1q_2,$$

e trovarne esplicitamente la soluzione. Trovare una costante del moto.

Esercizio 6. Il *pendolo doppio* è costituito da due pendoli semplici coplanari, di massa rispettivamente m_1 e m_2 e di lunghezza rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2, dei quali il primo ha il punto di sospensione fisso e il secondo è sospeso al punto di massa m_1. Cfr. la figura 1. Sia g la costante di gravità. Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange per il pendolo doppio. [*Soluzione.* Indicando con φ_1 e φ_2 gli angoli che i due pendoli formano con la verticale discendente, si ha $\mathcal{L} = T - U$, con

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\ell_1^2\dot\varphi_1^2 + \ell_2^2\dot\varphi_2^2 + 2\ell_1\ell_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot\varphi_1\dot\varphi_2\right), \\ U &= -m_1g\ell_1\cos\varphi_1 - m_2g\ell_1\cos\varphi_1 - m_2g\ell_2\cos\varphi_2, \end{aligned}$$

così che le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono $(m_1+m_2)\ell_1^2\ddot\varphi_1 + m_2\ell_1\ell_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_2 + m_2\ell_1\ell_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_2^2 = (m_1+m_2)\ell_1\sin\varphi_1$, $m_2\ell_2^2\ddot\varphi_1 + m_2\ell_1\ell_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_1 - m_2\ell_1\ell_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1^2 + m_2\ell_1\ell_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2 = m_2\ell_2\sin\varphi_2$.]

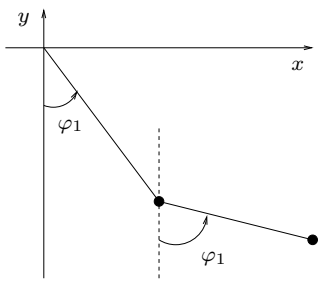

FIGURA 1. Pendolo doppio (coplanare).

Esercizio 7. Sia g la costante di gravità. Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange per un pendolo semplice di massa m e lunghezza ℓ, il cui punto di sospensione (1) si muova lungo un cerchio verticale con velocità angolare costante ω, (2) oscilli orizzontalmente nel piano di oscillazione del pendolo secondo la legge $x(t) = a\cos\omega t$, (3) oscilli verticalmente secondo la legge $y(t) = a\cos\omega t$. Cfr. la figura 2. [*Soluzione.* Sia O il punto di sospensione, e siano (x_0, y_0) le sue coordinate. Nel caso (1) si ha $x_0 = a\cos\omega t$, $y_0 = a\sin\omega t$, e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + m\ell a\omega^2\sin(\varphi - \omega t) + mg\ell\cos\varphi,$$

se φ è l'angolo che il pendolo forma con la verticale discendente. La corrispondente equazione di Eulero-Lagrange è $m\ell 2\ddot{\varphi} = -mg\ell\sin\varphi + m\ell a\omega^2\cos(\varphi - \omega t)$. Nel caso (2) si ha $x_0 = a\cos\omega t$, $y_0 = 0$, e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + m\ell a\omega^2\cos\omega t\sin\varphi + mg\ell\cos\varphi,$$

se φ è l'angolo che il pendolo forma con la verticale discendente. La corrispondente equazione di Eulero-Lagrange è $m\ell 2\ddot{\varphi} = -mg\ell\sin\varphi + m\ell a\omega^2\cos\omega t\cos\varphi$. Nel caso (3) si ha $x_0 = 0$, $y_0 = a\cos\omega t$, e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + m\ell a\omega^2\cos\omega t\cos\varphi + mg\ell\cos\varphi,$$

se φ è l'angolo che il pendolo forma con la verticale discendente. La corrispondente equazione di Eulero-Lagrange è $m\ell 2\ddot{\varphi} = -m\ell(g + a\omega^2\cos\omega t)\sin\varphi$. Tale equazione è nota come *equazione di Mathieu.*]

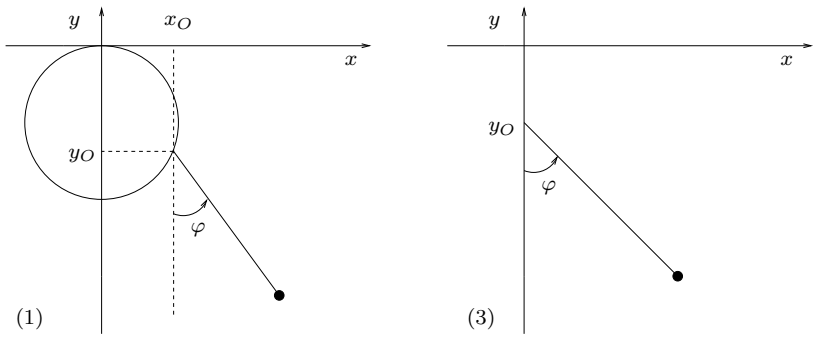

FIGURA 2. Pendolo semplice con punto di sospensione che si muove lungo un cerchio (1) o oscilla nella direzione verticale con legge cosinusoidale (3).

Esercizio 8. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi, senza attrito, su una circonferenza di raggio ℓ e centro O posta su un piano verticale π. Il punto P è inoltre collegato a un asse verticale, passante per O, mediante una molla di costante elastica k e di lunghezza a riposo null, che scorre senza attrito lungo l'asse.
(1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si trovino le posizioni d'equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri ℓ, m, k, g, dove g è la costante di gravità.