

Capitolo 14. Teoria delle piccole oscillazioni

sec.59

59. Linearizzazione

p.59.0 **59.1. Introduzione.**p.59.1 **59.2. Notazioni.** Consideriamo un sistema meccanico descritto dalla lagrangiana (di classe C^2)

$$59.1 \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q) \dot{q} \rangle - U(q), \quad (59.1)$$

dove $T(q, \dot{q}) = \langle \dot{q}, A(q) \dot{q} \rangle / 2$ è l'energia cinetica e $U(q)$ è l'energia potenziale. La matrice $A(q)$ dipende solo dalle coordinate q : $T(q, \dot{q})$ è una forma quadratica definita positiva nelle variabili $\dot{q}$; cfr. il lemma 53.4.

Le corrispondenti *equazioni di Eulero-Lagrange* sono date da

$$59.2 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \quad (59.2)$$

e possono essere interpretate come un sistema dinamico; cfr. il paragrafo 53.9.

p.59.2 **59.3. TEOREMA.** *Il punto $(q, \dot{q}) = (q_0, \dot{q}_0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema (59.2) se e solo se $\dot{q}_0 = 0$ e q_0 è un punto critico dell'energia potenziale $U(q)$.*p.59.3 **59.4. Dimostrazione del teorema 59.3.** Scrivendo $\mathcal{L}$ come in (59.1) si vede che, se $\dot{q} = 0$, allora $q = q_0$ è una soluzione delle equazioni (59.2) se e solo se

$$59.3 \quad \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_0} = 0, \quad (59.3)$$

così che l'asserto è dimostrato (cfr. anche il teorema 53.8). ■

p.59.4 **59.5. TEOREMA.** *Il punto $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile per il sistema (59.2) se q_0 è un punto di minimo isolato dell'energia potenziale $U(q)$.*p.59.5 **59.6. Dimostrazione del teorema 59.5.** Segue dal teorema di Dirichlet 18.30 (cfr. anche il teorema 53.8). ■p.59.6 **59.7. Osservazione.** Assumeremo nel seguito sempre $q_0 = 0$. Questo non è restrittivo;

92 CAPITOLO 14. TEORIA DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

se infatti $q_0 \neq 0$, possiamo sempre effettuare un cambiamento di coordinate $q \rightarrow q' = q - q_0$ tale che $q_0 \rightarrow 0$.

59.8. TEOREMA. *Il sistema linearizzato del sistema (59.2) in un intorno del punto d'equilibrio $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ è dato dalle equazioni di Eulero-Lagrange*

$$A\ddot{q} = -Bq, \quad (59.4)$$

dove $A = A(0)$ e B è la matrice di elementi

$$B_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=0}, \quad (59.5)$$

ed è quindi descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle, \quad (59.6)$$

data dalla parte quadratica di $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, in un intorno del punto d'equilibrio.

59.9. Dimostrazione del teorema 59.8. Scriviamo le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema con lagrangiana (59.1). Le equazioni linearizzate si otterranno prendendo la parte lineare di $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$ e di $\partial \mathcal{L} / \partial q$: tale parte lineare si otterrà quindi dalla parte quadratica di $\mathcal{L}$. ■

59.10. ESEMPIO. Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q), \quad (59.7)$$

e sia $q_0 = 0$ un minimo isolato per $U(q)$. Allora la parte quadratica di $\mathcal{L}$ in un intorno del punto d'equilibrio stabile $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_0 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2, \quad a_0 = a(0), \quad k = \frac{d^2 U}{d^2 q}(0). \quad (59.8)$$

Il moto è determinato dall'equazione

$$\ddot{q} = -\omega^2 q, \quad \omega^2 = k/a_0, \quad (59.9)$$

ed è quindi dato da

$$q(t) = c_1 \cos \omega t + s_1 \sin \omega t, \quad (59.10)$$

dove c_1 e s_1 sono costanti che dipendono dai dati iniziali. Il moto del sistema linearizzato è dunque un moto periodico, che descrive un'oscillazione intorno alla posizione d'equilibrio $(0, 0)$: esso prende il nome di *piccola oscillazione* di frequenza ω e ω si chiama *frequenza propria*.

sec.60

60. Piccole oscillazioni

p.60.1 **60.1. Introduzione.** Ricordiamo che se A è una matrice simmetrica, allora (cfr. gli esercizi 6÷10 del capitolo 1)

- (1) A è diagonalizzabile,
- (2) i suoi autovalori sono reali,
- (3) i suoi autovettori sono ortogonali,
- (4) la matrice U che diagonalizza A è ortogonale ($U^T = U^{-1}$).

p.60.2 **60.2. LEMMA.** *Si può diagonalizzare con un'unica trasformazione di coordinate una coppia di forme quadratiche la prima delle quali sia definita positiva.*

p.60.5 **60.3. Dimostrazione del lemma 60.2.** Siano date due forme quadratiche $\langle q, Aq \rangle$ e $\langle q, Bq \rangle$, la prima delle quali sia definita positiva.

Poiché la matrice A è positiva, esiste una matrice α , simmetrica e invertibile anch'essa, tale che $A = \alpha^2$. Infatti, se $A = UDU^{-1}$, con D diagonale e U ortogonale, si definisce $\alpha = U\sqrt{D}U^{-1}$, dove $\sqrt{D}$ è la matrice diagonale i cui elementi (diagonali) sono le radici quadrate degli elementi D_{ii} di D ; poiché A è definita positiva, si ha $D_{ii} > 0$ e quindi $\sqrt{D_{ii}}$ è ben definito. Risulta allora

$$60.3a \quad \alpha^2 = U\sqrt{D}U^{-1}U\sqrt{D}U^{-1} = U\sqrt{D}\sqrt{D}U^{-1} = UDU^{-1} = A, \quad (60.1)$$

e

$$60.3b \quad \alpha^T = (U\sqrt{D}U^{-1})^T = U\sqrt{D}U^{-1} = \alpha, \quad (60.2)$$

poiché $U^{-1} = U^T$.

Definiamo allora $v = \alpha q$. Quindi

$$60.4 \quad \begin{aligned} \langle q, Aq \rangle &= \langle q, \alpha^2 q \rangle = \langle \alpha^T q, \alpha q \rangle = \langle \alpha q, \alpha q \rangle = \langle v, v \rangle, \\ \langle q, Bq \rangle &= \langle v, \beta v \rangle, \quad \beta = \alpha^{-1} B \alpha^{-1}, \end{aligned} \quad (60.3)$$

dove β è simmetrica (poiché B e α sono simmetriche).

Siano $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ gli autovalori di β e $\{w_1, \dots, w_n\}$ i corrispondenti autovettori. Per quanto ricordato nel paragrafo §60.1 gli autovettori di β sono ortogonali a due a due e la matrice $\mathcal{U}$ che diagonalizza β è ortogonale. Dato un generico vettore v possiamo decomporlo nella base $\{w_1, \dots, w_n\}$ scrivendo $v = \sum_{i=1}^n v_i w_i$; si ha inoltre $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$, se δ_{ij} denota la delta di Kronecker, poiché i vettori della base $\{w_1, \dots, w_n\}$ sono ortogonali. Quindi, se $\mathcal{D}$ è la matrice diagonale tale che $\beta = \mathcal{U}\mathcal{D}\mathcal{U}^{-1}$, e indichiamo con $\mathcal{D}_{ii} = \lambda_i$ gli elementi della diagonale principale di $\mathcal{D}$, si ha

$$60.5 \quad \langle v, \beta v \rangle = \langle v, \mathcal{U}^T \mathcal{D} \mathcal{U} v \rangle = \langle \mathcal{U} v, \mathcal{D} \mathcal{U} v \rangle = \langle v, \mathcal{D} v \rangle, \quad (60.4)$$

da cui segue che

$$60.6 \quad \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n v_i^2, \quad \langle v, \beta v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2. \quad (60.5)$$

94 CAPITOLO 14. TEORIA DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

Quindi, nella base dei vettori $\{w_1, \dots, w_n\}$ la forma quadratica indotta dal prodotto scalare e quella definita da $\mathcal{D} = \mathcal{U}^T \beta \mathcal{U}$ sono date dalle (60.5), e quindi si rappresentano attraverso la matrici, rispettivamente,

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (60.6)$$

che sono entrambe diagonali. ■

60.4. Osservazione. Nella base dei vettori $\{w_1, \dots, w_n\}$, le matrici che definiscono le forme quadratiche sono quindi date dalle (60.6). Questo vuol dire che, se Q indicano le coordinate nella base $\{w_1, \dots, w_n\}$, le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono in quella base come

$$\ddot{Q}_i = -\omega_i^2 Q_i, \quad \omega_i^2 = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (60.7)$$

e possono quindi essere risolte immediatamente. Per ogni i , se $\omega_i^2 > 0$ si ha un moto oscillatorio

$$Q_i(t) = c_i \cos \omega_i t + s_i \sin \omega_i t, \quad (60.8)$$

mentre se $\omega_i^2 = 0$ si ha un moto rettilineo uniforme

$$Q_i(t) = c_i + s_i t, \quad (60.9)$$

e, infine, se $\omega_i^2 < 0$ si ha un moto esponenziale

$$Q_i(t) = c_i \cosh \omega_i t + s_i \sinh \omega_i t. \quad (60.10)$$

Nelle (60.8)÷(60.10), c_i e s_i sono coefficienti costanti che dipendono dalle condizioni iniziali.

Si noti che l'origine rappresenta una posizione di equilibrio stabile se $\lambda_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, mentre rappresenta una posizione di equilibrio instabile se esiste anche un solo autovalore λ_i tale che si abbia $\lambda_i \leq 0$. Si vede quindi che solo la condizione $\omega_i^2 > 0$ corrisponde a una effettiva oscillazione, di periodo $2\pi/\omega_i$, lungo la direzione individuata dal vettore w_i .

Data un soluzione $Q_i(t)w_i$, nelle coordinate originarie q avremo ovviamente $q(t) = Q_i(t)\alpha^{-1}w_i$, dato che α è la matrice che fa passare dalle coordinate q alle coordinate v (cfr. il paragrafo §60.3).

60.5. COROLLARIO. Se $\lambda_i = \omega_i^2 > 0$, la soluzione delle equazioni del moto del sistema linearizzato (descritto dalla lagrangiana (59.5)) data da

$$q(t) = (c_i \cos \omega_i t + s_i \sin \omega_i t) \frac{\alpha^{-1}w_i}{|\alpha^{-1}w_i|}, \quad (60.11)$$

con c_i e s_i costanti arbitrarie, è un'oscillazione di periodo $2\pi/\omega_i$.

p.60.8 **60.6.** Dimostrazione del corollario 60.5. Discende dall'osservazione 60.4, con $Q_i(t)$ data dalla (60.8) e $Q_j(t) \equiv 0$ per ogni $j \neq i$. Ovviamente, rispetto alla (60.8), i valori delle costanti c_i e s_i sono diversi, per tenere conto della normalizzazione del vettore $\alpha^{-1}w_i$. ■

p.60.8a **60.7.** DEFINIZIONE (PICCOLA OSCILLAZIONE). Dato un sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ in (59.1) definiremo piccola oscillazione ogni oscillazione del sistema linearizzato descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}_2(q, \dot{q})$ in (59.6).

p.60.9 **60.8.** DEFINIZIONE (OSCILLAZIONI PROPRIE). Una soluzione delle equazioni del moto della forma (60.11) prende il nome di oscillazione propria (o modo normale) e la frequenza ω_i prende il nome di frequenza propria (o frequenza principale, o frequenza caratteristica, o frequenza normale).

p.60.10 **60.9.** COROLLARIO. Dato il sistema descritto da una lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, il sistema linearizzato in un intorno di un punto d'equilibrio stabile ammette n oscillazioni proprie in direzioni a due a due ortogonali rispetto al prodotto scalare indotto dall'energia cinetica. Ogni piccola oscillazione è la composizione di oscillazioni proprie.

p.60.11 **60.10.** Dimostrazione del corollario 60.9. Segue dalla costruzione fatta nelle sezioni precedenti, notando che possiamo decomporre il dato iniziale x_0 nella base degli autovettori $\{w_1, \dots, w_n\}$, i.e. $x_0 = \sum_{i=1}^n C_i w_i$, così che si ha che ogni componente $Q_i(t)$ è data dalla (60.8), e quindi la soluzione, nelle coordinate Q , è data da $x(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t) w_i$ (con $Q_i(t) = c_i \cos \omega_i t + s_i \sin \omega_i t$ e $Q_i(0) = C_i$, purché sia $\lambda_i > 0$, come stiamo supponendo). Quindi nelle coordinate q si ha

$$60.12a \quad q(t) = \alpha^{-1} \sum_{i=1}^n Q_i(t) w_i = \sum_{i=1}^n Q_i(t) \alpha^{-1} w_i, \quad (60.12)$$

che è quindi una combinazione lineare di soluzioni della forma (60.11). ■

p.60.12 **60.11.** Osservazione. Si noti che la scomposizione delle piccole oscillazioni nei modi normali è corretta anche nel caso in cui si abbiano autovalori degeneri.

p.60.13 **60.12.** TEOREMA. L'equazione che individua le frequenze $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ delle oscillazioni proprie del sistema linearizzato (59.5) è data da

$$60.13 \quad \det(B - \lambda A) = 0, \quad \lambda = \omega^2, \quad (60.13)$$

e la trasformazione del cambiamento di coordinate $q = CQ$ è data da

$$60.14 \quad C = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix}, \quad (60.14)$$

96 CAPITOLO 14. TEORIA DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

dove i vettori $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{in})$ soddisfano le equazioni

$$(B - \lambda_i A)\xi_i = 0, \quad (60.15)$$

per $i = 1, \dots, n$. La (60.13) prende il nome di equazione caratteristica per la determinazione degli autovalori della forma B rispetto alla forma A .

60.13. *Dimostrazione del teorema 60.12.* L'equazione che determina le frequenze proprie è l'equazione agli autovalori

$$\det(\beta - \lambda \mathbb{1}) = 0, \quad \beta = \alpha^{-1} B \alpha^{-1}, \quad (60.16)$$

che è equivalente alla (60.13); infatti, tenuto conto che la matrice A è positiva, così che α è non singolare ($\det \alpha \neq 0$), si ha

$$\det(\beta - \lambda \mathbb{1}) = \det(\alpha^{-1}) \det(B - \lambda A) \det(\alpha^{-1}) = 0. \quad (60.17)$$

Introducendo la matrice $\mathcal{C}$ data dalla (60.14), le equazioni (60.15) si possono scrivere come un'unica equazione matriciale (cfr. l'esercizio 1)

$$BC - AC\mathcal{D} = 0, \quad (60.18)$$

dove $\mathcal{D}$ è data dalla prima delle (60.6). Quindi si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle C\dot{Q}, AC\dot{Q} \rangle - \frac{1}{2} \langle CQ, BCQ \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \dot{Q}, C^T AC\dot{Q} \rangle - \frac{1}{2} \langle Q, C^T BCQ \rangle, \end{aligned} \quad (60.19)$$

da cui, tenendo conto che le matrici $C^T AC$ e $C^T BC$ sono simmetriche, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$C^T AC\ddot{Q} = -C^T BCQ. \quad (60.20)$$

Quindi, se $\mathcal{C}$ è definita come in (60.14), la (60.18), introdotta nella (60.20), implica che Q deve soddisfare le equazioni del moto $\ddot{Q} = -\mathcal{D}Q$, i.e. $\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i$, per $i = 1, \dots, n$. Viceversa, se Q soddisfa tali equazioni del moto, allora la (60.20) implica la (60.18), e quindi deve essere $q = CQ$, con $\mathcal{C}$ data dalla (60.14). ■

60.14. *Osservazione.* Se i vettori $\{\xi_i\}$ soddisfano la (60.15) e $\{w_i\}$ sono gli autovettori di β , si ha

$$0 = \beta w_i - \lambda w_i = \alpha^{-1} (B - \lambda_i A) \alpha^{-1} w_i, \quad (60.21)$$

e quindi deve essere

$$60.22 \quad \alpha^{-1}w_i = \xi_i, \quad w_i = \alpha\xi_i, \quad (60.22)$$

che esprime la relazione che sussiste tra i vettori $\{\xi_i\}$ e gli autovettori $\{w_i\}$. Quindi possiamo riscrivere la (60.11) come

$$60.23 \quad q(t) = (c_i \cos \omega_i t + s_i \sin \omega_i t) \hat{\xi}_i, \quad (60.23)$$

che descrive un'oscillazione propria di frequenza ω_i nella direzione individuata dal vettore ξ_i (se $\hat{\xi}_i = \xi_i/|\xi_i|$).

p.60.16 **60.15.** ESEMPIO. Nel caso del sistema lagrangiano dell'esempio 55.2, per valori dei parametri $m = g = k = 1$, studiare le piccole oscillazioni del sistema intorno a una posizione d'equilibrio stabile, risolvendo esplicitamente le equazioni del moto in funzione dei dati iniziali. Trovare in particolare la soluzione che corrisponde ai dati iniziali (espressi in coordinate cartesiane)

$$60.24 \quad \begin{aligned} P_1 &= (0, 0), & P_2 &= (0, 0), & P_3 &= (0, 0), \\ P_4 &= (0, 0), & P_5 &= (0, -mg/2k), \\ \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (0, 0), & \mathbf{v}_3 &= (u, 0), \\ \mathbf{v}_4 &= (w, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, 0), \end{aligned} \quad (60.24)$$

dove $\mathbf{v}_i$ è la velocità del punto P_i e $u, w \in \mathbb{R}$.

p.60.17 **60.16.** *Discussione dell'esempio 60.15.* Usiamo le notazioni del paragrafo §55. Si è visto che nel paragrafo §55.4 che il sistema ammette le quattro posizioni d'equilibrio (55.16). In accordo con quanto richiesto, dobbiamo sceglierne una stabile: d'altra parte, dall'analisi del paragrafo §55.5, segue che l'unica posizione d'equilibrio stabile è la prima, *i.e.* quella data dalla (55.26), quindi la scelta è obbligata.

Poiché $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ (cfr. le (55.17)), per le piccole oscillazioni possiamo considerare separatamente i tre sistemi lagrangiani (55.18). Dovendo studiare le piccole oscillazioni intorno alla posizione (55.26), occorre quindi sviluppare fino al secondo ordine $\mathcal{L}_1$ nell'intorno di $(\theta_1, x_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_1) = (0, 0, 0, 0)$, $\mathcal{L}_2$ nell'intorno di $(\theta_2, x_2, \dot{\theta}_2, \dot{x}_2) = (0, 0, 0, 0)$ e $\mathcal{L}_3$ nell'intorno di $(y, \dot{y}) = (y_0, 0)$.

Per $\mathcal{L}_1$ otteniamo quindi, se $z = (\theta_1, x_1)$, a meno di ordini superiori al secondo,

$$60.24a \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \langle \dot{z}, A \dot{z} \rangle - \frac{1}{2} \langle z, B z \rangle, \quad (60.25)$$

dove A e B sono due matrici 2×2 date da

$$60.25 \quad A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad B = \mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} mg + k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}. \quad (60.26)$$

L'equazione caratteristica per la determinazione delle frequenze proprie è allora

$$60.26 \quad \det(B - \lambda A) = m^2 \lambda^2 - m(3k + mg)\lambda + 2k(mg + k) - k^2 = 0, \quad (60.27)$$

98 CAPITOLO 14. TEORIA DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

che, per $m = g = k = 1$, dà

$$60.27 \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0, \quad (60.28)$$

le cui radici sono dunque $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$.

Le frequenze proprie sono allora

$$60.28 \quad \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3}. \quad (60.29)$$

Le direzioni dei modi normali ξ_1 e ξ_2 sono tali che

$$60.29 \quad (B - \lambda_j)\xi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (60.30)$$

ovvero (tenendo conto che $m = g = k = 1$)

$$60.30 \quad (2 - \lambda_1)\xi_{11} - \xi_{12} = \xi_{11} - \xi_{12} = 0, \quad (2 - \lambda_2)\xi_{11} - \xi_{12} = -\xi_{11} - \xi_{12} = 0; \quad (60.31)$$

quindi

$$60.31 \quad \xi_1 = (1, 1), \quad \xi_2 = (-1, 1). \quad (60.32)$$

Nella base (ξ_1, ξ_2) le equazioni del moto sono

$$60.32 \quad \ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1, \quad \ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2, \quad (60.33)$$

che ammettono soluzioni

$$60.33 \quad \begin{aligned} Q_1(t) &= a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t, \\ Q_2(t) &= a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t, \end{aligned} \quad (60.34)$$

dove le costanti a_1, a_2, b_1, b_2 dipendono dai dati iniziali nel modo seguente:

$$60.34 \quad a_1 = Q_1(0), \quad b_1 = \frac{\dot{Q}_1(0)}{\omega_1}, \quad a_2 = Q_2(0), \quad b_2 = \frac{\dot{Q}_2(0)}{\omega_2}, \quad (60.35)$$

Introducendo la matrice

$$60.35 \quad C = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (60.36)$$

risulta

$$60.36 \quad \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad (60.37)$$

così che

$$60.37 \quad \begin{aligned} Q_1(0) &= \frac{\theta_1(0) + x_1(0)}{2}, & \dot{Q}_1(0) &= \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2}, \\ Q_2(0) &= \frac{-\theta_1(0) + x_1(0)}{2}, & \dot{Q}_2(0) &= \frac{-\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2}, \end{aligned} \quad (60.38)$$

che permette di esprimere i dati iniziali nelle variabili (Q_1, Q_2) in termini dei dati iniziali nelle variabili (θ_1, x_1) .

In conclusione

$$\begin{aligned}
 \theta_1(t) &= \frac{\theta_1(0) + x_1(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2} \sin t \\
 &\quad + \frac{\theta_1(0) - x_1(0)}{2} \cos \sqrt{3}t + \frac{\dot{\theta}_1(0) - \dot{x}_1(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\
 x_1(t) &= \frac{\theta_1(0) + x_1(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2} \sin t \\
 &\quad - \frac{\theta_1(0) - x_1(0)}{2} \cos \sqrt{3}t - \frac{\dot{\theta}_1(0) - \dot{x}_1(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,
 \end{aligned} \tag{60.38}$$

e, analogamente, si trova per $\mathcal{L}_2$

$$\begin{aligned}
 \theta_2(t) &= \frac{\theta_2(0) + x_2(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_2(0) + \dot{x}_2(0)}{2} \sin t \\
 &\quad + \frac{\theta_2(0) - x_2(0)}{2} \cos \sqrt{3}t + \frac{\dot{\theta}_2(0) - \dot{x}_2(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\
 x_2(t) &= \frac{\theta_2(0) + x_2(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_2(0) + \dot{x}_2(0)}{2} \sin t \\
 &\quad - \frac{\theta_2(0) - x_2(0)}{2} \cos \sqrt{3}t - \frac{\dot{\theta}_2(0) - \dot{x}_2(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,
 \end{aligned} \tag{60.39}$$

vista la completa simmetria tra $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.

Per $\mathcal{L}_3$ abbiamo, a meno di costanti e di termini di ordine superiore al secondo,

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} \dot{y}^2 - (y - y_0)^2, \tag{60.40}$$

e quindi la frequenza propria del sistema risulta essere

$$\omega_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{2}, \tag{60.41}$$

così che

$$y(t) = y_0 + y(0) \cos \sqrt{2}t + \frac{\dot{y}(0)}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t. \tag{60.42}$$

In particolare la scelta dei dati iniziali data nel testo implica, in termini delle variabili lagrangiane,

$$\begin{aligned}
 \theta_1(0) &= \theta_2(0) = x_1(0) = x_2(0) = y(0) - y_0 = 0, \\
 \dot{\theta}_1(0) &= \dot{\theta}_2(0) = \dot{y}(0) = 0, \\
 \dot{x}_1(0) &= u, \quad \dot{x}_2(0) = w,
 \end{aligned} \tag{60.43}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
 \theta_1(t) &= \frac{u}{2} \sin t - \frac{u}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\
 x_1(t) &= \frac{u}{2} \sin t + \frac{u}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\
 \theta_2(t) &= \frac{w}{2} \sin t - \frac{w}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\
 x_2(t) &= \frac{w}{2} \sin t + \frac{w}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\
 y(t) &= y_0 = -\frac{mg}{2k} = -\frac{1}{2},
 \end{aligned} \tag{60.45}$$

che dunque esprimono le piccole oscillazioni del sistema nell'intorno del punto d'equilibrio considerato.

sec.61

61. Piccole oscillazioni per pendoli accoppiati

p.61.1

61.1. Introduzione. Consideriamo il sistema costituito da due pendoli di massa $m_1 = m_2 = 1$ e lunghezza $\ell_1 = \ell_2 = 1$, sospesi alla stessa quota. I pendoli sono sottoposti all'azione della gravità $g = 1$ e collegati tra loro da una molla senza peso che ha costante elastica α e lunghezza a riposo uguale alla distanza d dei punti di sospensione; cfr. la figura 61.1. Chiameremo tale sistema un sistema di pendoli accoppiati. Assumiamo per semplicità $d = 1$.

Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni il sistema è descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \alpha(\theta_1 - \theta_2)^2). \tag{61.1}$$

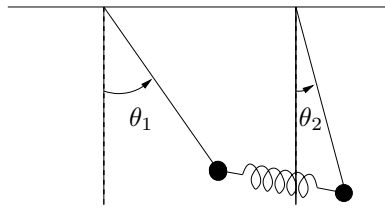


FIGURA 61.1. Pendoli accoppiati tramite un potenziale armonico.

Infatti, se scegliamo un sistema di riferimento in cui i punti di sospensione dei pendoli abbiano coordinate $(0, 0)$ e $(0, d)$ rispettivamente, allora le masse dei pendoli

sono individuate dai punti $P_1 = (\sin \theta_1, -\cos \theta_1)$ e $P_2 = (d + \sin \theta_2, -\cos \theta_2)$. L'energia elastica dovuta alla molla è data da

$$\begin{aligned}
 61.1a \quad U_{\text{el}}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2}\alpha \left(\sqrt{(d + \sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + (-\cos \theta_2 + \cos \theta_1)^2} - d \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}\alpha \left(\sqrt{d^2 + 2 + 2d(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2\cos(\theta_1 - \theta_2)} - d \right)^2 \quad (61.2) \\
 &= \frac{1}{2}\alpha d^2 \left(\sqrt{1 + 2(\theta_2 - \theta_1) + d^{-1}(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2) + \dots} - 1 \right)^2 + \dots \\
 &= \frac{1}{2}\alpha d^2 (1 + \theta_2 - \theta_1 + \dots - 1)^2 + \dots,
 \end{aligned}$$

con $d = 1$, mentre l'energia dovuta alla forza gravitazionale è data da

$$\begin{aligned}
 61.1b \quad U_{\text{gr}} &= -\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = -1 + \frac{1}{2}\theta_1^2 - 1 + \frac{1}{2}\theta_2^2 + \dots \\
 &= \text{cost.} + \frac{1}{2}\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2^2 + \dots, \quad (61.3)
 \end{aligned}$$

dove con $\dots$ si indicano gli infinitesimi di ordine superiore al secondo; dalle (61.2) e (61.3) discende quindi la (61.1).

p.61.2 **61.2.** Il sistema (61.1) ammette due modi normali di frequenza $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\alpha}$.

Questo si vede facilmente ragionando nel modo seguente. Definiamo la trasformazione di coordinate

$$61.2 \quad Q_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\sqrt{2}}, \quad (61.4)$$

di inversa

$$61.3 \quad \theta_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}, \quad \theta_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}; \quad (61.5)$$

nelle variabili (61.4), la (61.1) diventa

$$61.4 \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2), \quad (61.6)$$

con $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\alpha}$. Se $Q_2 = 0$ (i.e. $\theta_1 = \theta_2$), si ha un'oscillazione in fase con frequenza ω_1 (e la molla non compie lavoro); se $Q_1 = 0$ (i.e. $\theta_1 = -\theta_2$), si ha un'oscillazione in opposizione di fase con frequenza ω_2 ; cfr. la figura 61.2.

p.61.4 **61.3. Osservazione.** Con le notazioni del paragrafo §60.3, nel caso dell'esempio 61.2, si ha $\alpha = \mathbb{1}$ e quindi $\beta = B$. Quindi per diagonalizzare simultaneamente A e B è sufficiente diagonalizzare la matrice

$$61.4a \quad B = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix}, \quad (61.7)$$

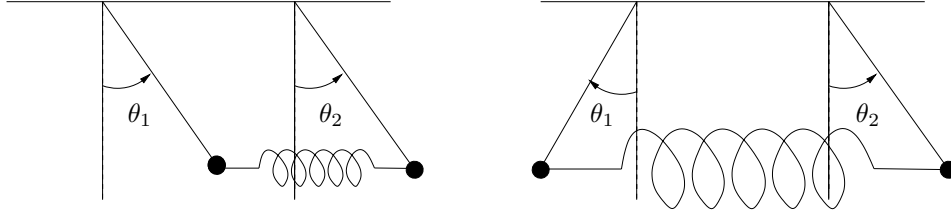


FIGURA 61.2. Oscillazioni in fase e in opposizione di fase.

dal momento che A è già diagonale. Si vede subito che gli autovalori sono $\lambda_- = 1$ e $\lambda_+ = 1 + 2\alpha$, e i corrispondenti autovettori (normalizzati) sono

$$61.4b \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \quad (61.8)$$

in accordo con le (61.5).

p.61.4a **61.4. Osservazione.** Se $\alpha \ll 1$, si ha un trasferimento periodico di energia dal primo al secondo pendolo (*battimenti*). Supponiamo infatti di partire dalle condizioni iniziali $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = v > 0$ e $\dot{\theta}_2(0) = 0$; quindi all'inizio tutta l'energia è immagazzinata nel primo pendolo (sotto forma di energia cinetica).

Dalle (61.4) si ricava che, per $t = 0$, si ha $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$ e $\dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = v/\sqrt{2}$, e quindi

$$61.5 \quad Q_1(t) = \frac{v}{\sqrt{2}} \sin t, \quad Q_2(t) = \frac{v}{\omega_2 \sqrt{2}} \sin \omega_2 t, \quad (61.9)$$

così che, utilizzando le (61.5), otteniamo (cfr. l'esercizio 2)

$$61.6 \quad \begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{v}{2} \left(\sin t + \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) = v \cos \varepsilon t \sin \omega t + O(\alpha), \\ \theta_2(t) &= \frac{v}{2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) = -v \sin \varepsilon t \cos \omega t + O(\alpha), \end{aligned} \quad (61.10)$$

dove $\varepsilon = (\omega_2 - \omega_1)/2 = \alpha/2 + O(\alpha^2)$ e $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2 = 1 + \alpha/2 + O(\alpha^2)$. Si ha quindi un moto oscillatorio, con periodo $T = 2\pi/\omega$, modulato da una curva sempre di tipo sinusoidale, ma con periodo molto più lungo ($2\pi/\varepsilon \gg 1$ per $\alpha \ll 1$); cfr. la figura 61.3.

I termini $O(\alpha)$ si possono calcolare esplicitamente (cfr. di nuovo l'esercizio 1), e si trova $O(\alpha) = ((1/\sqrt{1+2\alpha}) - 1) \sin(\omega t + \varepsilon t)$: costituiscono quindi una correzione trigonometrica trascurabile (se α è piccolo), come mostrato in figura 61.4.

Quando $t = \pi/2\varepsilon$, il moto di $\theta_1(t)$ si è quasi completamente smorzato, mentre $\theta_2(t)$ raggiunge un'ampiezza molto elevata, confrontabile con quella che aveva inizialmente

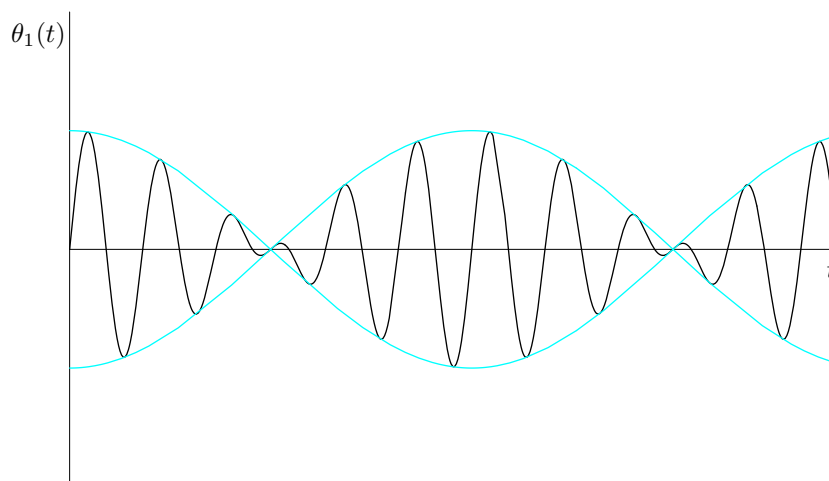


FIGURA 61.3. Battimenti: andamento dell'angolo $v \cos \epsilon t \sin \omega t$.

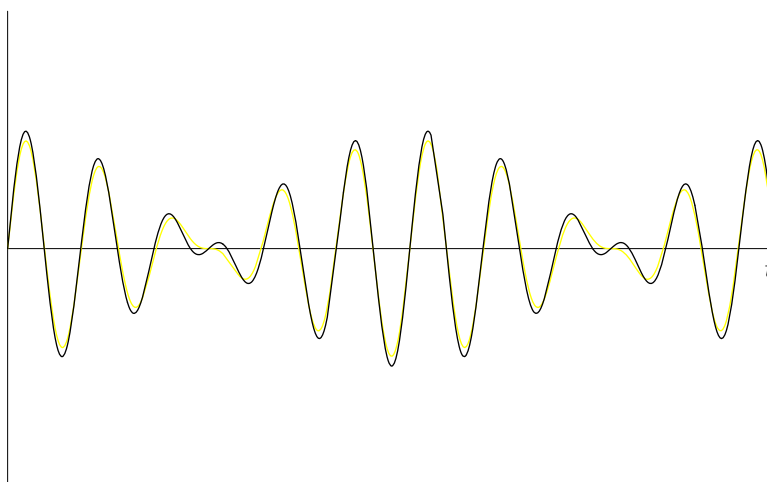
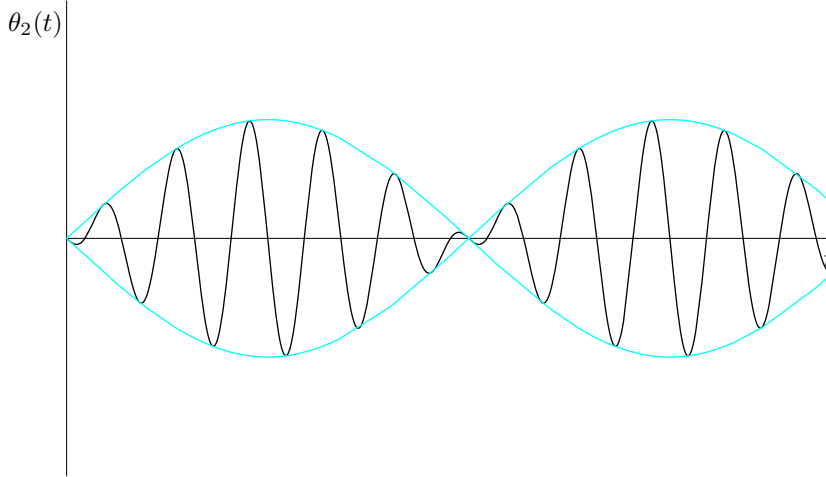


FIGURA 61.4. Confronto tra il valore esatto $\theta_1(t)$ e il valore approssimato ottenuto trascurando le correzioni $O(\alpha)$ in (6.11).

q_1 (cfr. la figura 61.5, e così via periodicamente: si hanno continui trasferimenti

FIGURA 61.5. Battimenti: andamento dell'angolo $-v \sin \varepsilon t \cos \omega t$.

d'energia da un modo normale all'altro.

61.5. Consideriamo ora il caso di due pendoli con masse e lunghezze diverse ($m_1 \neq m_2$ e $\ell_1 \neq \ell_2$); assumiamo sempre $g = 1$ e $d = 1$, e, supponiamo, senza perdita di generalità che sia $\ell_1 > \ell_2$. Supponiamo anche per semplicità che la lunghezza a riposo della molla di costante elastica α sia uguale a $\sqrt{d^2 + (\ell_1 - \ell_2)^2}$, in modo tale che, nella configurazione di equilibrio, entrambi i pendoli siano in posizione verticale (e quindi risulti $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 0$).

Allora la lagrangiana diventa

$$61.7 \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 \ell_1 \theta_1^2 + m_2 \ell_2 \theta_2^2 + \alpha(\theta_1 - \theta_2)^2), \quad (61.11)$$

ridefinendo in modo opportuno α (in funzione di ℓ_1 e ℓ_2), quindi le matrici A e B che definiscono le due forme quadratiche (cfr. la (59.5)) sono date da

$$61.8 \quad A = \begin{pmatrix} m_1 \ell_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 \ell_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m_1 \ell_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & m_2 \ell_2 + \alpha \end{pmatrix}, \quad (61.12)$$

e l'equazione caratteristica per la determinazione delle frequenze proprie (60.13) dà

$$61.9 \quad a\lambda^2 - (b_0 + b_1\alpha)\lambda + (c_0 + c_1\alpha) = 0, \quad (61.13)$$

dove

$$61.10 \quad \begin{cases} a = m_1 \ell_1^2 m_2 \ell_2^2, \\ b_0 = m_1 \ell_1 m_2 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2), & b_1 = m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2, \\ c_0 = m_1 \ell_1 m_2 \ell_2, & c_1 = m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2; \end{cases} \quad (61.14)$$

La (61.13) è, nel piano (λ, α) , l'equazione di un'iperbole (cfr. l'esercizio 3), con due asintoti, uno verticale, che interseca l'asse λ in $\omega_\infty^2 = c_1/b_1$, e l'altro obliquo, con pendenza a/b_1 ; cfr. la figura 61.6. Della regione del piano (λ, α) , l'unica significativa fisicamente è quella con $\lambda \geq 0$ e $\alpha \geq 0$.

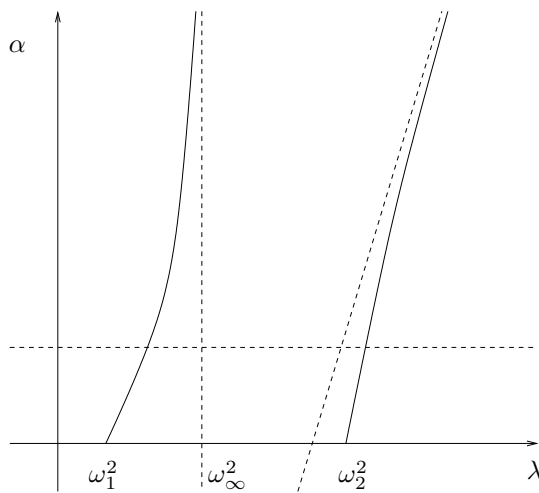


FIGURA 61.6. Piano (λ, α) per il sistema di due pendoli accoppiati.

Per $\alpha = 0$, abbiamo quindi due valori di λ , dati da $\lambda_1 = \omega_1^2 = \ell_1^{-1}$ e $\lambda_2 = \omega_2^2 = \ell_2^{-1}$, che costituiscono le frequenze proprie dei pendoli disaccoppiati.

Per $\alpha \rightarrow \infty$, abbiamo due valori $\lambda_1 < \lambda_2$ che risolvono la (61.13), di cui $\lambda_2 \rightarrow \infty$, mentre $\lambda_1 \rightarrow \omega_\infty^2 = c_1/b_1$. Dalle (61.14), si vede che

$$61.11 \quad \omega_\infty^2 = \frac{m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2}{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}, \quad (61.15)$$

che corrisponde alla frequenza di un pendolo costituito da due masse disposte lungo una stessa asta, a distanza, rispettivamente, ℓ_1 e ℓ_2 dal punto di sospensione. Quindi ω_∞ è la frequenza propria del sistema unidimensionale descritto dalla lagrangiana

$$61.12 \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2) \theta^2, \quad (61.16)$$

poiché i due pendoli si muovono in sincronia, in modo che $\theta = \theta_1 = \theta_2$. Si noti che $\omega_1 < \omega_\infty < \omega_2$ (cfr. il teorema 62.22 più avanti).

Si noti che, se $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ e $m_1 = m_2 = m$, si ha $\omega_\infty^2 = \ell^{-1}$ e per $\alpha = 0$ risulta $\lambda_1 = \lambda_2 = \ell^{-1}$. Le relazioni (61.14) diventano

$$61.13 \quad \begin{cases} a = m\ell^4, \\ b_0 = 2m\ell^3, \\ c_0 = m^2\ell^2, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 2m\ell^2, \\ c_1 = 2m\ell; \end{cases} \quad (61.17)$$

così che la (61.13) dà

$$\begin{aligned} 0 &= m\ell^3\lambda^2 - 2(m\ell + \alpha)\lambda + (m\ell + 2\alpha) \\ &= (m\ell^2\lambda - m\ell - 2\alpha)(\ell\lambda - 1), \end{aligned} \quad (61.18)$$

che individua due rette, una verticale e una obliqua di pendenza $m\ell^2/2$, che si intersecano nel punto $(\lambda, \alpha) = (\omega_\infty^2, 0)$; cfr. la figura 61.7.

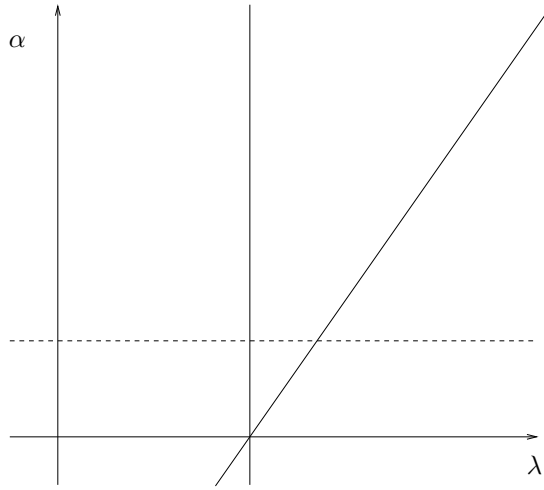


FIGURA 61.7. Piano (λ, α) nel caso di pendoli accoppiati identici.

sec.62

62. Piccole oscillazioni per sistemi vincolati

p.62.1

62.1. Introduzione.

p.62.2

62.2. DEFINIZIONE (RIGIDITÀ). Consideriamo due sistemi lagrangiani a n gradi di libertà S e S' nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, che abbiano la stessa energia cinetica

62.1

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q) \dot{q} \rangle, \quad (62.1)$$

ed energia potenziale, rispettivamente,

62.2

$$U = \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle, \quad U' = \frac{1}{2} \langle q, B'q \rangle. \quad (62.2)$$

Diremo che il sistema S' è più rigido del sistema S se

$$62.3 \quad U = \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle \leq U' = \frac{1}{2} \langle q, B'q \rangle, \quad (62.3)$$

per ogni $q \in \mathbb{R}^n$.

p.62.3 **62.3. Osservazione.** Se consideriamo la struttura euclidea definita dall'energia cinetica, i.e. se scegliamo coordinate tali che la (62.1) divenga

$$62.4 \quad T = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle, \quad (62.4)$$

possiamo associare a ogni sistema di energia potenziale (62.2) un ellissoide $\mathcal{E}$ definito come

$$62.5 \quad \mathcal{E} = \{q \in \mathbb{R}^n : \langle q, Bq \rangle = 1\}. \quad (62.5)$$

p.62.4 **62.4. LEMMA.** Se il sistema S' è più rigido del sistema S , i.e. se vale la (62.3), l'ellissoide $\mathcal{E}'$ associato a S' giace dentro l'ellissoide $\mathcal{E}$ associato a S .

p.62.5 **62.5. Dimostrazione del lemma 62.4.** Fissata una direzione ξ , se indichiamo con $q = |q|\xi$ con $q' = |q'|\xi$ i punti degli ellipsoidi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$, rispettivamente, nella direzione ξ , la condizione $\langle q, Bq \rangle = 1 = \langle q', B'q' \rangle$ implica $|q'| \leq |q|$, come conseguenza della (62.3). ■

p.62.6 **62.6. LEMMA.** Nella base in cui l'energia cinetica è data dalla (62.4), le lunghezze dei semiassi principali di un ellissoide $\mathcal{E}$ sono uguali agli inversi delle frequenze proprie, i.e. $a_i = \omega_i^{-1}$, $i = 1, \dots, n$.

p.62.7 **62.7. Dimostrazione del lemma 62.6.** Nella base in cui l'energia cinetica è data dalla (62.4), gli assi principali dell'ellissoide sono diretti lungo gli autovettori di B , e la forma quadratica associata all'energia potenziale assume la forma

$$62.6 \quad \langle q, Bq \rangle = \lambda_1 q_1^2 + \dots + \lambda_n q_n^2 = 1, \quad (62.6)$$

dove $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sono gli autovalori della matrice B ; quindi i semiassi principali hanno lunghezza $a_i = 1/\sqrt{\lambda_i} = 1/\omega_i$. ■

p.62.8 **62.8. TEOREMA.** Siano S il sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ e S' il sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}_V(q, \dot{q})$ che si ottiene da $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ attraverso l'imposizione del vincolo olonomo regolare $G(q) = 0$. Sia $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ una posizione d'equilibrio stabile per il sistema S compatibile con il vincolo, i.e. $G(0) = 0$: quindi $(0, 0)$ è una posizione d'equilibrio stabile anche per il sistema S' . Allora il sistema linearizzato corrispondente a S' si ottiene dalla lagrangiana quadratica $\mathcal{L}_2(q, \dot{q})$ di S , imponendo il vincolo che si ottiene linearizzando $G(q) = 0$.

p.62.9 **62.9. Dimostrazione del teorema 62.8.** Si deve avere $\nabla G(0) \neq 0$ (cfr. la definizione 35.9), quindi possiamo assumere (rinumerando eventualmente le coordinate) che sia

$[\partial G/\partial q_n](0) \neq 0$. La linearizzazione di $G(q) = 0$ dà

$$62.7 \quad q_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{c_n} q_i + O(q^2), \quad (62.7)$$

dove $c_i = [\partial G/\partial q_i](0)$ per $i = 1, \dots, n$ e $c_n \neq 0$; inoltre, per il teorema della funzione implicita, possiamo sempre esprimere q_n in funzione delle altre coordinate $q_1, \dots, q_{n-1}$. La lagrangiana, una volta introdotto il vincolo, diventa quindi

$$62.8 \quad \mathcal{L}_V(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q', q_n(q'), \dot{q}', \dot{q}_n(q', \dot{q}')), \quad (62.8)$$

dove si è posto $q' = (q_1, \dots, q_{n-1})$, così che $q = (q', q_n)$ (si noti che $q' \in \mathbb{R}^{n-1}$). Dalla (62.7) otteniamo

$$62.9 \quad \dot{q}_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{c_n} \dot{q}_i, \quad (62.9)$$

al primo ordine: quindi che la parte quadratica di $\mathcal{L}_V$ è data da

$$62.10 \quad \mathcal{L}_{V2}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}_2(q', q_n^L(q'), \dot{q}', \dot{q}_n^L(q', \dot{q}')), \quad (62.10)$$

dove $q_n^L(q')$ e $\dot{q}_n^L(q', \dot{q}')$ sono date dalle (62.7) – senza i termini non lineari – e (62.9), che sono le approssimazioni lineari di $q_n(q')$ e $\dot{q}_n(q', \dot{q}')$. La verifica è immediata. ■

p.62.10 **62.10. Osservazione.** Sia $\mathcal{V}^{n-1}$ un sottospazio di dimensione $n-1$ di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo il sistema S' con $n-1$ gradi di libertà che ha energia cinetica e potenziale date dalle restrizioni di T e U a $\mathcal{V}^{n-1}$, se T e U sono l'energia cinetica e potenziale del sistema S a n gradi di libertà. Il sistema linearizzato, ottenuto come prescritto dal teorema 62.8, avrà $n-1$ frequenze proprie, che indicheremo con $\omega'_1, \dots, \omega'_{n-1}$. Se $\mathcal{E}$ è l'ellissoide associato a S , avremo che al sistema S' è associato un ellissoide $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1}$.

p.62.10a **62.11. Osservazione.** Ogni sottospazio $\mathcal{V}^k$ di dimensione $k < n$ di $\mathbb{R}^n$ si può immaginare come un iperpiano passante per l'origine, generato da k vettori linearmente indipendenti.

p.62.11 **62.12. LEMMA (PRINCIPIO DEL MINIMAX).** Ogni sezione dell'ellissoide $\mathcal{E}$ a semiassi di lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ con un sottospazio k -dimensionale $\mathcal{V}^k$ individua un ellissoide $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$. Comunque sia scelto $\mathcal{V}^k$, si ha

$$62.11 \quad a_k = \max_{\mathcal{V}^k} \min_{x \in \mathcal{E}_k} |x|, \quad (62.11)$$

il massimo essendo raggiunto se si sceglie come $\mathcal{V}^k$ il sottospazio generato dai k vettori diretti lungo gli assi principali di lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$, i.e. la lunghezza del semiasse più piccolo di $\mathcal{E}_k$ è minore o uguale ad a_k .

p.62.12 **62.13. Dimostrazione del lemma 62.12.** Consideriamo il sottospazio $\mathcal{V}^{n-k+1}$ individuato dai semiassi di lunghezza $a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$. Poiché la sua dimensione è

$n - k + 1$, si ha $\mathbb{R}^{n-k+1} \cap \mathcal{V}^k \neq \emptyset$. Sia $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-k+1} \cap \mathcal{V}^k$: poiché $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-k+1}$, deve essere $|x| \leq a_k$, e poiché $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$, deve essere $|x|$ più grande della lunghezza b_k del più piccolo semiasse di $\mathcal{E}_k$, i.e. $|x_k| \geq b_k \equiv \min_{x \in \mathcal{E}_k} |x|$. Quindi $a_k \geq b_k$. Se in particolare scegliamo $\mathcal{V}^k$ come il sottospazio $\mathcal{V}^k$ individuato dai semiassi di lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$, si ha, per $x \in \mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$, $\min_{x \in \mathcal{E}_k} |x| = a_k$. Da qui segue la (62.11). ■

62.14. LEMMA. *Se l'ellissoide $\mathcal{E}$ con semiassi di lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ contiene l'ellissoide con semiassi di lunghezza $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_n$ che ha lo stesso centro, allora*

$$a_1 \geq a'_1, \quad a_2 \geq a'_2, \quad \dots \quad a_n \geq a'_n, \quad (62.12)$$

i.e. le lunghezze di tutti i semiassi dell'ellissoide interno sono minori di quelle dei semiassi corrispondenti dell'ellissoide esterno.

62.15. Dimostrazione del lemma 62.14. Dato un qualsiasi sottospazio $\mathcal{V}^k$ di dimensione k , la lunghezza b'_k del più piccolo semiasse dell'ellissoide $\mathcal{E}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^k$ è minore della lunghezza b_k del più piccolo semiasse di $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$, i.e. $b'_k \leq b_k$; cfr. l'esercizio 4. Quindi, considerando il massimo su $\mathcal{V}^k$,

$$a'_k = \max_{\mathcal{V}^k} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| \leq \max_{\mathcal{V}^k} \min_{x \in \mathcal{E}_k} |x| = a_k, \quad (62.13)$$

per la (62.11). Quindi segue la (62.12). ■

62.16. TEOREMA. *Consideriamo l'intersezione dell'ellissoide $\mathcal{E}$ con semiassi di lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ con un sottospazio $\mathcal{V}^{n-1}$ di dimensione $n-1$, e indichiamola con $\mathcal{E}'$. Allora, se $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_{n-1}$ sono le lunghezze dei semiassi di $\mathcal{E}'$, si ha*

$$a_1 \geq a'_1 \geq a_2 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_{n-1} \geq a_n, \quad (62.14)$$

i.e. le lunghezze dei semiassi dell'ellissoide $\mathcal{E}'$ separano quelle dei semiassi di $\mathcal{E}$.

62.17. Dimostrazione del teorema 62.16. La disuguaglianza $a'_k \leq a_k$ segue dal lemma 62.12, poiché

$$a'_k = \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| \leq \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \mathcal{E}_k} |x| = a_k, \quad (62.15)$$

dove $\mathcal{E}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^k$ e $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$. Infatti, per $\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}$ si ha $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}'_k$, e quindi per calcolare a_k il massimo è fatto su un insieme più grande che per calcolare a'_k .

Per dimostrare che $a'_k \geq a_{k+1}$, consideriamo l'intersezione di $\mathcal{V}^{n-1}$ con un sottospazio $\mathcal{V}^{k+1}$ di dimensione $k+1$. La dimensione d di $\mathcal{V}^{n-1} \cap \mathcal{V}^{k+1}$ è non più piccola di k : se $\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}$ si ha $d = k+1$, mentre se $\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{V}^k \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}^{n-1})$ si ha $d = k$. Inoltre la lunghezza $\tilde{b}'_k$ del semiasse più piccolo di $\tilde{\mathcal{E}}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^{k+1}$ è maggiore della lunghezza b_{k+1} del semiasse più piccolo $\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{k+1}$, poiché

$$b_{k+1} = \min_{x \in \mathcal{E}_{k+1}} |x| \leq \min_{x \in \mathcal{E}_{k+1} \cap \mathcal{V}^{n-1}} |x| = \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| = \tilde{b}'_k, \quad (62.16)$$

dove si è usato che si ha $\mathcal{E}_{k+1} \cap \mathcal{V}^{n-1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{k+1} \cap \mathcal{V}^{n-1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1} \cap \mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^{k+1} = \tilde{\mathcal{E}}'_k$ e la disuguaglianza segue dal fatto che, nella definizione di $\tilde{b}'_k$ il minimo è preso su un insieme più piccolo.

Quindi per il lemma 62.12 si ha

$$62.17 \quad \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| \geq \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \mathcal{E}_{k+1}} |x| = a_{k+1}. \quad (62.17)$$

Inoltre se $\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{V}^k \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}^{n-1})$ si ha $\mathcal{E}'_k = \tilde{\mathcal{E}}'_k$, poiché $\tilde{\mathcal{E}}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1} \cap \mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1} \cap \mathcal{V}^k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^k = \mathcal{E}'_k$, mentre se $\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}$ sia ha $\mathcal{E}'_k \subset \tilde{\mathcal{E}}'_k$, dove l'inclusione vale con il segno stretto (i.e. $\tilde{\mathcal{E}}'_k \neq \mathcal{E}'_k$), poiché $\tilde{\mathcal{E}}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^{k+1}$ e $\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}$. Quindi

$$62.17a \quad \begin{aligned} \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| &= \max \left\{ \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x|, \max_{\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{V}^k \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}^{n-1})} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x|, \max_{\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{V}^k \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}^{n-1})} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| \right\} \end{aligned} \quad (62.18)$$

e risulta

$$62.17b \quad \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| \leq \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| = \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x|, \quad (62.19)$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che il minimo è calcolato su un insieme $\mathcal{E}'_k$ più piccolo di $\tilde{\mathcal{E}}'_k$ e la successiva uguaglianza dal fatto che si può cambiare $\mathcal{V}^{k+1} \setminus \mathcal{V}^k$ senza alterare $\mathcal{E}'_k$. In conclusione si ha

$$62.18 \quad \begin{aligned} \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| &\leq \max \left\{ \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x|, \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| \right\} \\ &\leq \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| = a'_k, \end{aligned} \quad (62.20)$$

dove si è utilizzato di nuovo il lemma 62.12. Dalle (62.17) e (62.20) segue quindi che si ha $a'_k \geq a_{k+1}$. ■

p.62.16a **62.18. Osservazione.** La dimostrazione del teorema 62.16 diventa banale se $n = 2$. In tal caso l'intersezione dell'ellissoide $\mathcal{E}$ di semiassi $a_1 \geq a_2$ con un sottospazio di dimensione 1 (i.e. con una retta) dà due punti antipodali sull'ellisse, la cui distanza dall'origine è compresa tra la lunghezza del semiasse maggiore e quella del semiasse minore.

p.62.17 **62.19. TEOREMA.** Se consideriamo due sistemi S e S' , con S' più rigido di S , si ha allora

$$62.19 \quad \omega_1 \leq \omega'_1, \quad \omega_2 \leq \omega'_2, \quad \dots \quad \omega_n \leq \omega'_n, \quad (62.21)$$

se $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ sono le frequenze proprie di S e $\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_n$ sono le frequenze proprie di S' .

p.62.18 **62.20.** *Dimostrazione del teorema 62.19.* Segue dal lemma 62.14, tenendo conto del lemma 62.4 e del lemma 62.6. ■

p.62.19 **62.21.** *Osservazione.* Il teorema 62.19 si può interpretare dicendo che se aumentiamo la rigidità di un sistema meccanico, le frequenze proprie aumentano. Analogamente, attraverso considerazioni di similitudine, possiamo concludere che, se aumentiamo l'energia cinetica, senza cambiare l'energia potenziale del sistema, le frequenze proprie diminuiscono.

p.62.20 **62.22.** TEOREMA (RAYLEIGH-COURANT-FISHER). *Le frequenze proprie del sistema vincolato S' ottenuto dal sistema S con frequenze proprie $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ sono tali che*

$$62.20 \quad \omega_1 \leq \omega'_1 \leq \omega_2 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_{n-1} \leq \omega_n, \quad (62.22)$$

se $\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_{n-1}$ sono le frequenze proprie di S' .

p.62.21 **62.23.** *Dimostrazione del teorema 62.21.* Segue dal teorema 62.16, tenendo conto del lemma 62.6. ■

p.62.22 **62.24.** *Osservazione.* Nell'esempio dei due pendoli accoppiati discusso in §61.5, se consideriamo il limite $\alpha \rightarrow \infty$ (rigidità che tende all'infinito), otteniamo un sistema vincolato con un solo grado di libertà: la frequenza propria ω_∞ del sistema risultante, data dalla (61.15), soddisfa la relazione $\omega_1 \leq \omega_\infty \leq \omega_2$ consistentemente con il teorema 62.22.

Nota bibliografica

Per i paragrafi §61 e §62, abbiamo seguito essenzialmente [Arnol'd 2], Cap. V.

Esercizi

Esercizio 1. Si dimostri che l'equazione matriciale (60.18) corrisponde alle n equazioni vettoriali (60.15).

Esercizio 2. Si dimostrino le equazioni (61.14). [*Suggerimento.* Definendo $\varepsilon = (\omega_2 - \omega_1)/2$ e $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$ si può scrivere $\omega_1 = \omega - \varepsilon$ e $\omega_2 = \omega + \varepsilon$. Quindi, sviluppando $1/\omega_2 = 1/(\omega + \varepsilon) = 1/\omega (1 + \varepsilon/\omega)^{-1} = 1/\omega (1 - \varepsilon/\omega + \varepsilon^2/\omega^2 - \dots)$, si possono utilizzare le identità trigonometriche $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, per riscrivere $\sin t \pm \sin \omega_2 t = \sin(\omega t - \varepsilon t) \pm \sin(\omega t + \varepsilon t)$.]

Esercizio 3. Dimostrare che l'equazione (6.10) descrive un'iperbole, e verificare le proprietà descritte dopo la (61.14). [*Suggerimento.* La (6.10) è un'equazione della forma (31.61): il discriminante

corrispondente è allora dato da $\Delta = B^2 = b_1^2$ ed è quindi strettamente positivo. Possiamo inoltre rendere esplicita in (6.10) la dipendenza di α da λ , ottenendo $\alpha = (b_1\lambda - c_1)^{-1}(a\lambda^2 - b_0\lambda + c_0)$: quindi α in funzione di λ ha un asintoto verticale per $\lambda = c_1/b_1$ e un asintoto obliquo con pendenza a/b_1 che interseca l'asse α in $\alpha = b_1^{-2}(ac_1 - b_0b_1)$ e l'asse λ in $\lambda = (ab_1)^{-1}(b_0b_1 - ac_1)$.]

Esercizio 4. Siano $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{E}'$ due ellissoidi, con $\mathcal{E}'$ contenuto all'interno di $\mathcal{E}$, e sia $\mathcal{V}^k$ un qualsiasi sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Definiamo $\mathcal{E}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^k$ e $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$, e indichiamo con b_k e $b_{k'}$ i più piccoli semiasse di $\mathcal{E}_k$ e, rispettivamente, $\mathcal{E}'_k$. Dimostrare che risulta $b_{k'} \leq b_k$. [Soluzione. Sia b_k la lunghezza del semiasse più piccolo di $\mathcal{E}_k$ e sia ξ la sua direzione: quindi $b_k\xi \in \mathcal{E}$. Se $b_{k'}$ è la lunghezza del più piccolo semiasse di $\mathcal{E}'_k$ allora per ogni $q' \in \mathcal{E}'_k$ si ha $b_{k'} \leq |q'|$; inoltre, se si sceglie $q' = |q'|\xi$ si ha $|q'| \leq b_k$ poiché $\mathcal{E}'$ è interno a $\mathcal{E}$.]

Esercizio 5. Un'asta di lunghezza infinita e massa nulla è vincolata a ruotare in un piano verticale intorno a un punto fisso O . Sull'asta, a distanza ℓ da O , è posto un punto P_1 di massa m_1 . Un punto P_2 di massa m_2 può scorrere lungo l'asta ed è attratto al punto O da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Tra i parametri sussiste la relazione

$$m_2^2 g = 2m_1 k \ell,$$

dove g è la costante di gravità.

- (1) Scrivere la lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'angolo θ che l'asta forma con la verticale passante per O e la coordinata s che individua la posizione del punto P_2 lungo l'asta.
- (2) Determinare le posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3) Discutere le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile, se esistente.

Esercizio 6. Un punto materiale P di massa $m = 1$ è vincolato a muoversi su un piano lungo una guida di equazione $x = y^2 + 2$. Un disco omogeneo di raggio $R = 1$ e massa $M = 1$ può ruotare intorno al suo centro O , coincidente con l'origine del sistema di riferimento (x, y) .

Il punto P è collegato a un punto Q del bordo del disco tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla; cfr. la figura 62.1.

- (1) Utilizzando come coordinate lagrangiane l'ordinata y del punto P e l'angolo θ che il raggio vettore OQ forma con l'asse x , scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni d'equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.
- (3) Discutere le piccole oscillazioni del sistema intorno a una posizione d'equilibrio stabile e risolvere esplicitamente le equazioni del moto nell'approssimazione delle piccole oscillazioni.
- (4) Se, partendo dalla configurazione $(\theta, y) = (0, 0)$, il disco è lasciato libero di muoversi nel piano, determinare il tempo t_0 che esso impiega per toccare con il bordo il punto P .
- (5) Supponendo che di nuovo il centro del disco sia vincolato in O , determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto P nella configurazione $(\theta, y) = (0, 0)$.

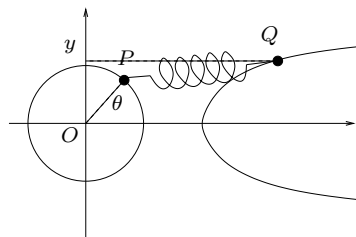


FIGURA 62.1. Sistema considerato nell'esercizio 6.

Esercizio 7. Due punti materiali P_1 e P_2 , entrambi di massa $m_1 = m_2 = 1$, sono vincolati a muoversi su una circonferenza di raggio $r = 1$, posta su un piano orizzontale π . I due punti

interagiscono tramite una forza elastica di costante $k > 0$. Un terzo punto P_3 può muoversi lungo una retta passante per un diametro d fissato della circonferenza: il punto P_3 è collegato, tramite due molle, entrambe di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, a un punto Q posto in corrispondenza di uno degli estremi del diametro d e al punto R che è il punto di mezzo dell'arco che unisce i due punti P_1 e P_2 (con P_1 successivo a P_2 muovendosi in senso antiorario sulla circonferenza); cfr. la figura 62.2.

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. [Si considerino come coordinate lagrangiane di partenza la posizione di P_3 lungo d e gli angoli θ_1 e θ_2 che i due raggi vettori OP_1 e OP_2 , rispettivamente, formano con d (se O è il centro della circonferenza): trovare quindi delle coordinate lagrangiane più convenienti.]
- (2) Trovare le posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3) Verificare che la configurazione in cui $P_1 = P_2 = P_3 = Q$ è una posizione d'equilibrio stabile e discutere le piccole oscillazioni intorno a tale posizione.

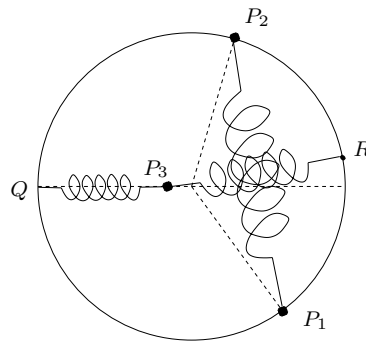


FIGURA 62.2. Sistema considerato nell'esercizio 7.

Esercizio 8. Due punti P_1 e P_2 , di massa $m_1 = m_2 = 1$, sono vincolati a muoversi sul piano verticale $\pi = (x, y)$. Il punto P_1 può solo muoversi lungo l'asse x ed è collegato all'origine O tramite una molla di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k ; il punto P_2 è collegato al punto P_1 tramite una sbarra lineare indeformabile omogenea di massa $m = 1$ e di lunghezza ℓ , e al punto O tramite una molla, anch'essa di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k . Sul sistema agisce la forza peso (sia g la costante di gravità). [Si usino come variabili lagrangiane le coordinate (s, φ) , dove s indica la distanza di P_1 da O , e φ è l'angolo (misurato in senso antiorario) che la sbarra forma con una direzione verticale prefissata].

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
- (2) Individuare le configurazioni d'equilibrio del sistema e discuterne la stabilità al variare dei valori dei parametri $\ell, k > 0$ e $g \geq 0$. [Nella discussione della stabilità delle posizioni d'equilibrio si trascurino i casi in cui l'analisi al secondo ordine non è sufficiente.]
- (3) Discutere le piccole oscillazioni nell'intorno di un punto d'equilibrio stabile (se esiste) in corrispondenza dei valori dei parametri $k = \ell = 1$ e $g = 0$ (nelle rispettive unità di misura):
 - (3.1) scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni e le corrispondenti equazioni del moto;
 - (3.2) trovare le frequenze delle piccole oscillazioni;
 - (3.3) trovare esplicitamente la soluzione delle equazioni del moto in funzione dei dati iniziali.]
- (4) Come al punto (3), nel caso in cui i valori dei parametri siano $k = \ell = 1$ e $g = 2$:
 - (4.1) scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni e le corrispondenti equazioni del moto;
 - (4.2) trovare le frequenze delle piccole oscillazioni;
 - (4.3) trovare esplicitamente la soluzione delle equazioni del moto in funzione dei dati iniziali.
- (5) Nell'ipotesi che il piano π ruoti con velocità angolare costante ω intorno all'asse y , individuare le nuove posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità.

Esercizio 9. Si consideri un pendolo doppio costituito da due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1 = m_2 = 1$ vincolati a muoversi in un piano verticale, il primo a distanza $\ell_1 = 1$ dal punto fisso

114 CAPITOLO 14. TEORIA DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

O e il secondo a distanza $\ell_2 = 1$ dal punto P_1 (cfr. l'esercizio 6 del Capitolo 11). Si utilizzino come coordinate lagrangiane gli angoli φ_1 e φ_2 che le rette condotte per i punti O, P_1 e P_1, P_2 , rispettivamente, formano con la verticale discendente. Inoltre il punto P_2 è collegato al punto O da una molla di costante elastica $k = 1$ e lunghezza a riposo trascurabile. Sia g la costante di gravità.

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
- (2) Per $g = 0$ individuare la simmetria del sistema e il momento conservato, e indicare il procedimento da seguire per integrare il sistema utilizzando le quantità conservate.
- (3) Per $g > 3/2$ dimostrare che la configurazione $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ è di equilibrio stabile.
- (4) Nelle condizioni del punto (3) discutere il moto del sistema nell'approssimazione di piccole oscillazioni.
- (5) Per $g = 2$, nell'approssimazione di piccole oscillazioni, determinare le forze vincolari che agiscono sul punto P_1 all'istante $t = 1$ se il dato iniziale è $(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dot{\varphi}_1(0), \dot{\varphi}_2(0)) = (0, a, 0, 0)$ con $a \in \mathbb{T}$.

Esercizio 10. Alla luce dell'osservazione 62.18, interpretare geometricamente la dimostrazione del Teorema 62.16 per $n = 3$.