

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (06-06-2006)

ESERCIZIO 1. [5] Si consideri l'equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine $\ddot{x} = Ax + B(t)$ in \mathbb{R}^2 , con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (\bar{x}, \bar{y})$. Si scriva esplicitamente la soluzione $x(t)$ in funzione del dato iniziale.

ESERCIZIO 2. [5] Enunciare e quindi dimostrare il teorema della dipendenza continua dai dati iniziali per equazioni differenziali del primo ordine.

ESERCIZIO 3. [5] Si calcoli l'esponenziale della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e si usi il risultato per dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = (0, 1), \end{cases}$$

è data da $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (e^{2t}t, e^{2t})$.

ESERCIZIO 4. [16] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale P di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 2\beta x,$$

dove β è un parametro reale.

(4.1) Studiare il grafico dell'energia potenziale al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$.

(4.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato al variare di β .

(4.3) Se ne discuta la stabilità al variare di β .

(4.4) Si studino qualitativamente la traiettorie del sistema al variare di β .

(4.5) Determinare analiticamente l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche al variare di β .

ESERCIZIO 5. [5] Si consideri un sistema di riferimento mobile K che ruoti con velocità angolare costante ω intorno all'asse verticale di un sistema di riferimento fisso κ . Si dimostri che se un punto materiale P di massa m è fermo nel sistema K allora l'unica forza apparente che agisce su P è la forza centrifuga, e darne l'espressione esplicita.

ESERCIZIO 6. [6] Si dimostri che lo spazio delle configurazioni di un sistema rigido che contenga almeno tre punti non collineari è isomorfo a $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$.