Capitolo 15. Moto dei corpi rigidi pesanti

sec.63 63. Trottola di Lagrange

p.63.1 **63.1. Introduzione.** Consideriamo un sistema rigido di massa m vincolato a un punto fisso O e soggetto all'azione della forza peso $m\mathbf{g}$ (o di un'altra forza che risulti invariante per rotazioni intorno all'asse verticale). Il problema ha tre gradi di libertà, e ammette due integrali primi, l'energia $E = T + U$ (dove T è l'energia cinetica e U è l'energia potenziale), e la componente l_z del momento della quantità di moto lungo l'asse $\mathbf{e}_z$ (come conseguenza dell'invarianza per rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_z$, per il teorema di Noether).

p.63.2 **63.2.** DEFINIZIONE (TROTTOLA SIMMETRICA O DI LAGRANGE). *Si chiama* trottola simmetrica *(o* trottola di Lagrange*) un sistema rigido vincolato a un punto fisso e sottoposto a una forza di energia potenziale simmetrica rispetto all'asse verticale, il cui ellissoide d'inerzia sia un ellissoide di rotazione e il cui centro d'inerzia si trovi sull'asse di rotazione. Se l'energia potenziale è quella gravitazionale, la trottola simmetrica viene chiamata* trottola pesante.

p.63.3 **63.3.** *Osservazione.* Nel caso di una trottola di Lagrange, una rotazione intorno all'asse di rotazione $\mathbf{e}_3$ non cambia la lagrangiana, e quindi deve esistere, per il teorema di Noether, un ulteriore integrale primo (oltre a l_z ed E).

p.63.4 **63.4.** TEOREMA. *Gli angoli di Eulero (φ, θ, ψ) costituiscono un sistema di coordinate per la trottola di Lagrange, in cui le coordinate φ e ψ sono cicliche.*

p.63.5 **63.5.** *Dimostrazione del teorema 63.4.* La lagrangiana della trottola di Lagrange è invariante per rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_z$ e per rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_3$. Poiché gli angoli φ e ψ rappresentano, rispettivamente, proprio una rotazione intorno all'asse $\mathbf{e}_z$ e una rotazione intorno all'asse $\mathbf{e}_3$, per il teorema di Noether le coordinate φ e θ devono essere cicliche. ■

p.63.6 **63.6.** *Osservazione.* Come conseguenza del teorema 63.4 il problema del moto della trottola di Lagrange, che *a priori* avrebbe tre gradi di libertà, si riduce a un problema con un solo grado di libertà (per la coordinata θ). Si noti che lo stesso risultato vale se l'energia potenziale gravitazionale (corrispondente alla forza peso) è sostituita da una qualsiasi altra energia potenziale invariante per rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_z$ (o in generale intorno a un qualsiasi asse prefissato, che può quindi essere scelto come asse $\mathbf{e}_z$).

p.63.7 **63.7.** LEMMA. *Se la forza a cui è sottoposta la trottola di Lagrange di massa m è la forza peso $m\mathbf{g}$, allora l'energia potenziale, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da*

63.1
$$U \equiv U(\theta) = mg\ell \cos\theta, \tag{63.1}$$

dove ℓ è la distanza dal punto fisso O del centro d'inerzia (baricentro) della trottola, e $g = \|\mathbf{g}\|$.

p.63.8 **63.8.** *Dimostrazione del lemma 63.7.* Segue dalla definizione di energia potenziale per sistemi conservativi e dalla definizione dell'angolo θ. ■

p.63.9 **63.9.** LEMMA. *L'energia cinetica della trottola di Lagrange, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da*

63.2
$$T = \frac{I_1}{2}\big(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\big) + \frac{I_3}{2}\big(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\big)^2, \tag{63.2}$$

dove $I_1 = I_2$ e I_3 sono gli assi d'inerzia principali della trottola.

p.63.10 **63.10.** *Dimostrazione del lemma 63.9.* Segue dal corollario 43.10. Si noti che l'energia cinetica non deve dipendere da φ e ψ, per il teorema di Noether, dato che φ e ψ, per il teorema 63.4, sono variabili cicliche. ■

p.63.14 **63.11.** TEOREMA. *La lagrangiana della trottola di Lagrange, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da*

63.8
$$\mathbf{L} = \frac{I_1}{2}\big(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\big) + \frac{I_3}{2}\big(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\big)^2 - mg\ell\cos\theta, \tag{63.3}$$

con le notazioni del lemma 63.7 e del lemma 63.9.

p.63.15 **63.12.** *Dimostrazione del teorema 63.11.* Segue dal lemma 63.7 e dal lemma 63.9, e dalla definizione di lagrangiana $\mathbf{L} = T - U$. ■

p.63.16 **63.13.** COROLLARIO. *Alle coordinate cicliche φ e ψ corrispondono gli integrali primi*

63.9
$$l_z = \dot\varphi\big(I_1 \sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\big) + \dot\psi I_3 \cos\theta, \qquad L_3 = \dot\varphi I_3 \cos\theta + \dot\psi I_3, \tag{63.4}$$

che esprimono le componenti del momento della quantità di moto, rispettivamente, lungo l'asse $\mathbf{e}_z$ e lungo l'asse $\mathbf{e}_3$.

p.63.17 **63.14.** *Dimostrazione del corollario 63.13.* Poiché le coordinate φ e ψ sono cicliche, per il teorema di Noether, i momenti $\partial\mathbf{L}/\partial\dot\varphi$ e $\partial\mathbf{L}/\partial\dot\psi$ si conservano. Per calcolo esplicito a partire dalla (63.3) si trova che

63.10
$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\dot\varphi} = l_z, \qquad \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\dot\psi} = L_3, \tag{63.5}$$

se l_z e L_3 sono definiti come in (63.4). ■

p.63.18 **63.15.** TEOREMA. *L'inclinazione θ dell'asse della trottola rispetto alla verticale varia nel tempo come nel sistema unidimensionale di energia*

63.11
$$E' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\mathrm{eff}}(\theta), \tag{63.6}$$

dove

63.12
$$U_{\mathrm{eff}}(\theta) = \frac{(l_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mg\ell\cos\theta, \tag{63.7}$$

prende il nome di energia potenziale efficace.

p.63.19 **63.16.** *Dimostrazione del teorema 63.15.* Esprimendo, in $\mathbf{L}$, $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ in termini degli integrali primi l_z e L_3, troviamo che l'energia del sistema descritto dalla lagrangiana (63.3) si può scrivere

63.13
$$E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{L_3^2}{2I_3} + \frac{(l_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mg\ell\cos\theta, \tag{63.8}$$

così che, definendo

63.14
$$E' = E - \frac{L_3^2}{2I_3}, \tag{63.9}$$

si ottiene la (63.6). ■

p.63.20 **63.17.** *Osservazione.* Il sistema unidimensionale con energia (63.6) soddisfa le equazioni di Lagrange corrispondenti alla lagrangiana

63.15
$$\mathbf{L}_0 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - U_{\mathrm{eff}}(\theta), \tag{63.10}$$

come si può ottenere a partire dalla (63.3) applicando il metodo di Routh (cfr. §3 del capitolo sulla meccanica lagrangiana).

p.63.21 **63.18.** LEMMA. *La legge di variazione dell'angolo azimutale φ è data da*

63.16
$$\dot{\varphi} = \frac{l_z - L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}, \tag{63.11}$$

dove l_z e L_3 sono gli integrali primi in (63.4).

p.63.22 **63.19.** *Dimostrazione del lemma 63.18.* Segue dalle definizioni di l_z e L_3 in (63.4), moltiplicando la seconda delle (63.4) per $\cos\theta$ e quindi considerandone la differenza con la prima. ■

p.63.23 **63.20.** *Osservazione.* La funzione $\mathbf{L}_0$ in (63.10) è singolare in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Tuttavia la funzione $\theta(t)$, tale che $(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$ individua la configurazione della trottola all'istante t, non presenta singolarità in corrispondenza degli istanti in cui l'asse di simmetria della trottola $\mathbf{e}_3$ viene a trovarsi in posizione verticale, *i.e.* parallelo a $\mathbf{e}_z$.

Questa apparente contraddizione si risolve tenendo conto che l_z e L_3 in (63.4) sono integrali primi, e $\mathbf{L}_0$ descrive il moto in corrispondenza dei valori l_z e L_3 fissati dalla componente del momento della quantità di moto lungo gli assi $\mathbf{e}_z$ ed $\mathbf{e}_3$. Quindi, se i dati iniziali sono tali che $|l_z| \neq |L_3|$, si deve avere $\theta(t) \neq 0$ e $\theta(t) \neq \pi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e pertanto la singolarità di $\mathbf{L}_0$ è fuori della regione in cui si svolge il moto. Se al contrario $l_z = L_3$, $\mathbf{L}_0$ assume la forma

63.17
$$\mathbf{L}_0 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - \frac{L_3^2 (1 - \cos\theta)^2}{2 I_1 \sin^2\theta} - mg\ell \cos\theta, \tag{63.12}$$

dove la funzione

63.18
$$\frac{L_3^2 (1 - \cos\theta)^2}{2 I_1 \sin^2\theta} \tag{63.13}$$

è regolare (differenziabile) anche in $\theta = 0$, così che $\mathbf{L}_0$ è non singolare anche in $\theta = 0$. Si noti che, in corrispondenza degli istanti t_0 tali che $\theta(t_0) = 0$, gli angoli $\varphi(t_0)$ e $\psi(t_0)$ non sono definiti (cfr. l'osservazione 43.5). Tuttavia $\theta(t)$ è regolare anche in $t = t_0$, e quindi, utilizzando la soluzione $\theta(t)$ in (63.4), si determinano $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ che saranno regolari anche in $t = t_0$, tali che $\varphi(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(t_0 + \varepsilon)$ e $\psi(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \psi(t_0 + \varepsilon)$, se $\theta(t) \neq 0$ per $t - t_0 \neq 0$ e sufficientemente piccolo, e i limiti vengono presi lungo la traiettoria.

Analogamente può essere discusso il caso $l_z = -L_3$: $\mathbf{L}_0$ assume allora la forma

63.18*a*
$$\mathbf{L}_0 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - \frac{L_3^2 (1 + \cos\theta)^2}{2 I_1 \sin^2\theta} - mg\ell \cos\theta, \tag{63.14}$$

e, ragionando come per la (63.12), si trova facilmente che $\mathbf{L}_0$ è non singolare anche in $\theta = \pi$. Di nuovo, se t_0 è l'istante in cui $\theta(t_0) = \pi$, gli angoli $\varphi(t_0)$ e $\psi(t_0)$ possono essere definiti come limiti lungo le traiettorie.

*p.*63.24 **63.21.** *Osservazione.* Notando che le (63.4) si possono scrivere

63.19
$$\dot{\varphi} = \frac{l_z - L_3 \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}, \qquad \dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_3}{I_1} + \frac{L_3 - l_z \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}, \tag{63.15}$$

si vede che, se i dati iniziali sono tali che $l_z = L_3$, allora

63.19*a*
$$\dot{\varphi} = \frac{L_3}{I_1 (1 + \cos\theta)}, \qquad \dot{\psi} = L_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_1 (1 + \cos\theta)} \right), \tag{63.16}$$

così che, per $\theta = 0$,

63.19*b*
$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\varphi + \psi) = \frac{L_3}{I_3} = \Omega_3, \tag{63.17}$$

coerentemente con il fatto che, se $\theta = 0$, l'angolo di rotazione è $\varphi+\psi$, e la componente del momento della quantità di moto lungo l'asse di rotazione è L_3. Analogamente si può discutere il caso $l_z = -L_3$.

p.63.25 **63.22. Studio del sistema unidimensionale di energia (63.6).** È conveniente introdurre la variabile $u = \cos\theta$, con $u \in [-1,1]$. Poniamo anche

63.20
$$\frac{l_z}{I_1} = a, \qquad \frac{L_3}{I_1} = b, \qquad \frac{2E'}{I_1} = \alpha, \qquad \frac{2mg\ell}{I_1} = \beta, \tag{63.18}$$

così che la legge di conservazione dell'energia ($\dot{E}' = 0$) si può esprimere attraverso l'equazione

63.21
$$\dot{u}^2 = f(u), \qquad f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (a - bu)^2, \tag{63.19}$$

e la legge di variazione della coordinata φ, espressa dalla (63.11), diventa

63.22
$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1-u^2}. \tag{63.20}$$

La funzione $f(u)$ è un polinomio di terzo grado, e si ha $f(\pm\infty) = \pm\infty$. A un moto effettivo corrispondono solo costanti a, b, α, β tali che $f(u) \geq 0$ per qualche $u \in (-1,1)$. Consideriamo quindi il caso in cui esiste almeno un valore u in corrispondenza del quale la funzione $f(u)$ sia positiva.

Notiamo anche che per ottenere la (63.19) si è utilizzato il fatto che $\dot{u}^2 = \dot{\theta}^2 \sin^2\theta$, così che l'uso della (63.19) per descrivere il moto dell'angolo d'inclinazione dell'asse della trottola è giustificato fintanto che si abbia $\sin\theta \neq 0$. Il caso $\sin\theta = 0$ corrisponde a $l_z = \pm L_3$ (*i.e.* $a = \pm b$, in termini dei parametri in (63.18)) e va quindi discusso a parte, utilizzando il fatto che, essendo l_z, L_3 costanti del moto, per lo studio del moto vicino ai poli, si deve tener conto della forma che assume la lagrangiana in tal caso (cfr. l'osservazione 63.20). La legge di conservazione dell'energia dà in tal caso

63.22*a*
$$\dot{\theta}^2 = (\alpha - \beta\cos\theta) - a^2 \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}, \tag{63.21}$$

per $l_z = L_3$, e

63.22*b*
$$\dot{\theta}^2 = (\alpha - \beta\cos\theta) - a^2 \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}, \tag{63.22}$$

per $l_z = -L_3$, avendo tenuto conto delle notazioni (63.18). Le (63.21) e (63.22) sono le equazioni da studiare per determinare il moto dell'asse della trottola nelle vicinanze dei poli. Si noti che il campo vettoriale è regolare in tutta la regione in cui si svolge il moto: infatti se $l_z = \pm L_3$ non può aversi, rispettivamente, $u = \mp 1$.

Consideriamo qui il caso $b \neq 0$ (*i.e.* $L_3 \neq 0$): se $b = 0$ la trattazione in realtà si semplifica, come vedremo nel paragrafo §63.23.

(1) Supponiamo inizialmente che sia $a \neq \pm b$: in tal caso $f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$ e, quindi, $f(u)$ ha una radice reale $u_3 > 1$ e, in corrispondenza di moti per il sistema,

due radici reali nell'intervallo $[-1,1]$, che corrispondono a due radici semplici u_1 e u_2, se distinte, a una radice doppia u_1, se coincidenti.

Nel secondo caso la radice doppia $u_1 = \cos\theta_1$ costituisce l'unico valore u per cui il moto è possibile: corrispondentemente si ha $f(u_1) = 0$ (e $\dot{u} \equiv 0$). Quindi l'asse della trottola si muove lungo il cono di rotazione intorno alla verticale che ha angolo di semiapertura costante θ_1 (il moto si dice allora *moto merostatico*). È immediato riconoscere che il moto si riduce a una precessione regolare; infatti la (63.20) implica che $\dot{\varphi}$ è costante (poiché θ è costante) e dalla seconda delle (63.4) segue che anche $\dot{\psi}$ deve essere costante. Poiché la velocità angolare, tenendo conto che $\dot{\theta} = 0$, è data da $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z + \dot{\psi}\mathbf{e}_3$ (cfr. la (4.13) del capitolo sulla cinematica dei sistemi rigidi), con $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ costanti, concludiamo che la trottola descrive un moto di precessione regolare.

Nel caso di due radici distinte $u_1 = \cos\theta_1$ e $u_2 = \cos\theta_2$, l'asse della trottola varia periodicamente tra i due paralleli individuati dai valori θ_1 e θ_2, corrispondenti, rispettivamente, a u_1 e u_2: se $u_1 < u_2$ si ha $\theta_1 > \theta_2$ (poiché in $[0,\pi)$ la funzione $\cos\theta$ è monotona decrescente).

La variazione periodica dell'inclinazione θ dell'asse della trottola si chiama *nutazione*.

Consideriamo ora il moto dell'asse della trottola lungo l'azimut. Il punto d'intersezione dell'asse con la sfera unitaria (che prende il nome di *vertice della trottola*) si muove in un anello compreso tra i paralleli θ_2 e θ_1, e la variazione dell'azimut è determinata dalla (63.20).

Se la radice u_0 dell'equazione $a - bu = 0$ si trova all'esterno dell'intervallo (u_1, u_2), allora l'angolo φ varia monotonamente e l'asse traccia sulla sfera unitaria una curva qualitativamente di tipo *cicloide accorciata* (in realtà la sua espressione analitica è ben più complicata).

Se la radice u_0 dell'equazione $a - bu = 0$ si trova all'interno dell'intervallo (u_1, u_2) (e quindi in particolare $a/b < 1$), allora le velocità di variazione di φ, rispettivamente, sui paralleli θ_1 e θ_2 sono opposte, e l'asse traccia sulla sfera unitaria una curva con nodi, qualitativamente di tipo *cicloide allungata*

Se infine la radice u_0 dell'equazione $a-bu = 0$ coincide con un estremo dell'intervallo $[u_1, u_2]$, allora l'angolo φ varia monotonamente e l'asse traccia sulla sfera unitaria una curva con cuspidi a tangenza meridiana, qualitativamente di tipo *cicloide*. Notiamo anche che tale eventualità può presentarsi solo sul parallelo superiore θ_2 (corrispondente alla radice maggiore u_2); infatti $\dot{\varphi}$ e $f(u)$ devono annullarsi contemporaneamente, quindi dal confronto delle (63.19) e (63.20) deve risultare simultaneamente $\alpha - \beta u = 0$ e $a - bu = 0$, *i.e.* $u_0 = \alpha/\beta = a/b$, così che

63.22c
$$f(u) = (a - bu)\left[\frac{\beta}{b}(1-u^2) - (a-bu)\right] \equiv (a-bu)\,g(u), \tag{63.23}$$

dove la funzione $g(u)$ ha due radici che coincidono, ovviamente, con u_3 e la seconda radice di $f(u)$ interna all'intervallo $(-1,1)$ e distinta da a/b. Poiché il $g(u)$ tende a $-\infty$ per $u \to \pm\infty$ e $g(a/b) > 0$, la radice di $g(u)$ interna a $(-1,1)$ deve trovarsi a sinistra di a/b, *i.e.* deve essere $u_1 < u_2 = a/b$.

L'ultimo caso, *i.e.* $u_0 = u_2$, sebbene inusuale, si osserva ogni qual volta si lasci andare andare l'asse della trottola lanciata ($\dot{\psi} \neq 0$), senza velocità azimutale iniziale ($\dot{\varphi} = 0$), con un'inclinazione θ_2: la trottola dapprima cade, poi si rialza, e descrive quindi il moto indicato sopra.

Il moto azimutale dell'asse della trottola prende il nome di *precessione*.

In conclusione possiamo dire che il moto risultante della trottola (nel caso in considerazione) consiste della rotazione intorno al proprio asse (o rotazione propria), della nutazione e della precessione, e ciascuna delle tre rotazioni ha un suo proprio periodo. Se i periodi sono incommensurabili, la trottola non torna mai allo stato iniziale; se sono commensurabili il moto risultante è periodico.

(2) Se $a = -b$ occorre studiare l'equazione (cfr. la (63.22))

63.22*d*
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I_1}\left(E' - U_{\text{eff}}(\theta)\right) = \tilde{f}_-(u), \qquad \tilde{f}_-(u) = (\alpha - \beta u) - a^2 \frac{1+u}{1-u}, \tag{63.24}$$

con $u \equiv \cos\theta$. È facile vedere che la funzione $\tilde{f}_-$ è decrescente in $[-1, 1]$ (risulta $\mathrm{d}\tilde{f}_-/\mathrm{d}u = -\beta - a^2(1-u)^{-2} < 0$), ha un asintoto verticale in $u = 1$ e, in $u = -1$, vale $\tilde{f}_-(-1) = \alpha + \beta$.

Quindi se $\alpha + \beta < 0$ non si hanno moti possibili. Ae $\alpha + \beta = 0$ l'unica soluzione ammissibile è $u \equiv -1$ (*i.e.* $\theta = \pi$), che corrisponde all'avere l'asse indefinitamente orientato lungo la verticale, verso il basso. Infine se $\alpha + \beta > 0$ la funzione $\tilde{f}_-$ ha una sola radice $u_2 \in (-1, 1)$ e quindi l'asse della trottola arriva periodicamente al polo $\theta = \pi$ con velocità $\dot{\theta} \neq 0$ e, raggiuntolo, prosegue al di là verso il parallelo corrispondente alla radice u_2, e così via.

(3) Se $a = b$ occorre studiare l'equazione (cfr. la (63.22))

63.22*e*
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I_1}\left(E' - U_{\text{eff}}(\theta)\right) = \tilde{f}_+(u), \qquad \tilde{f}_+(u) = (\alpha - \beta u) - a^2 \frac{1-u}{1+u}, \tag{63.25}$$

con $u \equiv \cos\theta$. Si verifica facilmente che si ha $\mathrm{d}\tilde{f}_+/\mathrm{d}u = 0$ per $u_0 = -1 + a\sqrt{2/\beta} > -1$, e quindi $\tilde{f}_+$ è crescente per $-1 < u < u_0$ e decrescente per $u > u_0$, ha un massimo per $u = u_0$ e $\tilde{f}_+(-1) = -\infty$, $\tilde{f}_+(\infty) = \infty$: si hanno perciò moti effettivi per il sistema solo se $\tilde{f}_+(u_0) \geq 0$. Se questo avviene si hanno due radici reali, che corrispondono a due radici semplici $u_1 < u_2$, se distinte, e a una radice doppia u_1, se coincidenti.

Nel caso $u_2 < 1$, se $u_1 = u_2$ si ha un unico valore $u_1 = \cos\theta_1$ per cui il moto è possibile (moto merostatico), mentre se $u_1 < u_2$ si può ragionare come nel caso (1): in particolare si può utilizzare l'equazione (63.19) poiché in tale evenienza $|u| \neq 1$ in ogni istante.

Se invece $u_2 = 1$ (*i.e.* $\theta_2 = 0$) si ha $\tilde{f}_+(1) = \alpha - \beta = 0$, che corrisponde a $E' = U_{\text{eff}}$ in (63.25). Tenuto conto che l'energia potenzile è

63.22*f*
$$U_{\text{eff}}(\theta) = \beta\cos\theta + a^2 \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}, \tag{63.26}$$

e quindi le sue derivate prime e seconde sono

63.22*g*
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}\theta} &= \Big(-\beta + \frac{2a^2}{(1+\cos\theta)^2} \Big) \sin\theta, \\ \frac{\mathrm{d}^2U_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}\theta^2} &= \Big(-\beta + \frac{2a^2}{(1+\cos\theta)^2} \Big) \cos\theta + \frac{4a^2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^3}, \end{aligned} \tag{63.27}$$

si vede che, per $\theta = 0$ risulta

63.22*h*
$$E' = U_{\mathrm{eff}}(0), \qquad \frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}\theta}(0) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2U_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}\theta^2}(0) = -\beta + \frac{a^2}{2} = \frac{\mathrm{d}\tilde{f}_+}{\mathrm{d}u}(0). \tag{63.28}$$

Quindi se $u_2 = 1$ è una radice semplice sono possibili due sottocasi: se $[\mathrm{d}\tilde{f}_+/\mathrm{d}u](0) < 0$ l'energia potenziale ha un punto di massimo in $\theta = 0$, e quindi, poiché $E' = U_{\mathrm{eff}}(0)$, allora l'asse della trottola descrive un moto asintotico a $\theta = 0$; se $[\mathrm{d}\tilde{f}_+/\mathrm{d}u](0) > 0$ l'energia potenziale ha un punto di minimo, e quindi, poiché $E' = U_{\mathrm{eff}}(0)$, allora $\theta = 0$ costituisce l'unico valore per cui si possa avere un moto effettivo per il sistema, *i.e.* $\theta = 0$ costituisce un'inclinazione fissa per l'asse della trottola (moto merostatico). Se invece $u_2 = 1$ è una radice doppia (*i.e.* $u_1 = u_2$) allora $[\mathrm{d}\tilde{f}_+/\mathrm{d}u](0) = 0$ e quindi deve essere $u_0 = u_2$ (ricordiamo che u_0 è il punto di massimo per la fuznione $\tilde{f}_+$): di nuovo abbiamo che l'asse resta indefinitamente orientato lungo la verticale, rivolto verso l'alto.

Dalla discussione precedente risulta ovvio che la situazione più usuale è quella descritta al punto (1), dal momento che le altre corrispondono a dati iniziali che hanno misura nulla (richiedendo relazioni specifiche tra i parametri del sistema).

p.63.26 **63.23.** *Osservazione.* Resta da discutere il caso $b = 0$ (*i.e.* $L_3 = 0$). Poiché L_3 è una costante del moto (cfr. il corollario 63.13) e I_3 è costante, anche

63.22*ii*
$$\Omega_3 = \frac{L_3}{I_3} = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \tag{63.29}$$

è costante. In particolare se $\Omega_3 = 0$ (assenza di rotazione intorno all'asse della trottola) l'analisi precedente si semplifica notevolmente. Infatti in tal caso la lagrangiana (63.3) si riduce a

63.22*i*
$$\mathbf{L} = \frac{I_1}{2}\big(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\big) - mg\ell\cos\theta, \tag{63.30}$$

che è la lagrangiana di un pendolo sferico di lunghezza ℓ e massa $m = I_1\ell^{-2}$.

p.63.27 **63.24.** *Osservazione.* In assenza di forza peso ($g = 0$) l'energia potenziale efficace (63.7) si riduce a

63.23
$$U^0_{\mathrm{eff}}(\theta) = \frac{(l_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}. \tag{63.31}$$

Senza perdita di generalità possiamo assumere $L_3 \geq 0$ (questo corrisponde a una scelta dell'orientazione dell'asse di simmetria).

Se $g = 0$ la direzione verticale non è fissata; possiamo sceglierla in modo che sia $\mathbf{l} = l_z \mathbf{e}_z$, con $l_z = \|\mathbf{l}\| = \|\mathbf{L}\|$ (ricordiamo che $\|\mathbf{l}\|$ è un integrale primo per $g = 0$). Con questa scelta $l_z \geq L_3$ e la (63.31) ha un minimo per θ_0 tale che $L_3 = \|\mathbf{L}\| \cos\theta_0$; infatti risulta

63.23*a*
$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{eff}}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(\|\mathbf{L}\| - L_3 \cos\theta)\,(L_3 - \|\mathbf{L}\| \cos\theta)}{I_1 \sin^3\theta}, \tag{63.32}$$

che si annulla (solo) per $\theta = \theta_0$, se $L_3 = \|\mathbf{L}\| \cos\theta_0$, e

63.23*b*
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U_{\text{eff}}}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} = \frac{\|\mathbf{L}\|^2}{I_1} \geq 0. \tag{63.33}$$

Si deve quindi avere $\theta(0) = \theta_0$ e $\theta(t) = \theta_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$: l'angolo di nutazione è perciò costante, e le (63.15) dànno

63.24
$$\dot\varphi = \frac{\|\mathbf{L}\|\,(1 - \cos^2\theta_0)}{I_1 \sin^2\theta_0} = \frac{\|\mathbf{L}\|}{I_1}, \qquad \dot\psi = L_3\Big(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\Big), \tag{63.34}$$

che esprimono, rispettivamente, la velocità angolare di precessione (intorno all'asse verticale) e di rotazione propria (intorno all'asse di simmetria). Le (63.34) vanno confrontate con le velocità angolari μ e ν del paragrafo §45.16: risulta $\dot\varphi = \nu$ e $\dot\psi = \mu$ (cfr. la (45.5)). Possiamo dunque concludere che la descrizione del moto di un sistema rigido in assenza di forza peso in termini degli angoli di Eulero corrisponde alla descrizione secondo Poinsot (con la scelta fatta degli assi coordinati).

*sec.*64
64. Trottola addormentata e trottola veloce

*p.*64.1 **64.1. Introduzione.** Nella presente sezione completiamo l'analisi iniziata nella sezione precedente rigurado alla trottola di Lagrange; di nuovo seguiremo [9.1].

*p.*64.2 **64.2.** Lemma. *Nel moto della trottola di Lagrange, la rotazione stazionaria intorno alla verticale è instabile.*

*p.*64.3 **64.3.** *Dimostrazione del lemma 64.2.* Segue dall'osservazione 44.16. ■

*p.*64.4 **64.4.** Lemma. *Per il moto dell'asse della trottola di Lagrange, la posizione d'equilibrio $\theta = 0$ è stabile se la velocità di rotazione $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ verifica la condizione*

64.1
$$\Omega_3^2 > \frac{4mg\ell I_1}{I_3^2}, \tag{64.1}$$

e instabile altrimenti.

*p.*64.5 **64.5.** *Dimostrazione del lemma 64.4.* Consideriamo prima il caso in cui sia $l_z = L_3$. Sviluppiamo l'energia potenziale efficace (63.7) in potenze di θ, tenendo conto che

$L_3 = l_z$ per $\theta = 0$ (cfr. anche la (63.12)). Si trova

64.2 $$U_{\text{eff}} = A_0 + A_2\theta^2 + O(\theta^4), \qquad A_2 = \frac{\Omega_3^2 I_3^2}{8I_1} - \frac{mg\ell}{2}, \tag{64.2}$$

e quindi $\theta = 0$ è stabile se $A_2 > 0$, che corrisponde alla (64.1).

Se $l_z \neq L_3$, possiamo scrivere $l_z = L_3(1+\mu)$, dove μ dipende dai dati iniziali $(\theta_0, \dot\theta_0)$, e

64.3 $$\lim_{\substack{\theta_0 \to 0 \\ \dot\theta_0 \to 0}} \mu = 0. \tag{64.3}$$

Possiamo allora scrivere l'energia potenziale efficace

64.4 $$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{L_3^2\,(1+\mu-\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mg\ell\cos\theta. \tag{64.4}$$

Per $\mu \ll \theta^2$, il grafico di $U_{\text{eff}}(\theta)$ è molto simile a quello del caso precedente ($l_z = L_3$); in particolare $\lim_{\theta\to\pm\pi} U_{\text{eff}}(\theta) = \infty$. Occorre quindi studiare il grafico di $U_{\text{eff}}(\theta)$ per θ vicino a 0. Può essere conveniente introdurre la variabile riscalata $y = \theta/\sqrt{|\mu|}$, in termini della quale la (64.4) diventa

64.5 $$U_{\text{eff}}(\sqrt{|\mu|}y) = |\mu| \left[\frac{L_3^2}{2I_1}\left(\frac{1}{y^2} + \frac{y^4}{4} \pm 1\right) - \frac{mg\ell}{2}\,y^2\right] + O(\mu^2), \tag{64.5}$$

dove il segno $\pm$ dipende dal segno di μ ($\pm 1 = \mu/|\mu|$). Si hanno due punti di minimo (simmetrici) per la (64.5), in corrispondenza dei valori $y = \pm y_0$, con

64.6 $$y_0 = \left(\frac{4L_3^2}{L_3^2 - 4I_1 mg\ell}\right)^{1/4}, \tag{64.6}$$

come si può facilmente verificare. Quindi la (64.4) ha due minimi per $\theta_\mu = O(\sqrt{|\mu|})$, così che $\theta_\mu \to 0$ per $\mu \to 0$. Inoltre si vede dalla (64.4) che, a μ fissato, $\lim_{\theta\to 0} U_{\text{eff}}(\theta) = \infty$: quindi, a μ fissato, $\theta = 0$ non è un punto di minimo. Tuttavia $\theta = 0$ è ugualmente un punto d'equilibrio stabile per l'asse della trottola, come si può vedere nel seguente modo. La distanza di θ_μ da $\theta = 0$ è di ordine $O(\sqrt{|\mu|})$. Se allora $|\theta_0|, |\dot\theta_0| < \delta$, si ha che il moto si svolge in una regione dello spazio delle fasi tale che $|\theta(t)|, |\dot\theta(t)| < \varepsilon \equiv C\sqrt{|\delta|}$, per qualche costante C e per ogni $t \geq 0$. In conclusione tutti i dati iniziali vicini a $(\theta, \dot\theta) = (0,0)$ generano traiettorie che rimangono vicine a $(0,0)$ per ogni tempo: quindi $(\theta, \dot\theta) = (0,0)$ è un punto d'equilibrio stabile. ■

p.64.6 **64.6.** DEFINIZIONE (TROTTOLA ADDORMENTATA). *Se vale la condizione (64.1), si dice che la trottola è "addormentata".*

p.64.7 **64.7.** *Osservazione.* Quando l'attrito porta la velocità di rotazione della trottola addormentata al di sotto del valore (64.1), la trottola "si sveglia".

p.64.8 **64.8.** DEFINIZIONE (TROTTOLA VELOCE). *Una trottola si dice "veloce" se l'energia cinetica di rotazione è grande rispetto a quella potenziale, i.e. se*

64.7 $$\frac{1}{2} I_3^2 \Omega_3^2 \mathbf{g} mg\ell. \tag{64.7}$$

p.64.9 **64.9.** *Osservazione.* Aumentare N volte la velocità angolare è equivalente a diminuire N^2 volte il peso. Più precisamente se, conservando la posizione iniziale della trottola, si aumenta N volte la velocità angolare, la trottola percorrerà la stessa triettoria che se l'accelerazione di gravità fosse diminuita N^2 volte lasciando inalterata la velocità angolare. Quindi possiamo analizzare il caso $g \to 0$ e adottare i risultati che troveremo per lo studio del caso $\|\boldsymbol{\Omega}\| \to \infty$.

p.64.10 **64.10.** Lemma. *In assenza di forza peso, l'angolo θ_0 tale che $l_z = L_3 \cos\theta_0$ è una posizione d'equilibrio stabile dell'asse della trottola. La frequenza delle piccole oscillazioni θ intorno a θ_0 è uguale a*

64.8
$$\omega_{\text{nut}} = \frac{I_3 \Omega_3}{I_1}, \tag{64.8}$$

dove $I_3\Omega_3 = L_3$.

p.64.11 **64.11.** *Dimostrazione del lemma 64.10.* In assenza della forza peso, l'energia potenziale efficace (63.7) si riduce a

64.9
$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(l_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta}, \tag{64.9}$$

che è una funzione non negativa con un minimo nullo per $\theta = \theta_0$, dove θ_0 è lo zero dell'equazione $l_z = L_3 \cos\theta$. Quindi θ_0 è una posizione d'equilibrio stabile per l'asse della trottola. Per piccole deviazioni da θ_0 dell'inclinazione dell'asse della trottola, si avranno piccole oscillazioni intorno a θ_0 (nutazione), di frequenza ω_{nut} data dalla (64.8), come è facile calcolare esplicitamente tenendo conto che

64.10
$$\mathbf{L} = \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 - \frac{I_3^2\Omega_3^2}{2I_1}(\theta-\theta_0)^2 + O((\theta-\theta_0)^3). \tag{64.10}$$

per $\theta \to \theta_0$. ■

p.64.12 **64.12.** *Osservazione.* Dalla formula (63.15) si vede che, per $\theta = \theta_0$, l'azimut dell'asse è costante nel tempo, e quindi l'asse è fisso.

p.64.13 **64.13.** *Osservazione.* Il moto di una trottola in assenza di forza peso si può esaminare con la descrizione secondo Poinsot trattata nel paragrafo §45 (cfr. anche l'osservazione 63.24). L'angolo θ_0 tale che $l_z = L_3 \cos\theta_0$ corrisponde alla situazione in cui l'ellissoide ruota intorno al suo asse $\mathbf{e}_3$ che è diretto lungo la direzione del momento della quantità di moto $\mathbf{l}$ (e l'asse $\mathbf{e}_z$ forma un angolo θ_0 con $\mathbf{e}_3$). In tali condizioni non c'è moto di precessione secondo Poinsot, e l'asse è fisso (cfr. l'osservazione 64.12). Per piccole deviazioni dall'equilibrio, si ha un'oscillazione di θ con frequenza data approssimativamente da ω_{nut} (la frequenza tende a ω_{nut} quando l'ampiezza della nutazione tende a zero). Equivalentemente, nella descrizione secondo Poinsot, l'asse della trottola ruota uniformemente intorno al vettore del momento della quantità di moto, che conserva la sua posizione nello spazio: quindi l'asse della trottola descrive sulla sfera unitaria una circonferenza (di raggio piccolo) il cui centro corrisponde al vettore del momento della quantità di moto. Questo vuol dire che il moto dell'asse della trottola che si chiama *nutazione* nella descrizione secondo Lagrange corrisponde al moto di *precessione* nella descrizione secondo Poinsot. Infatti la formula (64.8) valida per la frequenza di una nutazione di ampiezza piccola è in accordo con la formula $\omega_{\mathrm{pr}} = \|\mathcal{L}\|/I_1$, trovata in §45.16, per la frequenza di precessione nella descrizione secondo Poinsot: quando l'ampiezza della nutazione tende a zero, si ha $I_3\Omega_3 = L_3 \to \|\mathcal{L}\|$. Mentre l'asse della trottola ruota intorno a $\mathbf{l}$, cambia l'angolo θ che esso forma con l'asse verticale $\mathbf{e}_z$, oscillando intorno al valore θ_0, e l'oscillazione è tale da mantenere costante la componente L_3 di $\mathbf{l}$ lungo l'asse della trottola (l_z rimane costante perché $\mathbf{l}$ è costante, e l'asse $\mathbf{e}_z$ è fisso).

p.64.14 **64.14.** Lemma. *Se la funzione $f(x)$ ha un minimo per $x = 0$ e ammette sviluppo di Taylor $f(x) = Ax^2/2 + O(x^3)$, con $A > 0$, e la funzione $h(x)$ ammette sviluppo di Taylor $h(x) = B + Cx + O(x^2)$, allora, per ε sufficientemente piccolo, la funzione $f_\varepsilon = f(x) + \varepsilon h(x)$ ha un minimo nel punto*

64.11
$$x_\varepsilon = -\frac{C\varepsilon}{A} + O(\varepsilon^2), \tag{64.11}$$

e $[\mathrm{d}^2 f_\varepsilon/\mathrm{d}x^2](x_\varepsilon) = A + O(\varepsilon)$.

p.64.15 **64.15.** *Dimostrazione del lemma 64.14.* Si definisca $F(x,\varepsilon) = \mathrm{d}f_\varepsilon/\mathrm{d}x$ e si applichi il teorema della funzione implicita, tenendo conto che $A > 0$. Si ha infatti $F(0,0) = 0$, e $[\partial F/\partial x](0,0) = A$; quindi in un intorno di $(x,\varepsilon) = (0,0)$ esiste $x = x(\varepsilon)$ tale che $F(x(\varepsilon),\varepsilon) = 0$, dove $x(\varepsilon) = -\varepsilon A/C + O(\varepsilon^2)$, poiché $\partial x/\partial\varepsilon = -[\partial F/\partial x]/\,[\partial F/\partial\varepsilon]$. ■

p.64.16 **64.16.** Corollario. *L'energia potenziale efficace (63.7), per valori piccoli di g, ha un minimo θ_g vicino a θ_0, e le piccole oscillazioni intorno alla posizione θ_g (nutazione) hanno frequenza ω_g tale che* $\lim_{g\to 0}\omega_g = \omega_{\mathrm{nut}}$.

p.64.17 **64.17.** *Dimostrazione del corollario 64.16.* Segue dal lemma 64.14 applicato all'energia potenziale efficace (63.7). ■

p.64.18 **64.18.** Teorema. *Se all'istante iniziale l'asse della trottola è fermo ($\dot\varphi = \dot\theta = 0$) e la trottola ruota velocemente intorno al proprio asse ($\Omega_3 \to \infty$) inclinato rispetto alla verticale di un angolo θ_0, allora asintoticamente, per $\Omega_3 \to \infty$,*
(1) la frequenza della nutazione ω_{nut} è proporzionale alla velocità angolare;
(2) l'ampiezza della nutazione a_{nut} è inversamente proporzionale al quadrato della velocità angolare;
(3) la frequenza della precessione ω_{pr} è inversamente proporzionale alla velocità angolare;

(4) si hanno le formule asintotiche

64.12 $$\omega_{\text{nut}} \approx \frac{I_3\Omega_3}{I_1}, \qquad a_{\text{nut}} \approx \frac{I_1 mg\ell}{I_3^2\Omega_3^2}\sin\theta_0, \qquad \omega_{\text{pr}} \approx \frac{mg\ell}{I_3\Omega_3}, \tag{64.12}$$

dove $f_1(\Omega_3) \approx f_2(\Omega_3)$ *significa che, per* $\Omega_3 \to \infty$, $f_1(\Omega_3)/f_2(\Omega_3) \to 1$.

p.64.19 **64.19.** *Dimostrazione del teorema 64.18.* In virtù dell'osservazione 64.9 possiamo studiare il caso in cui la velocità angolare iniziale è fissata e $g \to 0$. Con le condizioni iniziali scelte, l'asse della trottola traccia sulla sfera unitaria una curva con cuspidi (cfr. §63.22).

Definiamo $\theta = \theta_0 + x$. Quindi $\cos\theta = \cos\theta_0 - x\sin\theta_0 + O(x^2)$, e

$$U_{\text{eff}}\Big|_{g=0} = \frac{I_3^2\Omega_3^2}{2I_1}x^2 + O(x^3), \qquad mg\ell\cos\theta = mg\ell\cos\theta_0 - xmg\ell\sin\theta_0 + O(x^2),$$

così che possiamo applicare il lemma 64.14, con $f(x) = U_{\text{eff}}\big|_{g=0}$, $h(x) = m\ell\cos(\theta_0+x)$ e $\varepsilon = g$. Quindi il minimo dell'energia potenziale efficace è raggiunto per un angolo d'inclinazione

64.13 $$\theta_g = \theta_0 + x_g, \qquad x_g = \frac{I_1 m\ell\sin\theta_0}{I_3^2\Omega_3^2}\,g + O(g^2)\ , \tag{64.13}$$

e l'asse della trottola oscillerà intorno a θ_g. Poiché all'istante iniziale $\theta = \theta_0$ e $\dot\theta = 0$, allora θ_0 deve corrispondere alla posizione più alta dell'asse della trottola.

La prima relazione in (64.12) segue dal corollario 64.16.

Per g sufficientemente piccolo, l'ampiezza della nutazione è quindi data da

64.14 $$a_{\text{nut}} = \frac{I_1 m\ell\sin\theta_0}{I_3^2\Omega_3^2}\,g + O(g^2), \tag{64.14}$$

che dà la seconda relazione in (64.12).

Per determinare il moto di precessione dell'asse, si ricordi la (63.11), con $\theta = \theta_0 + x$. Quindi

64.15 $$\dot\varphi = \frac{L_3}{I_1\sin\theta_0}\,x + O(x^2). \tag{64.15}$$

Inoltre x oscilla armonicamente tra 0 e $2x_g$ (a meno di correzioni $O(g^2)$), così che il valore medio, per periodo di nutazione $T_{\text{nut}} = 2\pi/\omega_{\text{nut}}$, della velocità di precessione è dato da

64.16 $$\frac{1}{T_{\text{nut}}}\int_0^{T_{\text{nut}}} \mathrm{d}t\,\dot\varphi(t) = \frac{L_3}{I_1\sin\theta_0}\,x_g + O(g^2) = \frac{mg\ell}{I_3\Omega_3} + O(g^2), \tag{64.16}$$

che corrisponde alla terza relazione in (64.12).

p.64.20 **64.20.** Definizione (Trottola lanciata velocemente). *Se sono soddisfatte le condizioni del teorema 64.18, diremo che la trottola è "lanciata velocemente".*

Esercizi

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.

Esercizio 5.

Esercizio 6.