Capitolo 18. Metodo di Hamilton-Jacobi

sec.71

71. Equazione di Hamilton-Jacobi

p.71.1 **71.1. Introduzione.** Il metodo di costruzione di trasformazioni canoniche tramite funzioni generatrici può essere utilizzato per allo scopo di risolvere le equazioni di Hamilton.

Infatti data una funzione generatrice $F(x, y, t)$ possiamo costruire, attraverso un procedimento di seconda specie, una trasformazione canonica $(q, p) \to (Q, P)$ tale che, nelle nuove coordinate, la Hamiltoniana diventa (cfr. la (70.34))

71.1
$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{71.1}$$

Possiamo quindi cercare di determinare la funzione generatrice F in modo tale che sia $K = 0$. Questo porta all'equazione

71.2
$$H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{71.2}$$

dove si è tenuto conto delle (70.30) per esprimere p in termini di (q, P). Ricordiamo che si definisce equazione differenziale alle derivate parziali un'equazione differenziale in cui compare una funzione di più variabili insieme alle sue derivate parziali.

p.71.2 **71.2.** DEFINIZIONE (EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI). *Chiamiamo* equazione di Hamilton-Jacobi *l'equazione alle derivate parziali (71.2).*

p.71.3 **71.3.** *Osservazione.* La (71.2) è un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare del primo ordine, cioè della forma

71.3
$$G\left(F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial q_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0, \tag{71.3}$$

in cui la funzione F compare in modo non lineare e solo le derivate prime di F sono coinvolte.

p.71.4 **71.4.** *Osservazione.* Se la trasformazione di coordinate $z \to Z(z, t)$ è tale che nelle nuove coordinate la hamiltoniana è $K = 0$, le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

71.4
$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \tag{71.4}$$

e quindi (Q, P) sono costanti, i.e. esiste un vettore costante $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2n}$ tale che $Q(t) = \beta$ e $P(t) = \alpha$ per ogni t.

p.71.5 **71.5.** DEFINIZIONE (INTEGRALE GENERALE). *Si dice* integrale generale *dell'equazione differenziale alle derivate parziali (71.3) la sua soluzione $F(q, t)$ più generale.*

p.71.6 **71.6.** *Osservazione.* L'integrale generale di un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali dipende da varie funzioni arbitarie.

p.71.7 **71.7.** DEFINIZIONE (INTEGRALE COMPLETO). *Si dice* integrale completo *dell'equazione differenziale alle derivate parziali (71.3) una sua soluzione $F(q, t)$ che dipenda da $n+1$ costanti arbitrarie (tante quante sono le variabili (q, t)).*

p.71.8 **71.8.** *Osservazione.* Nel caso dell'equazione (71.2) uno dei parametri arbitrari da cui l'integrale completo $F(q, t)$ dipende si ricava immediatamente notando che F appare solo attraverso le sue derivate, così che se F è soluzione di (71.2) lo è anche F + cost. Quindi uno dei paramatri appare semplicemente come una costante additiva, e quindi possiamo ignorarlo. Noi saremo quindi interessati a integrali completi $F(q, \alpha, t)$ dell'equazione di Hamilton-jacobi che dipendano da n costanti arbitarie α e che soddisfino la condizione

71.5
$$\det \left(\frac{\partial F}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0. \tag{71.5}$$

Questo ci permetterà di interpretare $F(q, \alpha, t)$ come funzione generatrice della trasformazione canonica $(q, p) \to (\beta, \alpha)$, con i parametri α che hanno il ruolo dei nuovi momenti P e i parametri β che rappresentano le coordinate Q di cui P sono i momenti coniugati (cfr. l'osservazione 71.4).

p.71.9 **71.9.** DEFINIZIONE (FUNZIONE PRINCIPALE DI HAMILTON). *Un integrale completo $F(q, \alpha, t)$ dell'equazione di Hamilton-Jacobi (71.2), che dipenda da n parametri e soddisfi la condizione (71.5), si chiama* funzione pincipale di Hamilton.

p.71.10 **71.10.** *Osservazione.* Sono pochi i casi in cui si riesce a dimostrare l'esistenza di un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Il problema non è solo di calcolo, ma riflette una difficoltà intrinseca. Infatti se si riesce a risolvere l'equazione vuol dire che esistono n integrali primi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, e questo non sempre è possibile. Vedremo che si chiamano *sistemi integrabili* i sistemi hamiltoniani per cui questo è possibile. Però in generale i sistemi integrabili sono pochi: basta in generale una qualsiasi perturbazione, arbitrariament piccola, per distruggere l'integrabilità di un sistema hamiltoniano.

p.71.11 **71.11. Caso indipendente dal tempo**. Consideriamo il caso in cui la hamiltoniana H non dipenda dal tempo, i.e. $H = H(q, p)$. Allora l'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

71.6
$$H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{71.6}$$

e poiché H è indipendente dal tempo possiamo scegliere uno dei parametri, per esempio α_n, in modo tale che sia $H = \alpha_n$. Si può allora scrivere $F(q, \alpha, t)$ nella forma

71.7
$$F(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_n t. \tag{71.7}$$

Infatti, introdotta la (71.7) nella (71.6), otteniamo

71.8
$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_n, \tag{71.8}$$

dove si è tenuto conto che, dalla definizione (71.7), si ha

71.9
$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}. \tag{71.9}$$

La (71.8) è quindi un'equazione differenziale alle derivate parziali per la funzione W.

Più in generale possiamo porre, in luogo della (71.7),

71.10
$$F(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - E(\alpha)\, t, \tag{71.10}$$

dove E è una funzione arbitraria (purché di classe C^2 nei suoi argomenti), che porta all'equazione

71.11
$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E(\alpha), \tag{71.11}$$

invece che alla (71.8).

p.71.12 **71.12.** DEFINIZIONE (FUNZIONE CARATTERISTICA DI HAMILTON). *Una soluzione* $W(q, \alpha)$ *dell'equazione (71.8), che dipenda da* n *parametri* α *e che soddisfi la condizione*

71.12
$$\det\left(\frac{\partial W}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0, \tag{71.12}$$

prende il nome di funzione caratteristica di Hamilton.

p.71.13 **71.13.** *Osservazione.* Si noti che, in virtù della (71.9) si ha

71.13
$$\frac{\partial W}{\partial q_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial F}{\partial q_i \partial \alpha_j}, \tag{71.13}$$

e quindi la condizione (71.12) è soddisfatta se e solo se è soddisfatta la (71.5). Quindi, nel caso indipendente dal tempo, si riesce a determinare una funzione caratteristica di Hamilton se e solo se si riesce a determinare una funzione principale di Hamilton: i due problemi (71.2) e (71.8) sono quindi completamente equivalenti.

p.71.14 **71.14.** *Osservazione.* La strategia che si può quindi seguire per risolvere le equazioni di Hamilton è di considerare la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi e cercarne un integrale completo. Se questo è possibile si riesce a costruire una trasformazione canonica $(q, p) \to (\beta, \alpha)$, ovviamente dipendente dal tempo, tale che nelle nuove coordinate il moto è banale. Si ha infatti

71.14
$$\begin{cases} \dot\beta_k = 0, & k = 1, \ldots, n, \\ \dot\alpha_k = 0, & k = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{71.14}$$

nel caso in cui H dipenda dal tempo, e

71.15
$$\begin{cases} \dot\beta_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1, \\ \dot\beta_n = 1, \\ \dot\alpha_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{71.15}$$

nel caso in cui H non dipenda dal tempo.

Nelle nuove coordinate il moto è quindi

71.16
$$\begin{cases} \dot\beta_k(t) = \beta_k(0), \quad k = 1, \ldots, n, \\ \dot\alpha_k(t) = \alpha_k(0), \quad k = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{71.16}$$

e, rispettivamente,

71.17
$$\begin{cases} \dot\beta_k(t) = 0, & k = 1, \ldots, n-1, \\ \dot\beta_n(t) = \beta_n(0) + t, & \\ \dot\alpha_k(t) = \alpha_k(0), & k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{71.17}$$

Se invece della (71.7) abbiamo utilizzato la (71.10) per definire la funzione caratteristica di Hamilton, le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili diventano

71.18
$$\begin{cases} \dot\beta_k = \omega_k(\alpha), & k = 1, \ldots, n, \\ \dot\alpha_k = 0, & k = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{71.18}$$

dove $\omega_k = \partial E / \partial \alpha_k$.

Per ottenere il moto nelle variabili originarie (q, p) occorre quindi applicare la trasformazione inversa.

p.71.15 **71.15.** *Osservazione.* Guardando le (71.15) si vede che si è ottenuta la stessa conclusione del teorema della scatola di flusso, i.e. la linearizzazione del campo vettoriale. Quello che abbiamo in più rispetto a quel teorema è che il diffeomorfismo che opera la linearizzazione definisce una trasformazione canonica.

p.71.16 **71.16.** *Osservazione.* In generale si riesce a dimostrare, al più, solo esistenza locale della soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi (sotto opportune ipotesi di regolarità). L'esistenza globale, come già sottolineato nell'osservazione 71.10, presenta già difficoltà in casi elementari, come possono essere i sistemi a un grado di libertà o anche un sistema bidimensionale libero se si sceglie come spazio delle fasi il toro invece del piano. Questo è dovuto al fatto che in generale non si possono trovare $2n$ costanti del moto definite globalmente: anche nel caso dei *sistemi separabili* discussi più avanti si trova che la funzione principale di Hamilton è una funzione a più valori.

p.71.17 **71.17. Sistemi unidimensionali.** Consideriamo l'equazione di Hamilton-Jacobi nel caso di un semplice sistema unidimensionale, descritto da una lagrangiana della forma

71.19
$$\mathcal{L}(q, \dot q) = \frac{1}{2}\, a(q)\, \dot q^2 - V(q), \tag{71.19}$$

con V e a di classe C^2, e a definita positiva (i.e. $a(q) > 0$). La corispondente hamiltoniana è allora

71.20
$$H(q,p) = \frac{1}{2a(q)} p^2 + V(q), \tag{71.20}$$

e quindi l'equazione di Hamilton-Jacobi è

71.21
$$\frac{1}{2a(q)} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = \alpha, \tag{71.21}$$

dove la costante α rappresenta l'energia del sistema.

Si trova allora

71.22
$$W(q,\alpha) = \pm \int_{q_0}^{q} \mathrm{d}q' \sqrt{2a(q')\,(\alpha - V(q'))}, \tag{71.22}$$

dove q_0 arbitrario, se non per la richiesta che sia $q_0 \in I$, se I è l'intervallo contenente il dato iniziale $q(0)$ tale che si abbia $\alpha - V(q) \geq 0$ per $q \in I$.

Si ha quindi (cfr. il paragrafo 70.17)

71.23
$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \pm \int_{q_0}^{q} \mathrm{d}q' \sqrt{\frac{a(q')}{2\,(\alpha - V(q'))}} = t - t_0, \tag{71.23}$$

dove si è tenuto conto della (71.17). Infine si ha

71.24
$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2a(q)\,(\alpha - V(q))}, \tag{71.24}$$

in accordo con la (71.20).

In (71.22) si dovrà prendere il segno $+$ o il segno $-$ a seconda del valore di $p(0)$. Se $p(0) > 0$ si deve prendere la determinazione positiva della radice, mentre se $p(0) < 0$) se ne deve prendere la determinazione negativa. Ovviamente se $p(0) = 0$ occorre vedere se per $t > 0$ il moto avviene nel semipiano positivo o in quello negativo. In altre parole se $p(0) = 0$ si ha allora $q(0) = q_-(\alpha)$ oppure $q(0) = q_+(\alpha)$: nel primo caso si sceglie la determinazione positiva, mentre nel secondo caso si sceglie la determinazione negativa.

p.71.18 **71.18.** *Osservazione.* La discussione del paragrafo 71.17 mostra che anche in un caso così semplice la funzione caratteristica di Hamilton è una funzione a più valori. In generale, per sistemi a più gradi di libertà, la variabili (β, α) risultano inadeguate per descrivere il moto.

Per esempio se l'intervallo I (cfr. i commenti dopo la (71.22)) è limitato, i.e. I è della forma $I = [q_-(\alpha), q_+(\alpha)]$, e $V'(q_\pm(\alpha)) \neq 0$, il segno in (71.22) andrà determinato nel modo seguente. Supponiamo per semplicità che sia $q(0) = q_-(\alpha)$ e $p(0) = 0$ scriveremo

71.25
$$\beta = t = \int_{q_0}^{q(t)} \mathrm{d}q'\, p(q'), \qquad p(q) = \sqrt{2a(q)\,(\alpha - V(q))}, \tag{71.25}$$

dove si può scegliere, per esempio, $q_0 = q_-(\alpha)$, e potremo usare tale espressione fino al tempo T_1 in cui di nuovo $p(T_1) = 0$. Dopo tale tempo, per $t > T_1$, scriveremo

71.26
$$\beta = T_1 + \int_{q_+(\alpha)}^{q(t)} \mathrm{d}q' \,(-p(q'))\,, \tag{71.26}$$

e useremo tale espressione fino al tempo T_2 tale che $p(T_2) = 0$ ancora una volta. Dopo tale tempo di nuovo avremo

71.27
$$\beta = T_1 + T_2 + \int_{q_0}^{q(t)} \mathrm{d}q' \, p(q'), \tag{71.27}$$

e si vede quindi che β è definito modulo $T = T_1 + T_2$, con T che rappresenta il periodo del moto unimensionale.

Se invece I è illimitato a destra, i.e $I = [q_-(\alpha), +\infty)$, se $p(0) \geq 0$ allora si ha $p(t) > 0$ per ogni $t \geq 0$, e quindi si prende sempre la determinazione positiva. Se inevce $p(0) < 0$ si prende la determinazione positiva fino al tempo T_1 in cui si ha $p(T_1) = 0$: da quell'istante in poi si prenderà la determinazione positiva. In questo caso la variabile β è a un sol valore, e quindi non va interpretata come angolo. Analoghe considerazioni valgono se I è illimitato a sinistra.

p.71.19 **71.19.** Supponiamo che, ponendo $q = (q_1, q')$ e $p = (p_1, p')$, con $z' = (q', p') \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$ e $z_1 = (q_1, p_1) \in \mathbb{R}^2$, la hamiltoniana si possa scrivere nella forma

71.28
$$H(p, q) = F(q', p', G_1(q_1, p_1)), \tag{71.28}$$

per opportune funzioni F e G_1 (di classe C^2). Se poniamo $G_1(q_1, p_1) = \alpha_1$, possiamo allora cercare una funzione caratteristica di Hamilton nella forma

71.29
$$W(q, p) = W(q_1, q', p_1, p') = W'(q', \alpha) + W_1(q_1, \alpha_1), \tag{71.29}$$

e riscrivere la (71.28) nella forma

71.30
$$\begin{cases} G_1\left(q_1, \dfrac{\partial W_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1, \\ F\left(q', \dfrac{\partial W'}{\partial q'}, \alpha_1\right) = \alpha_n, \end{cases} \tag{71.30}$$

dove si è usato il fatto che $\partial W/\partial q' = \partial W'/\partial q'$ e $\partial W/\partial q_1 = \partial W_1/\partial q_1$

Si può allora risolvere la prima equazione in (71.30), procedendo come nel caso dei sistemi unidimensionali (con la funzione G che gioca il ruolo della hamiltoniana per i sistemi unidimensionali), e quindi, successivamente, studiare la seconda equazione in (71.30), che si può interpretare come equazione di Hamilton-Jacobi per un sistema con $n-1$ gradi di libertà (per il quale α_1 è un parametro fissato). Ci siamo quindi ricondotti a un sistema con un grado di libertà in meno.

Supponiamo che il procedimento si possa iterare, i.e. che la funzione F sia della forma

71.31
$$F(q', p', \alpha_1) = F(q'', p'', G_2(q_2, p_2, \alpha_1), \alpha_1), \tag{71.31}$$

dove abbiamo posto $q' = (q_2, q'')$ e $p' = (p_2, p'')$, con $z'' = (q'', p'') \in \mathbb{R}^{2(n-2)}$ e $z_2 = (q_2, p_2)$.

Ragionando come nel caso precedente si può porre

71.32
$$W'(q', p') = W''(q'', \alpha) + W_2(q_2, \alpha_2, \alpha_1), \tag{71.32}$$

e riscrivere la (71.28) nella forma

71.33
$$\begin{cases} G_2\left(q_2, \dfrac{\partial W_2}{\partial q_2}, \alpha_1\right) = \alpha_2, \\ F\left(q'', \dfrac{\partial W''}{\partial q''}, \alpha_2, \alpha_1\right) = \alpha_n, \end{cases} \tag{71.33}$$

dove si è usato il fatto che $\partial W/\partial q'' = \partial W''/\partial q''$ e $\partial W/\partial q_2 = \partial W_2/\partial q_2$.

E così via. Nel caso che il procedimento si possa iterare n volte alla fine avremo scritto la funzione caratteristica nella forma

71.34
$$W(q, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} W_k\left(q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\right), \tag{71.34}$$

e applicando n volte l'analisi discussa nel caso dei sistemi unidimensionali riusciamo a risolvere completamente l'equazione di Hamilton-Jacobi.

p.71.20 **71.20.** DEFINIZIONE (SISTEMA SEPARABILE.) *Si definisce* sistema separabile *un sistema hamiltoniano per il quale l'equazione di Hamilton-Jacobi ammette una funzione caratteristica della forma*

71.35
$$W(q, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} W_k(q_k, \alpha), \tag{71.35}$$

con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

p.71.21 **71.21.** *Osservazione.* L'analisi del paragrafo 71.19 mostra che si ha un sistema separabile se si può scrivere la hamiltoniana nella forma

71.36
$$H(q, p) = h_N\left(h_{N_1}\left(h_{N-2}\left(\ldots h_3\left(h_2\left(h_1\left(z_1\right), z_2\right) z_3\right) \ldots\right)\right)\right), \tag{71.36}$$

per opportune funzioni $h_1, \ldots, h_N$ di classe C^2. In tal caso la funzione caratteristica sarà della forma (71.34).

p.71.22 **71.22.** DEFINIZIONE (SEPARAZIONE DI VARIABILI). *Nel caso di sistemi separabili il procedimento che porta a scrivere la funzione caratteristica di Hamilton nella forma (71.34) prende il nome di procedimento di* separazione di variabili.

p.71.23 **71.23.** *Osservazione.* Se il procedimento descritto al paragrafo 71.19 non si riesce a iterare fino in fondo ma solo per r passi, con $r < n$, non avremo un sistema separabile. Tutavia potremo scrivere la funzione caratteristica nella forma

71.37
$$W(q, \alpha) = W(q_{r+1}, \ldots, q_n, \alpha) + \sum_{k=1}^{r} W_k(q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k), \tag{71.37}$$

dove le funzioni $W_1, \ldots, W_r$ sono le funzioni caratteristiche di r sistemi unidimensionali. In particolare questo implica che si sono trovati r integrali primi $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Quindi nelle nuove variabili possiamo scrivere la hamiltoniana come

71.38
$$K(\alpha, \beta) = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n), \tag{71.38}$$

che può essere quindi utilizzata per studiare il sistema a $n-r$ gradi di libertà descritto dalle variabili $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n)$; cfr. il paragrafo 65.26. Nelle corrispondenti equazioni di Hamilton le variabili $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ appaiono come parametri.

p.71.24 **71.24.** *Osservazione.* Nel caso dei sistemi unidimensionali si è visto che la variabile β può essere interpretata come angolo. Nel caso di sistemi a più gradi di libertà, anche nel caso in cui questi siano separabili, le variabili β si possono scrivere nella forma

71.39
$$\beta_k = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_k}, \tag{71.39}$$

e per ogni i sono possibili due determinazioni, a seconda del segno che si sceglie (cfr. la corrispondente analisi dei sistemi unidimensionali). Tale segno dipenderà dal segno delle variabili p_i, e quindi la determinazione di ciascuna delle β_k cambierà ogni volta che qualcuna delle variabili p_i si annulla. Quindi non è più possibile interpretare le variabili β_k come angoli, perché le variazioni dipendono non solo dai punti iniziali e finali, ma anche dalla traiettoria che li congiunge. In altre parole il moto in ciascuna delle variabili β_k dipende dal moto delle altre variabili $\beta_{k'}$ con $k' \neq k$.

p.71.25 **71.25.** ESEMPIO. Si consideri il sistema descritto dalla hamiltoniana

71.40
$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_2^2}{2} + V_2(q_2) \left(\frac{p_1^2}{2} + V_1(q_1) \right), \tag{71.40}$$

e si dimostri che è separabile.

p.71.26 **71.26.** *Discussione dell'esempio 71.25.* Possiamo scrivere la hamiltoniana (71.40) nella forma (71.36), cosìda ottenere due equazioni della forma (71.30). Quindi possiamo scrivere

71.41
$$S(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = S_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) + S_1(q_1, \alpha_1), \tag{71.41}$$

dove

71.42
$$\begin{aligned} S_1(q_1, \alpha_1) &= \pm \int_{q_{01}}^{q_1} \mathrm{d}q \sqrt{2\,(\alpha_1 - V_1(q))}, \\ S_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) &= \pm \int_{q_{02}}^{q_1} \mathrm{d}q \sqrt{2\,(\alpha_2 - \alpha_1 V_1(q))}, \end{aligned} \tag{71.42}$$

con q_{01} e q_{02} scelti in accordo con la discussione del paragrafo 71.17.

sec.72
72. Variabili azione-angolo

p.72.1 **72.1. Introduzione.**

p.72.2 **72.2. Sistemi unidimensionali.** Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dalla lagrangiana (71.19). Sia la (71.20) la corrispondente hamiltoniana. Supponiamo per semplicità che la funzione $V(q)$ sia convessa. Un esempio è dato dall'oscillatore armonico

72.1
$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2. \tag{72.1}$$

Possiamo individuare il punto nello spazio delle fasi dandone le coordinate (q, p), oppure attraverso il valore di energia $E = H(q, p)$, che fissa la curva di livello nel piano, e l'angolo χ che il raggio vettore che individua il punto (q, p) forma con una direzione prefissata, per esempio con l'asse q. La trasformazione $(q, p) \to (\chi, E)$ è ben definita ma non è una trasformazione canonica. Si può tuttavia costruire una trasformazione canonica, utilizzando la stessa idea di base, nel modo seguente.

Ci proponiamo di costruire quindi una trasformazione di coordinate $(q, p) \to (\varphi, J)$ tale che J sia una costante del moto e χ un angolo e che si abbia $\{\varphi, J\} = 1$. In particolare deve risultare

72.2
$$H(q, p) = K(J) = E, \qquad \oint_\gamma \mathrm{d}\varphi = 2\pi, \tag{72.2}$$

dove K è una opportuna funzione di classe C^2 e γ è la curva di livello di energia E.

Introduciamo a tal fine la seguente funzione generatrice di seconda specie:

72.3
$$F(q, J) = \int_{q_0}^{q} \mathrm{d}q'\, p(q', K(J)), \tag{72.3}$$

dove

72.4 $$p(q, K(J)) = \pm\sqrt{2(K(J) - V(q))}, \tag{72.4}$$

e la funzione $J \to K(J)$ è ancora da determinare. D'altra parte vogliamo che sia $K(J) = E$, e quindi K dovrà essere la funzione inversa della funzione $E \to J = J(E)$, che lega l'energia E con il nuovo momento coniugato J. Quindi vogliamo una funzione K tale che

72.5 $$\frac{\partial K}{\partial J} \neq 0. \tag{72.5}$$

Si noti che, per definizione di funzione generatrice di seconda specie, si deve avere $p = \partial F/\partial q$, quindi occorre (cfr. il paragrafo 70.17)

72.6 $$0 \neq \frac{\partial F}{\partial q \partial J} = \frac{\partial p}{\partial J} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(K(J) - V(q))}}\frac{\partial K}{\partial J}, \tag{72.6}$$

quindi la condizione (72.5) appare naturalmente.

La scelta corretta per J risulta essere

72.7 $$J = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma p\,\mathrm{d}q, \tag{72.7}$$

e se $J = J(E)$ è una trasformazione invertibile allora la trasformazione $(q, p) \to (\varphi, J)$ che si ottiene dalla funzione generatrice (72.3), con $\varphi = \partial F/\partial J$, definisce una trasformazione canonica.

Inoltre la variabile φ è un angolo. Infatti l'incremento della funzione generatrice F dopo un giro completo lungo la curva γ è dato da

72.8 $$\Delta F = S(J) = \oint_\gamma p\,\mathrm{d}q = 2\pi J, \tag{72.8}$$

e, geometricamente, rappresenta l'area racchiusa dalla curva γ nel piano (q, p). Poiché a ogni giro F aumenta di $\Delta F = S(J)$, si vede che $F(q, J)$ è definita modulo $S(J)$ in q. D'altra parte si ha $p = \partial F/\partial q$, e quindi non varia se modifichiamo F per multipli di $S(J)$. L'incremento della variabile φ dopo un giro è invece dato da

72.9 $$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial J}\oint_\gamma p\mathrm{d}q = \frac{\partial S}{\partial J} = 2\pi, \tag{72.9}$$

come segue dalla definizione (72.8), quindi φ è effettivamente un angolo che ruota di 2π dopo un giro completo.

p.72.3 **72.3.** *Osservazione.* Le variabili (J, φ) costituiscono le variabili azione-angolo del sistema unidimensionale considerato.

La definizione si estende immediatamente al caso di sistemi unidimensionali qualsiasi, purché ci si limiti a orbite chiuse nel piano (q, p), oppure a orbite periodiche sul cilindro $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, dove $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ è il *toro unidimensionale.*

p.72.4 **72.4.** *Osservazione.* Nel caso a più gradi di libertà la defnzione di variabili azione-angolo si può dare facilmente. Quello che diventa difficile è, come vedremo, investigare in quali condizioni sia possibile definire tali variabili per un sistema a più gradi di libertà.

p.72.5 **72.5.** DEFINIZIONE (VARIABILI AZIONE-ANGOLO). *Consideriamo un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà, descritto dalle coordinate canoniche (φ, J), tali che le variabili $J_1, \ldots, J_n$ sono integrali primi, mentre le variabili $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sono tali che lasciando variare solo φ_k e fissando le altre $\varphi_{k'}$, $k' \neq k$, allora φ_k torna al valore iniziale dopo una variazione $\Delta\varphi_k = 2\pi$. Chiameremo allora* variabili azione-angolo *le variabili (J, φ).*

p.72.6 **72.6.**

p.72.7 **72.7.**

p.72.9 **72.8.** TEOREMA (ARNOL'D-LIOUVILLE). *Si consideri un sistema a n gradi di libertà indipendente dal tempo. Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi.*
(1) Esistono n integrali primi $F_1, \ldots, F_n$ di classe C^2 in involuzione, i.e. tali che $\{F_i, F_j\}$ per $i, j = 1, \ldots, n$,
(2) La superficie

72.10
$$M_f = \{z \in \mathbb{R}^{2n} : F_k(z) = f_k \text{ per } k = 1, \ldots, n\}, \tag{72.10}$$

con $f = (f_1, \ldots, f_n)$, è una superficie regolare, i.e. i vettori $\partial F_1/\partial z, \ldots, \partial F_n/\partial z$ sono lineramente indipendenti.
(3) La superficie M_f è compatta e connessa.
In tale caso la superficie M_f è diffeomorfa a un toro n-dimensionale. Inoltre esiste un intorno $\mathcal{F}$ di f tale che l'insieme

72.11
$$M_{\mathcal{F}} = \bigcup_{f' \in \mathcal{F}} M_{f'} \tag{72.11}$$

è diffeomorfo a $\mathcal{F} \times M_f$.

p.72.10 **72.9.** *Osservazione.* Il caso $n = 1$ è banale: è quello descritto nel paragrafo 72.2.

p.72.11 **72.10.** *Osservazione.* Dire che M_f è diffeomorfo a un toro n-dimensionale significa che si può parametrizzare (in modo differenziabile) con n variabili angolari. In termini di tali angoli il moto ha n periodi. In generale i periodi sono incommensurabili: in tal caso il moto è detto *moto quasiperiodico.*

p.72.12 **72.11.** *Osservazione.* Che la superficie debba essere compatta si vede già in casi semplici. Se si considera un punto libero in $\mathbb{R}^3$ esistono tre integrali primi in involuzione (le tre componenti della quantità di moto), ma il moto è nello spazio, i.e. non su un toro tridimensionale. La richiesta che la superficie sia connessa è invece meno forte: se non lo è ci si può restringere a una sua componente connessa.

p.72.13 **72.12.** DEFINIZIONE (MOTO MULTIPERIODICO). *Un moto sulla superficie M_f si dice* multiperiodico. *Si chiamano* frequenze del moto multiperiodico *le frequenze con cui variano le variabili angolari.*

p.72.14 **72.13.** *Dimostrazione (in un caso semplice).* Diamo qui la dimostrazione del teorema nel caso (particolarmente) semplice in cui il sistema sia separabile, le funzioni $h_k(q_k, p_k, \ldots)$ in (71.27) dipendano quadraticamente dalle variabili p_k, e i moti unidimensionali siano periodici. Il caso generale sarà discusso nel prossimo paragrafo 73.

Sotto le ipotesi fatte possiamo cercare la funzione caratteristica di Hamilton nella forma

72.12
$$F(q,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} F_k(q_k,\alpha), \tag{72.12}$$

dove la funzione F_k risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi unidimensionale

72.13
$$F_k(q_k,\alpha) = p_k^2 + V_k(q_k,\alpha) = \alpha_k, \tag{72.13}$$

e quindi possiamo esprimere le variabili α in termini delle variabili d'azione, $\alpha = K(J)$, con

72.14
$$J_k = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_k} p_k \mathrm{d}q_k = \frac{1}{\pi}\int_{q_{k,-}(\alpha)}^{q_{k,+}(\alpha)} \mathrm{d}q\sqrt{\alpha_k - V_k(q,\alpha)}, \tag{72.14}$$

dove γ_k è la curva descritta dal moto unidimensionale $t \to (q_k(t), p_k(t))$ ottenuto fissando tutte le variabili tranne le k-esime, i.e. la curva ottenuta esplicitando in (72.12) la variabile p_k in termini di q_k. Quindi $q_{k,-}(\alpha)$ e $q_{k,+}(\alpha)$ sono i due zeri dell'equazione $\alpha_k - V(q,\alpha) = 0$.

La funzione generatrice della trasformazione $(q,p) \to (\varphi, J)$ diventa

72.15
$$F(q,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} F_k(q_k, K(J)), \tag{72.15}$$

così che, in termini della variabili azione-angolo, le equazioni del moto sono

72.16
$$\begin{cases} \dot\varphi_k = \omega_k(J) \equiv \dfrac{\partial K_n}{\partial J_k}, & k = 1,\ldots,n, \\ \dot J_k = 0, & k = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{72.16}$$

dove $\omega(J) = (\omega_1(J), \ldots, \omega_n(J))$ definisce il vettore delle frequenze delle variabili angolari.

La variazione della variabile φ_k lungo una curva γ_j, i.e. in corrispondenza del moto in cui le variabili (q_j, p_j) si muovano lungo la curva γ_j e le altre variabili non cambino, è data da

72.17
$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_j} \mathrm{d}\varphi_k &= \oint_{\gamma_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial J_i} \mathrm{d}J_i \right) \\ &= \oint_{\gamma_j} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j = \oint_{\gamma_j} \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial J_k} \mathrm{d}q_j,\end{aligned} \tag{72.17}$$

dove si è utilizzato il fatto che per il moto considerato si ha $\mathrm{d}J_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $\mathrm{d}q_i = 0$ per ogni $i \neq j$, e si è tenuto conto del fatto che $\varphi_k = \partial F / \partial J_k$. Quindi

72.18
$$\oint_{\gamma_j} \mathrm{d}\varphi_k = \frac{\partial}{\partial J_k} \oint_{\gamma_j} \frac{\partial F}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j = \frac{\partial}{\partial J_k} \oint_{\gamma_j} p_j \, \mathrm{d}q_j = 2\pi \frac{\partial J_j}{\partial J_k} = 2\pi \delta_{i,j}, \tag{72.18}$$

dove, nel derivare rispetto a J_k l'integrale

72.19
$$\oint_{\gamma_j} p_j \, \mathrm{d}q_j = 2 \int_{q_-(J)}^{q_+(J)} \mathrm{d}q_j \sqrt{2(K_j(J) - V_k(q, \alpha))}, \tag{72.19}$$

si è tenuto conto che i termini che si ottengono derivando gli estremi d'integraziione si cancellano in quanto vanno calcolati in corrispondenza dei valori $q_\pm(J)$ in cui si annulla l'integrando.

In conclusione, dopo un giro completo della curva γ_j, la variabile φ_j varia di 2π, mentre tutti gli altri angoli non cambiano. Quindi φ_j è l'angolo che parametrizza la curva γ_j.

p.72.15 **72.14.** *Osservazione.* La dimostrazione è immediatamente generalizzabile al caso in cui invece della (72.13) si abbia

72.20
$$F_k(q_k, \alpha) = a_k(q_k, \alpha) \, p_k^2 + V_k(q_k, \alpha) = \alpha_k, \tag{72.20}$$

con $a_k > 0$. Semplicemente la curva γ_k si ottiene esplicitando p_k in funzione di q_k come

72.21
$$p_k = \pm \sqrt{\frac{2\,(\alpha_k - V_k(q_k, \alpha))}{a_k(q_k, \alpha)}}, \tag{72.21}$$

e per il resto si procede come prima.

p.72.16 **72.15.** *Osservazione.* Altra estensione banale è quella al caso in cui q_k è un angolo (e quindi lo spazio dele fasi è un cilindro) e la curva γ_k si raccorda ai lati del cilindro (cfr. l'osservazione 72.3). In tal caso si ha

72.22
$$J_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_k \mathrm{d}q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}q \sqrt{\alpha - V(q, \alpha)}, \tag{72.22}$$

e rappresenta l'area sottesa al grafico di p_k.

p.72.17 **72.16.** *Osservazione.* Le frequenze del moto multiperiodico sono date da

72.23
$$\omega_k(J) = \frac{\partial \alpha_n}{\partial J_k} = \left(A^{-1}\right)_{nk}, \qquad A_{ij} = \frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j}. \tag{72.23}$$

e quindi si trovano immediatamente una volta che sia nota la dipendenza di J dalle costanti α.

Per esempio se $n = 2$, nel caso di un sistema separabile con funzione caratteristica (71.34), si ha

72.24
$$A \equiv \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} & 0 \\ \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} \end{pmatrix}, \tag{72.24}$$

e quindi

72.25
$$\det A = \det \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}, \tag{72.25}$$

da cui si ricava

72.26
$$A^{-1} = \frac{\partial \alpha}{\partial J} = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & 0 \\ -\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix}. \tag{72.26}$$

In conclusione si ottiene

72.27
$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_1} = -\frac{\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}}, \\ \omega_2 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_2} = -\frac{1}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}}, \end{aligned} \tag{72.27}$$

che rappresentano le frequenze del moto multiperiodico. Se $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$ allora il moto complessivo è periodico, altrimenti è quasiperiodico (cfr. l'osservazione 72.9).

sec.73 73. Dimostrazione del teorema di Arnol'd-Liouville

p.73.1 **73.1.**

p.73.2 **73.2.**

sec.74

74. Alcuni esempi

p.74.1 **74.1. Introduzione.**

p.74.2 **74.2.** ESEMPIO. Sia dato il sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana

74.1
$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) = \frac{1}{2}\dot q_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot q_2^2}{1+q_1^2}\right) - \left(1+q_1^2\right)\left(q_1^2+q_2^2-1\right). \tag{74.1}$$

(1) Si trovi la hamiltoniana.
(2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi, e la si integri per separazione di variabili.
(3) Si determinino le variabili d'azione, ove possibile.
(4) Si determino le frequenze del sistema come integrali definiti

p.74.3 **74.3.** *Discussione dell'esempio 74.2. Hamiltoniana.* Ponendo

74.2
$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_1} = \dot q_1, \\ p_2 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_2} = \dfrac{1}{1+q_1^2}\dot q_2, \end{cases} \tag{74.2}$$

la hamiltoniana si ottiene come trasformata di Legendre della lagrangiana. Quindi la funzione

74.3
$$\begin{aligned} H(q_1,q_2,p_1,p_2) &= \dot q_1 p_1 + \dot q_2 p_2 - \mathcal{L}(q_1,q_2,\dot q_1,\dot q_2) \\ &= \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}\left(1+q_1^2\right)p_2^2 + \left(1+q_1^2\right)\left(q_1^2+q_2^2-1\right) \end{aligned} \tag{74.3}$$

descrive la hamiltoniana del sistema.

p.74.4 **74.4.** *Discussione dell'esempio 74.2. Equazione di Hamilton-Jacobi.* Possiamo riscrivere la hamiltoniana come

74.4
$$H(q_1,q_2,p_1,p_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + \left(q_1^4-1\right) + \left(1+q_1^2\right)\left(\frac{1}{2}p_2^2 + q_2^2\right), \tag{74.4}$$

quindi il sistema è separabile.

Quindi possiamo cercare una funzione caratteritica di Hamilton, che risolva l'equazione di Hamilton-Jacobi

74.5
$$H\left(q_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right) = \alpha_1 \tag{74.5}$$

nella forma

74.6
$$W(q_1,q_2,\alpha_1,\alpha_2) = W_1(q_1,\alpha_1,\alpha_2) + W_2(q_2,\alpha_2). \tag{74.6}$$

Otteniamo dunque

74.7
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2 + {q_2}^2 = \alpha_2, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 + q_1^4 + \alpha_2 q_1^2 - 1 + \alpha_2 = \alpha_1. \end{cases} \tag{74.7}$$

Per risolvere la prima equazione fissiamo α_2 e $q_{2,0}$ in modo che si abbia

74.8
$$\alpha_2 - q_2^2 \geq 0. \tag{74.8}$$

Quindi dobbiamo scegliere $\alpha_2 \geq 0$ e, fissato α_2, dobbiamo scegliere $q_{2,0} \in \mathcal{Q}_2$, dove

74.9
$$\mathcal{Q}_2 = \left\{ q_2 \in \mathbb{R} \,:\, |q_2| \leq \sqrt{\alpha_2} \right\}. \tag{74.9}$$

Quindi

74.10
$$W_2(q_2, \alpha_2) = \pm \int_{q_{2,0}}^{q_2} \sqrt{2(\alpha_2 - (q_2')^2)}\, \mathrm{d}q_2', \tag{74.10}$$

dove $q_{2,0}$ è un valore arbitrario in $\mathcal{Q}_2$ e il segno $\pm$ dipende dal segno del momento p_2 all'istante iniziale.

Per risolvere la seconda equazione dobbiamo fissare α_1 e $q_{1,0}$ in modo che si abbia

74.11
$$\alpha_1 - q_1^4 - \alpha_2 q_1^2 + 1 - \alpha_2 \geq 0. \tag{74.11}$$

Quindi dobbiamo scegliere

74.12
$$\alpha_1 \geq \min_{q_1 \in \mathbb{R}} f(q_1), \tag{74.12}$$

avendo definito

74.13
$$f(q_1) = q_1^4 + \alpha_2 q_1^2 - 1 + \alpha_2, \tag{74.13}$$

e, fissato α_1, dobbiamo scegliere $q_{1,0} \in \mathcal{Q}_1$, dove

74.14
$$\mathcal{Q}_1 = \{ q_1 \in \mathbb{R} \,:\, f(q_1) \leq \alpha_1 \}. \tag{74.14}$$

In conclusione otteniamo

74.15
$$W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{q_{1,0}}^{q_1} \sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1'))}\, \mathrm{d}q_1', \tag{74.15}$$

dove $q_{1,0}$ è un valore arbitrario in $\mathcal{Q}_1$ e il segno $\pm$ dipende dal segno del momento p_1 all'istante iniziale (ovviamente la dipendenza da α_2 è attraverso la funzione f (e quindi anche attraverso la definizione del dominio $\mathcal{Q}_1$).

Dobbiamo quindi studiare la funzione $f(q_1)$.

Chiamiamo $q = q_1$ per semplicità. Poiché la funzione $f(q)$ è pari è sufficiente studiarla per $q \geq 0$. Si ha

74.16
$$\begin{aligned} f(q) &= q^4 + \alpha_2 q^2 - 1 + \alpha_2, \\ f'(q) &= 4q^3 + 2\alpha_2 q, \\ f''(q) &= 12q^2 + 2\alpha_2, \end{aligned} \tag{74.16}$$

così che risulta $f'(q) = 0$ se e sole se $q = 0$; inoltre $f''(0) = 2\alpha_2$. Quindi, se $\alpha_2 > 0$, troviamo che $q = 0$ è un punto di minimo. Se $\alpha_2 = 0$ la funzione $f(q) = q^4 - 1$ ha un unico punto stazionario, $q = 0$, che è ancora un punto di minimo.

In corrispondenza del punto di minimo risulta $f(0) = -1 + \alpha_2$, che dà l'espressione corretta del valore di $f(q)$ in corrispondenza del punto di minimo anche per $\alpha_2 = 0$. Quindi concludiamo che si deve avere

74.17
$$\alpha_1 \geq \min_{q_1 \in \mathbb{R}} f(q_1) = -1 + \alpha_2. \tag{74.17}$$

Per $\alpha_1 \geq -1 + \alpha_2$, l'insieme $\mathcal{Q}_1$ è definito da

74.18
$$\mathcal{Q}_1 = \{ q_1 \in \mathbb{R} \; : \; -q_+(\alpha_1) \leq q_1 \leq q_+(\alpha_1) \}, \tag{74.18}$$

dove $q_+(\alpha_1)$ è la soluzione positiva

74.19
$$q_+(\alpha_1) = \sqrt{\frac{-\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4\,(1 - \alpha_2 + \alpha_1)}}{2}} \tag{74.19}$$

di $f(q) = \alpha_1$.

In conclusione, con le notazioni sopra introdotte, la funzione caratteristica di Hamilton è data da

74.20
$$W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{q_{1,0}}^{q_1} \sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1'))}\, \mathrm{d}q_1' \pm \int_{q_{2,0}}^{q_2} \sqrt{2(\alpha_2 - (q_2')^2)}\, \mathrm{d}q_2'. \tag{74.20}$$

p.74.5 **74.5.** *Discussione dell'esempio 74.2. Variabili d'azione.* L'analisi del punto precedente mostra che possiamo definire le variabili d'azione per $\alpha_2 \in (0, \infty)$ e per $\alpha_1 \in (-1 + \alpha_2, \infty)$.

Definiremo allora

74.21
$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\alpha_2}}^{\sqrt{\alpha_2}} \mathrm{d}q_2 \sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)}, \tag{74.21}$$

mentre avremo

74.22
$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))} \tag{74.22}$$

con le notazioni di prima.

p.74.6 **74.6.** *Discussione dell'esempio 74.2. Frequenze.* Per determinare la frequenze ω_1 e ω_2, si deve tener conto che si ha, per definizione,

74.23
$$\omega_k = \frac{\partial \alpha_1}{\partial J_k}, \qquad k = 1, 2, \tag{74.23}$$

dove $\partial\alpha_1/\partial J_k$ è uguale all'elemento $(A^{-1})_{1k}$ se A è la matrice di elementi

74.24
$$A_{ij} = \frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j}. \tag{74.24}$$

Dobbiamo quindi calcolare la matrice inversa di A. Si ha

74.25
$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} - \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & -\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \\ -\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & -\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \\ 0 & \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{74.25}$$

poiché risulta

74.26
$$\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} = 0, \tag{74.26}$$

dal momento che J_2 dipende solo da α_2.

Alla fine troviamo

74.27
$$\omega_1 = \frac{\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}} = \frac{1}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}}, \qquad \omega_2 = -\frac{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}}, \tag{74.27}$$

e possiamo perciò concludere che le frequenze si possono esprimere in termini dei tre integrali definiti

74.28
$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{\alpha_2}}^{\sqrt{\alpha_2}} \mathrm{d}q_2 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)}}, \\ \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\pi}\int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}, \\ \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}} \left(-\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right), \end{aligned} \tag{74.28}$$

dove si sono utilizzate le espressioni trovate al punto precedente per le variabili d'azione. Inoltre si ha

74.29 $$\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = 1 + q_1^2. \tag{74.29}$$

Quindi introducendo gli integrali nelle espressioni per ω_1 e ω_2 troviamo le frequenze espresse come integrali definiti:

74.30 $$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}}, \\ \omega_2 &= \frac{\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1+q_1^2}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}}{\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{\alpha_2}}^{\sqrt{\alpha_2}} \mathrm{d}q_2 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)}} \, \frac{1}{\pi}\int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}}. \end{aligned} \tag{74.30}$$

Se il rapporto ω_1/ω_2 è razionale allora il moto complessivo è periodico, se tale rapporto è irrazionale allora il moto complessivo è quasiperiodico.

Esercizi

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.

Esercizio 5.

Esercizio 6.

Esercizio 7.

Esercizio 8.

Esercizio 9.

Esercizio 10. Si consideri il sistema unidimensionale costituito da un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza di energia potenziale

$$U(q) = \frac{1}{2n} q^{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(1) Se ne scriva la lagrangiana.
(2) Si determinino la hamiltoniana e le corrispondenti equazioni di Hamilton.

(3) Si riscriva la hamiltoniana in termini delle variabili azione-angolo.
(4) Si trovi il periodo corrispondente in funzione dell'azione.

Esercizio 11.

Esercizio 12. Si consideri un punto materiale P di massa $m = 1$ vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$z^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = 1,$$

sottosposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm 1)$ tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile.
(1) Verificare che la lagrangiana che descrive il sistema è data da

$$\mathcal{L}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)\dot{z}^2 + \left(1 - z^2\right)\dot{\theta}^2 + kz^2 - gz,$$

dove g è l'accelerazione gravitazionale. [Si suggerisce di usare coordinate cilindriche tenendo conto che la coordinata z è legata alle coordinate x, y attraverso l'equazione che definisce l'ellissoide.]
(2) Scrivere la Hamiltoniana del sistema e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
(3) Discutere l'equazione di Hamilton-Jacobi nel caso $g = 0$ e trovare una funzione caratteristica $W(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2)$ per separazione di variabili.
(4) Determinare le variabili d'azione J_1 e J_2 e le frequenze corrispondenti ω_1 e ω_2 in termini di integrali definiti, sempre nel caso $g = 0$.

Esercizio 13. Sia dato il sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_2^2}{\sin^2 q_1}\right) - \sin q_1 \left(1 + \sin q_1 \sin q_2\right).$$

(1) Si trovi la hamiltoniana.
(2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi, e la si integri per separazione di variabili.
(3) Si determinino le variabili d'azione, ove possibile.
(4) Si determino le frequenze del sistema come integrali definiti.

Esercizio 14. Si consideri il sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(1 + x^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin^2\theta}{1+x^2}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2}{1+\sin^2\theta}\right),$$

(1) Si trovi la hamiltoniana.
(2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi, e se ne trovi una funzione caratteristica di Hamilton per separazione di variabili.
(3) Si determinino le variabili d'azione.
(4) Si determino le frequenze dei moti multiperiodici utilizzando le variabili azione-angolo.
(5) Si discuta la periodicità del moto con condizioni iniziali $\theta = 0$, $x = 0$, $\dot{\theta} = 1$, $\dot{x} = \sqrt{2}$.

Bibliografia ragionata

• I testi di riferimento di base, che si sono tenuti principalmente presenti nel testo, sono i seguenti:

[1] G. Dell'Antonio: *Elementi di Meccanica*, Liguori, Napoli, 1996. [Dell'Antonio].

[2] V.I. Arnol'd: *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma, 1979. [Arnol'd2].

[3] A. Fasano, S. Marmi: *Meccanica Analitica*, Boringhieri, Torino, 1994. [Fasano-Marmi].

• Per alcuni argomenti specifici si sono tenuti presenti anche:

[4] M. W. Hirsch, S. Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974. [Hirsch-Smale].

[5] G. Gallavotti: *Meccanica Elementare*, Boringhieri, Torino, 1980. [Gallavotti].

[6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz: *Meccanica*, Editori Riuniti, Roma, 1976. [Landau-Lifshitz].

[7] T. Levi-Civita, U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica Elementare*, Zanichelli, Bologna, 1947. [Levi-Civita-Amaldi].

[8] H. Goldstein: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1980. [Goldstein].

[9] V.I. Arnol'd: *Équations Différentielles Ordinaires*, MIR, Mosca, 1974. [Arnol'd1].

[10] L. Benfatto, R. Raimondi, E. Scoppola: *Meccanica Analitica*, Dispense del Corso di Meccanica Analitica e Statistica, diponibili in rete.

[11] A. Berretti: *Varietà simplettiche*, Dispense del Corso di Meccanica Razionale, disponibili in rete.

[12] G. Benettin, F. Fassò: *Il teorema di Liouville-Arnold*, Dispense del Corso di

Meccanica Razionale, disponibili in rete.

• Per richiami di Analisi, di Geometria e di Algebra si può consultare qualsiasi testo sull'argomento. Noi, a titolo puramente indicativo, abbiamo fatto riferimento a:

[13] E. Giusti: *Analisi Matematica 1*, Boringhieri, Torino, 1985. [Giusti1].

[14] E. Giusti: *Analisi Matematica 2*, Boringhieri, Torino, 1983. [Giusti2].

[15] S. Lang: *Algebra Lineare*, Boringhieri, Torino, 1970. [Lang].

[16] A.G. Kuroš: *Corso di Algebra Superiore*, Editori Riuniti, Roma, 1977. [Kuroš].

[17] E. Martinelli: *Il metodo delle coordinate*, Veschi, Roma, 1984. [Martinelli].

[18] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov: *Modern geometry – Methods and applications. Part III. Introduction to homology theory*, Graduate Texts in Mathematics, 124, Springer-Verlag, New York, 1990. [Dubrovin-Fomenko-Novikov]

Questo è tutto.

Indice analitico

Indice dei nomi

Indice delle materie