

Capitolo 16. Meccanica Hamiltoniana

sec.65

65. Sistemi Hamiltoniani

p.65.1 **65.1. Introduzaine.**p.65.2 **65.2. DEFINIZIONE (TRASFORMATA DI LEGENDRE)** Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 convessa ($f''(x) > 0$). La funzione

$$65.1 \quad g(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x)). \quad (65.1)$$

è chiamata la trasformata di Legendre della funzione f .

p.65.3 **65.3.** Se in (65.1) l'estremo superiore è anche un massimo, allora viene raggiunto in corrispondenza di un punto $x = x(y)$ tale che $f'(x(y)) = y$.

Si ha che g è una funzione convessa di classe C^2 . Infatti risulta $g'(y) = (f')^{-1}(y)$, e quindi, per la regola di derivazione della funzione inversa, $g''(y) = 1/f''(x(y)) > 0$.

p.65.4 **65.4.** La trasformata di Legendre è una *trasformazione involutiva* (o *involuzione*), cioè la trasformata di Legendre della funzione (65.1) è la funzione f stessa. questo vuol dire che se $g(y)$ è definita come in (65.1) allora si ha

$$65.2 \quad f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (yx - g(y)). \quad (65.2)$$

e se l'estremo superiore è un massimo allora è raggiunto in corrispondenza di un valore $y = y(x)$ tale che $g'(y(x)) = x$.

p.65.5 **65.5.** In più dimensioni, data una funzione $f(x)$ di classe C^2 convessa, cioè tale che

$$65.3 \quad \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) > 0, \quad (65.3)$$

si definisce

$$65.4 \quad g(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)) \quad (65.4)$$

la sua trasformata di Legendre. Di nuovo anche la funzione $g(y)$ è convessa, e la sua trasformata di Legendre è la funzione $f(x)$.

p.65.6 **65.6.** ESEMPIO. $f(x) = ax$, $a > 0$ (non strettamente convessa). Allora (cfr. l'esercizio 2)

$$65.5 \quad g(y) = \begin{cases} 0, & y = a, \\ \infty, & y \neq a, \end{cases} \quad (65.5)$$

p.65.7 **65.7.** ESEMPIO. $f(x) = ax^2/2$, $a > 0$ (strettamente convessa). Allora (cr. l'esercizio 3) $g(y) = y^2/2a$.

p.65.8 **65.8.** ESEMPIO. Data la lagrangiana

$$65.6 \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle - U(q), \quad (65.6)$$

e posto $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$, si definisce $H(q, p)$ la sua trasformata di Legendre rispetto \dot{q} . Risulta

$$65.7 \quad H(q, p) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + U(q) = \frac{1}{2} \langle \dot{p}, A^{-1}(q)\dot{p} \rangle - U(q). \quad (65.7)$$

Se $q \in \Sigma$, si ha $(q, \dot{q}) \in T\Sigma$, dove $T\Sigma$ indica il fibrato tangente di Σ . Si pone allora $z = (q, p) \in T^*\Sigma$ e si chiama $T^*\Sigma$ il *cofibrato tangente* di Σ . Si chiama *spazio delle fasi* l'insieme di definizione delle variabili (q, p) .

p.65.9 **65.9.** Coordinate canoniche: posizione e momento coniugato.

La funzione $H(q, p)$ in (65.5) prende il nome di hamiltoniana: quindi la Hamiltoniana è la trasformata di Legendre della lagrangiana (e viceversa). Quindi in particolare si ha

$$65.8 \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (65.8)$$

dal momento che H è la trasformata di Legendre di \mathcal{L} rispetto alla variabile \dot{q} . Inoltre si vede facilmente che si ha

$$65.9 \quad \begin{aligned} \dot{p} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (\langle p, \dot{q} \rangle - H(p, q)) \\ &= \left\langle \frac{\partial p}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle - \frac{\partial H}{\partial q} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial p}{\partial q} \right\rangle = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{aligned} \quad (65.9)$$

dove si è usata la (65.8).

p.65.10 **65.10.** DEFINIZIONE (EQUAZIONI HAMILTONIANE). *Data una Hamiltoniana $H = H(q, p, t)$ di classe C^2 si definiscono equazioni di Hamilton le equazioni*

$$65.10 \quad \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{cases} \quad (65.10)$$

che costituiscono un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine.

p.65.11 **65.11.** DEFINIZIONE (EQUAZIONI CANONICHE). Sia un sistema dinamico in \mathbb{R}^{2n} descritto dalle equazioni $\dot{z} = f(z)$. Diremo che tali equazioni sono equazioni canoniche se esiste una funzione H di classe C^2 in \mathbb{R}^{2n} tale che si abbia $f = E\partial H/\partial z$.

p.65.12 **65.12.** Osservazione.

p.65.13 **65.13.** DEFINIZIONE (SISTEMA HAMILTONIANO). Data una varietà Σ e una funzione $H: T^*\Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 si definisce sistema hamiltoniano la coppia (Σ, H) .

p.65.14 **65.14.** DEFINIZIONE (MATRICE SIMPLETTICA STANDARD). Chiamiamo matrice simplettica standard la matrice $2n \times 2n$

$$65.11 \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (65.11)$$

dove $0, \mathbf{1}$ sono matrici $n \times n$.

p.65.15 **65.15.** Osservazione. Data la matrice simplettica standard E si ha

$$65.12 \quad E^T = -E, \quad E^{-1} = -E, \quad E^2 = -\mathbf{1}, \quad (65.12)$$

come è immediato verificare (cfr. l'esercizio 4).

p.65.16 **65.16.** DEFINIZIONE (CAMPO VETTORIALE HAMILTONIANO). Si definisce campo vettoriale hamiltoniano associato all'Hamiltoniana H il campo vettoriale

$$65.13 \quad f_H = E \frac{\partial H}{\partial z} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right), \quad (65.13)$$

dove $z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\partial/\partial z = (\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_{2n})$.

p.65.17 **65.17.** Osservazione. È facile vedere che il campo vettoriale hamiltoniano è un campo vettoriale a divergenza nulla, i.e.

$$65.14 \quad \operatorname{div} f_H = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} E_{kj} \frac{\partial^2 H}{\partial z_k \partial z_j} = 0, \quad (65.14)$$

dove $f_H(z)$ è definito in (65.13) e si è utilizzata l'antisimmetria di E (i.e. $E_{ik} = -E_{ki}$).

p.65.18 **65.18.** DEFINIZIONE (TRASFORMAZIONE CHE CONSERVA IL VOLUME). Dato un dominio $D \subset \mathbb{R}^N$ chiamiamo

$$65.15 \quad \operatorname{Vol}(D) = \int_D dx \quad (65.15)$$

132 CAPITOLO 16. MECCANICA HAMILTONIANA

il volume del dominio D . Diremo che una trasformazione $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ che dipende dal parametro continuo t è una trasformazione che conserva il volume se per ogni sottoinsieme $D \subset \Omega$, se indichiamo con

$$65.16 \quad D(t) = \varphi(t, D) = \bigcup_{x \in D} \varphi(t, x) \quad (65.16)$$

il volume dell'insieme ottenuto facendo evolvere i punti di $D = D(0)$ al tempo t , si ha

$$65.17 \quad \text{Vol}(D(t)) = \text{Vol}(D) \quad (65.17)$$

per ogni t .

p.65.19 **65.19.** TEOREMA (LIOUVILLE). *Il flusso hamiltoniano conserva il volume.*

p.65.20 **65.20.** *Dimostrazione.*

p.65.21 **65.21.** *Osservazione.* Assenza di cicli limite e punti d'equilibrio asintoticamente stabili per sistemi Hamiltoniani.

p.65.22 **65.22.** TEOREMA (TEOREMA DEL RITORNO DI POINCARÉ). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme compatto e sia $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ una trasformazione che conserva il volume. Per ogni aperto $U \subset \Omega$ e ogni tempo $\tau > 0$ esiste $x \in U$ e $t > \tau$ tali che $\varphi(t, x) \in U$.*

p.65.23 **65.23.** *Dimostrazione.*

p.65.24 **65.24.** *Osservazione.*

p.65.25 **65.25.** *Osservazione: esperimento di Maxwell.*

p.65.26 **65.26.** *Coordinate cicliche e teorema di Routh nel formalismo hamiltoniano.*

sec.66

66. Secondo principio variazionale di Hamilton

p.66.1 **66.1. Introduzione.** Indichiamo con $\mathcal{N}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2)$ lo spazio delle traiettorie $t \in [t_1, t_2] \rightarrow (q(t), p(t))$ di classe C^1 tali che $q(t_1) = q^{(1)}$ e $q(t_2) = q^{(2)}$. Indichiamo con \mathcal{N}_0 lo spazio delle deformazioni, cioè delle traiettorie $t \in [t_1, t_2] \rightarrow (u(t), v(t))$ di classe C^1 tali che $u(t_1) = u(t_2) = 0$ e $v(t_1) = v(t_2) = 0$.

p.66.2 **66.2. DEFINIZIONE (FUNZIONALE D'AZIONE)** Definiamo funzionale d'azione il funzionale

$$66.1 \quad J(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt (\langle p(t), \dot{q}(t) \rangle - H(q(t), p(t), t)), \quad (66.1)$$

definito sullo spazio delle traiettorie $\mathcal{N}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2)$ a valori in \mathbb{R} .

p.66.3 **66.3.** TEOREMA. *Il differenziale del funzionale d'azione è uguale a zero se e solo se valgono le equazioni di Hamilton (65.7).*

p.66.4 **66.4.** Dimostrazione. Si ha $DJ_\gamma(h) = 0$ per ogni deformazione $h = (u, v)$ se e solo se risulta

$$66.2 \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\langle v(t), \dot{q}(t) \rangle + \langle p(t), \dot{u}(t) \rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t), u(t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t), v(t) \right\rangle \right) = 0, \quad (66.2)$$

e, integrando per parti, si può riscrivere

$$66.3 \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \langle p(t), \dot{u}(t) \rangle = \langle p(t), u(t) \rangle \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \dot{p}(t), u(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \dot{p}(t), u(t) \rangle \quad (66.3)$$

dove si è utilizzato che $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Quindi la (66.2) diventa

$$66.4 \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\left\langle v(t), \dot{q}(t) - \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t) \right\rangle + \left\langle u(t), \dot{p}(t) + \frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t) \right\rangle \right) = 0, \quad (66.4)$$

e data l'arbitrarietà della deformazione h , si ottengono le (65.10). ■

p.66.5 **66.5.** PRINCIPIO (SECONDO PRINCIPIO VARIAZIONALE DI HAMILTON).

p.66.6 **66.6.** DEFINIZIONE (TRASFORMAZIONE DI COORDINATE). *Chiameremo trasformazione di coordinate un'applicazione $z \rightarrow Z(z, t)$ di classe C^2 , con $z \in \mathbb{R}^{2n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{2n}$. Se $Z(z, t) = Z(z)$, i.e. Z non dipende esplicitamente dal tempo, diremo che la trasformazione di coordinate è indipendente dal tempo.*

p.66.7 **66.7.** ESEMPIO. $Q = \alpha q$ e $P = \beta p$, con $H' = \alpha\beta H$.

p.66.8 **66.8.** ESEMPIO. $Q = p$ e $P = q$, con $H' = -H$.

p.66.9 **66.9.** Trasformazioni che conservano la struttura canonica delle equazioni del moto (cfr. la definizione 67.14). Le trasformazioni considerate negli esempi 66.7 e 66.8 conservano la struttura canonica delle equazioni.

p.66.10 **66.10.**

Esercizi

Esercizio 1.

Esercizio 2. Dimostrare che la trasformata di Legendre $g(y)$ della funzione $f(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$, è data dalla (65.4).

Esercizio 3. Dimostrare che la trasformata di Legendre $g(y)$ della funzione $f(x) = ax^2/2$, con $a > 0$, è data da $g(y) = y^2/2a$.

Esercizio 4. Dimostrare le relazioni (65.12).

Esercizio 5.

Esercizio 6.