Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (06-06-2006)

CORREZIONE

Esercizio 1. Si riscriva l'equazione $\ddot{x} = Ax + B(t)$ nella forma di un sistema di equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = Ax + B(t), \end{cases}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, e si introduca la variabile $z \in \mathbb{R}^4$ ponendo $z = (x, y)$. Definendo allora

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ A & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(t) \end{pmatrix},$$

dove M è una matrice 4×4 a blocchi 2×2 e $F(t)$ è un vettore in $\mathbb{R}^4$, possiamo riscrivere allora il sistema nella forma

$$\dot{z} = Mz + F(t).$$

La soluzione è allora data dalla formula

$$z(t) = \mathrm{e}^{Mt} \left(\bar{z} + \int_0^t \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{-M\tau} F(\tau) \right),$$

dove $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$. Cfr. Cap. 2, §9, paragrafi 9.4÷9.6 per la dimostrazione dell'ultima affermazione.

Esercizio 2. Cfr. Cap. 7, §11, teorema 11.6 e paragrafo 11.7.

Esercizio 3. Si scrive

$$A = S + N, \qquad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbb{1}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove S è semisemplice (di fatto diagonale) e N nilpotente di ordine 2, i.e. $N^2 = 0$, come è immediato verificare. Inoltre $[S, N] = 0$ (poiché S è proporzionale all'identità), quindi si ha

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^N,$$

dove, per definizione di esponenziale,

$$\mathrm{e}^S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \mathbb{1}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \mathbb{1}}{k!} = \mathbb{1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2 \mathbb{1},$$
$$\mathrm{e}^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = \mathbb{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

così che si ottiene

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ 0 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}.$$

Allo stesso modo si trova $\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{St} \mathrm{e}^{Nt}$, dove

$$\mathrm{e}^{St} = 2^{2t} \mathbb{1}, \qquad \mathrm{e}^{Nt} = \mathbb{1} + Nt = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione di $\dot{x} = Ax$, con dato iniziale $x(0)$ è data da

$$x(t) = \mathrm{e}^{At} x(0) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix},$$

quindi

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t} \left(x_1(0) + t x_2(t) \right), \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t} x_2(t),$$

e per $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 1)$ si ottiene

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t} t, \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

Esercizio 4.

4.1. Grafico dell'energia potenziale. Data l'energia potenziale

$$V(x) = -\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 - 2\beta x,$$

si ha

$$\begin{aligned} V'(x) &= -x^4 + 2x^2 - 2\beta, \\ V''(x) &= -4x^3 + 4x = 4x \left(1 - x^2\right), \end{aligned}$$

così che si ha $V'(x) = 0$ per $x^4 - 2x^2 + 2\beta = 0$, i.e. per

$$x^2 = 1 \pm \sqrt{1 - 2\beta}.$$

Condizione necessaria per avere punti stazionari è quindi che si debba avere $1 - 2\beta \geq 0$, i.e. $\beta \leq 1/2$. In tal caso se $1 - 2\beta > 1$, i.e. $\beta < 0$, solo la determinazione positiva di x^2 va presa poiché quella negativa dà una quantità negativa (e che quindi non può essere un quadrato).

In conclusione:

$$\begin{cases} \beta > 1/2 & \Longrightarrow \quad \text{non ci sono punti stazionari} \,, \\ \beta = 1/2 & \Longrightarrow \quad \text{ci sono due punti stazionari } x = \pm 1 \,, \\ 0 < \beta < 1/2 & \Longrightarrow \quad \text{ci sono quattro punti stazionari } x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 2\beta}} \,, \\ \beta = 0 & \Longrightarrow \quad \text{ci sono tre punti stazionari } x = 0 \text{ e } x = \pm\sqrt{2} \,, \\ \beta < 0 & \Longrightarrow \quad \text{ci sono due punti stazionari } x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2\beta}} \,. \end{cases}$$

Dall'espressione di $V''(x)$ vediamo che, indipendentemente da β, si ha $V''(x) = 0$ per $x \in \{0, \pm 1\}$; inoltre $V''(x) > 0$ per $0 < x < 1$ e per $x < -1$, mentre $V''(x) > 0$ per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$. Quindi $V(x)$ è strettamente convessa in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ e strettamente concava in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

Poiché inoltre $V(x)$ è dispari, e si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} V'(x) = -\infty,$$

possiamo concludere quanto segue.

Per $\beta > 1/2$ si ha $V'(x) < 0$ per ogni x, quindi $V(x)$ è decrescente. In $x = 0$ si ha $V(0) = 0$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 1. Si noti il cambio di concavità in corripondenza dei valori $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ (in questo grafico e nei quattro successivi).

Per $\beta = 1/2$ si ha $V'(x) = 0$ per $x = \pm 1$, mentre si ha $V'(x) < 0$ per ogni $|x| \neq 1$. Quindi $V(x)$ è strettamente decrescente per ogni x tale che $|x| \neq 1$, e in $x = \pm 1$ si ha $V'(x) = V''(x) = 0$: ovvero $V(x)$ ha un flesso orizzontale in $x = -1$ e in $x = 1$. Inoltre $V(0) = 0$, $V(1) < 0$ e $V(-1) > 0$. Il grafico è rappresentato in Figura 2.

Per $0 < \beta < 1/2$ si hanno quattro punti stazionari $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, tali che

$$x_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2\beta}}, \qquad x_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{1 - 2\beta}}, \qquad x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{1 - 2\beta}}, \qquad x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2\beta}}.$$

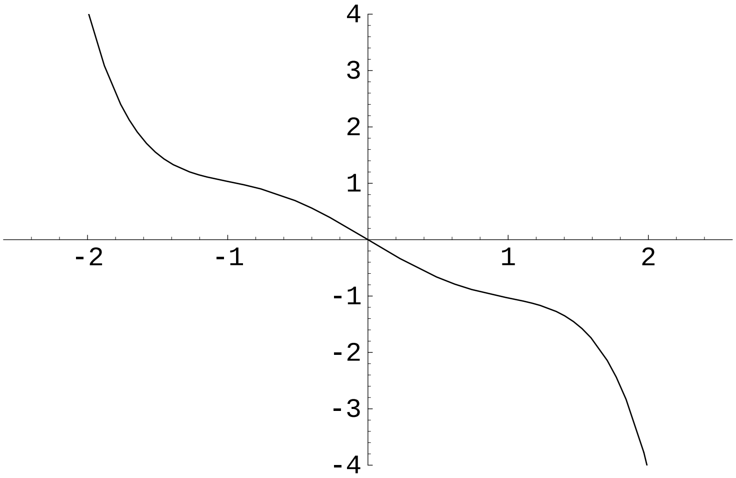

Figura 1. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\beta > 1/2$.

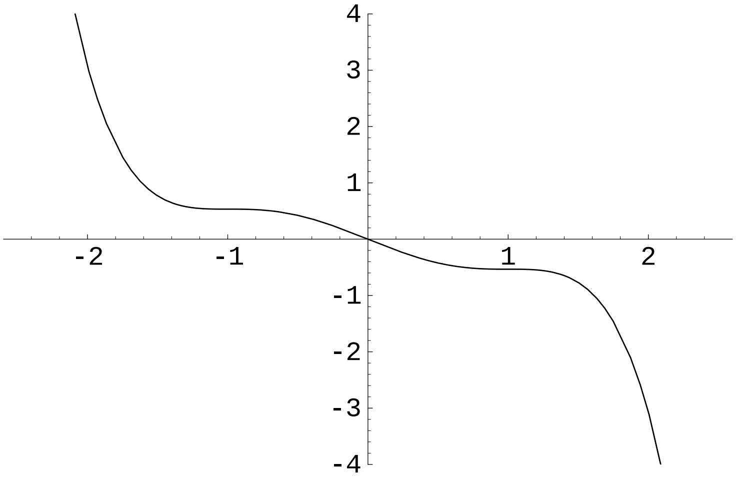

Figura 2. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\beta = 1/2$.

Tenendo conto che $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$ e che $V''(x)$ è strettamente positiva in $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ e strettamente negativa in $(-1,0)\cup(1,\infty)$, si vede subito che risulta

$$V''(x_1) > 0, \qquad V''(x_2) < 0, \qquad V''(x_3) > 0, \qquad V''(x_4) < 0,$$

quindi possiamo concludere che x_1 e x_3 sono punti di minimo, mentre x_2 e x_4 sono punti di massimo. Il grafico è rappresentato in Figura 3.

Per $\beta = 0$ abbiamo i tre punti stazionari $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$ e $x_3 = \sqrt{2}$. Inoltre si ha $V''(x_1) = 4\sqrt{2}$, $V''(x_2) = 0$ e $V''(x_3) = -4\sqrt{2}$. Quindi x_1 è un punto di minimo, x_2 è un punto di flesso orizzontale e x_3 è un punto di massimo. Il grafico è rappresentato in Figura 4.

Infine per $\beta < 0$ abbiamo solo i due punti stazionari $x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{1-2\beta}}$ e $x_2 = \sqrt{1+\sqrt{1-2\beta}}$, che saranno rispettivamente un punto di minimo e un punto di massimo. Questo si può ottenere da considerazioni analoghe a quelle del caso $0 < \beta < 1/2$. Per il grafico si veda la Figura 5.

4.2. Punti d'equilibrio. Il sistema dinamico associato al sistema meccanico unidimensionale dato è

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases}$$

quindi i punti d'equilibrio corrispondenti sono i punti $(x_0, 0)$, con $V'(x_0) = 0$.

Se $\beta > 1/2$ non ci sono punti d'equilibrio. Se $\beta = 1/2$ ci sono due i punti d'equilibrio $(\pm 1, 0)$. Se $0 < \beta < 1/2$ abbiamo i quattro punti d'equilibrio $(x_1, 0) = (-\sqrt{1-\sqrt{1+2\beta}}, 0)$, $(x_2, 0) = (-\sqrt{1-\sqrt{1-2\beta}}, 0)$, $(x_3, 0) =$

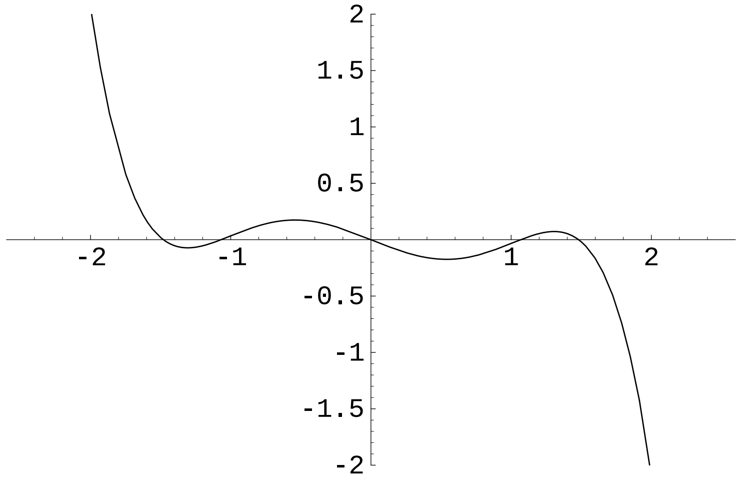

Figura 3. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $0 < \beta < 1/2$.

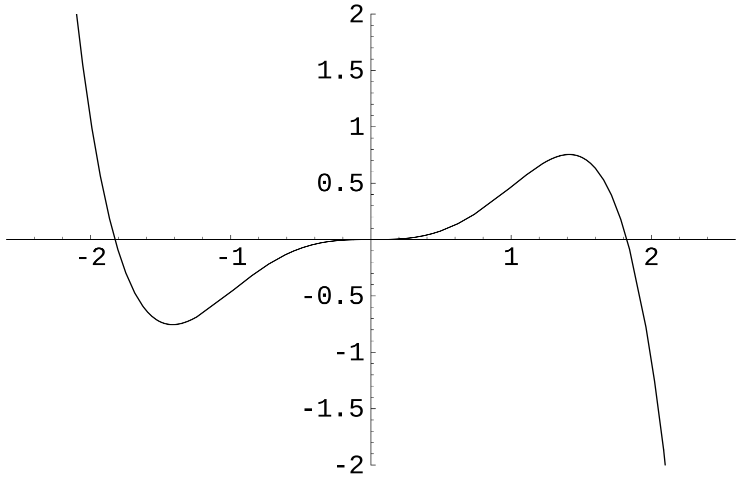

Figura 4. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\beta = 0$.

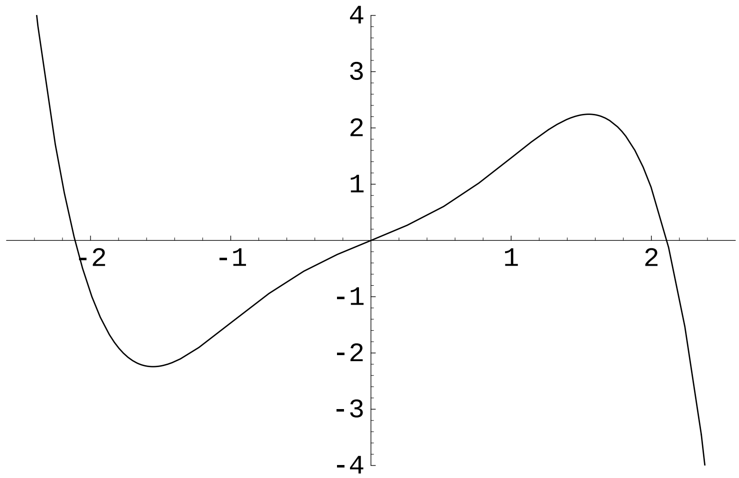

Figura 5. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\beta < 0$.

$(\sqrt{1-\sqrt{1-2\beta}}, 0)$ e $(x_4, 0) = (\sqrt{1+\sqrt{1-2\beta}}, 0)$. Se $\beta = 0$ abbiamo i tre punti d'equilibrio $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, 0)$ e

$(\sqrt{2},0)$. Se $\beta<0$ abbiamo i due punti d'equilibrio $(-\sqrt{1-\sqrt{1-2\beta}},0)$ e $(\sqrt{1-\sqrt{1-2\beta}},0)$.

4.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Per $\beta = 1/2$ i punti d'equilibrio $(\pm 1, 0)$ sono punti d'equilibrio instabile perché corrispondono a punti di flesso orizzontale.

Per $0<\beta<1/2$ i punti d'equilibrio $(x_1,0)$ e $(x_3,0)$ sono punti d'equilibrio stabile, per il teorema di Dirichlet (dal momento che corrispondono a punti di minimo isolati per l'energia potenziale), mentre $(x_2,0)$ e $(x_4,0)$ sono punti d'equilibrio instabile perché corrispondono a punti di massimo.

Per $\beta = 0$ il punto d'equilibrio $(-\sqrt{2},0)$ è un punto d'equilibrio stabile, per il teorema di Dirichlet, mentre i punti d'equilibrio $(0,0)$ e $(\sqrt{2},0)$ sono punti d'equilibrio instabile perché corrispondono il primo a un punto di flesso orizzontale e il secondo a un punto di massimo.

Per $\beta>0$ il punto d'equilibrio $(-\sqrt{1-\sqrt{1-2\beta}},0)$ è un punto d'equilibrio stabile perché corrisponde a un punto di minimo, mentre $(\sqrt{1-\sqrt{1-2\beta}},0)$ è un punto d'equilibrio instabile perché corrisponde a un punto di massimo.

4.4. Analisi qualitativa. Studiamo le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}y^2 + V(x) = E \right\}$$

dell'energia del sistema. Definiamo

$$F(x) = \sqrt{2\,(E - V(x))} = \sqrt{2\left(E + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2\beta x\right)},$$

in modo da poter riscrivere

$$\Gamma_E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm F(x) \right\}.$$

Dai grafici delle Figure 1÷5 vediamo che, per ogni valore di β, $\Gamma_E \neq \emptyset$ per ogni valore di $E \in \mathbb{R}$. Inoltre per ogn valore di E la curva Γ_E è simmetrica rispetto all'asse x, e, poiché $\dot{x} = y$, i versi di percorrenza delle orbite saranno sempre da sinistra a destra nel semipiano superiore e da destra a sinistra nel semipiano inferiore.

Distinguiamo i casi $\beta > 1/2$, $\beta = 1/2$, $1/2 > \beta > 0$, $\beta = 0$ e $\beta < 0$.

Per $\beta > 1/2$ si ha la situazione rappresentata in Figura 6. In tal caso tutte le le curve di livello sono curve aperte, quindi non ci sono né punti d'equilibrio né traiettorie periodiche.

Per $\beta = 1/2$ si ha la situazione rappresentata in Figura 7. La situazione è come nel caso precedente $\beta > 1/2$, tranne che per i valori di energia $E = V(-1)$ ed E= $V(1)$. Per tali valori di energia le curve di livello comprendono 3 orbite ciascuna: il punto d'equilibrio instabile e due orbite lungo le quali il moto è asintotico all'infinito nel futuro e al punto d'equilibrio nel passato (nel semipiano superiore) o viceversa (nel semipiano inferiore).

Per $0 < \beta < 1/2$ si ha la situazione rappresentata in Figura 8. In tal caso si hanno due separatrici, in corrispondenza dei valori di energia $E = V(x_2)$ ed $E = V(x_4)$. Per tali valori di energia le curve di livello comprendono 4 orbite: il punto d'equilibrio instabile, un'orbita omoclina (asintotica al punto d'equilibrio sia nel passato sia nel futuro) e due orbite lungo le quali il moto è asintotico all'infinito nel futuro e al punto d'equilibrio nel passato (nel semipiano superiore) o viceversa (nel semipiano inferiore). In entrambi i casi l'orbita omoclina racchiude al suo interno un punto d'equilibrio stabile e le traiettorie periodiche che corrispondono a valori di energia compresi tra il valore delle'enegia potenziale al punto d'equilibrio stabile e il valore del'energia potenziale alla separatrice (estremi esclusi). Ovviamente per ciascuno di tali valori di energia si ha anche un'altra orbita aperta, contenuta nella regione compresa tra i due rami aperti delle separatrici. Per valori di energia $E > V(x_2)$ ed $E < V(x_3)$ si hanno solo orbite aperte, lungo le quali il moto è asintotico all'infinito sia nel futuro (nel semipiano superiore) sia nel passato (nel semipiano inferiore).

Per $\beta = 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 9. Per $E = V(1)$ si ha una separatrice, costituita dal punto d'equilibrio instabile $(\sqrt{2},0)$, da un'orbta omoclina e da due orbite aperte. Per valori di energia E tale che $V(-\sqrt{2}) < E < V(\sqrt{2})$, purché sia $E \neq 0$, abbiamo un'orbita chiusa all'interno dell'orbita omoclina della separatrice. Per $E = 0$ la curva di livello contiene il punto d'equilibrio instabile $(0,0)$ e un'orbita omoclina lungo la quale il moto è asintotico al punto d'equilibrio stesso. Per ogni E tale che $E > V(\sqrt{2})$ oppure $E < V(-\sqrt{2})$ la curva di livello corrispondente contiene solo un'orbita aperta.

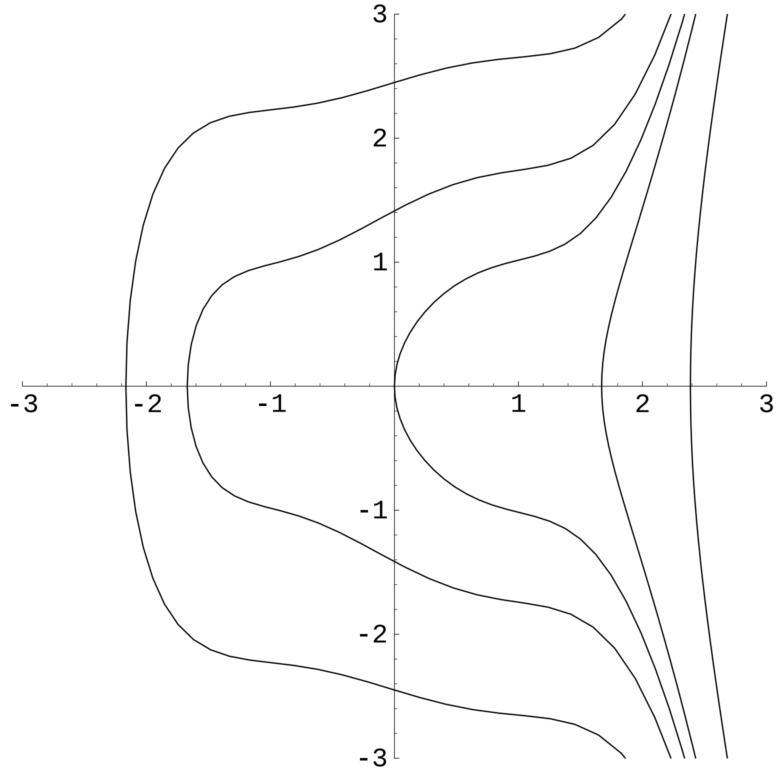

Figura 6. Piano delle fasi per $\beta > 1/2$.

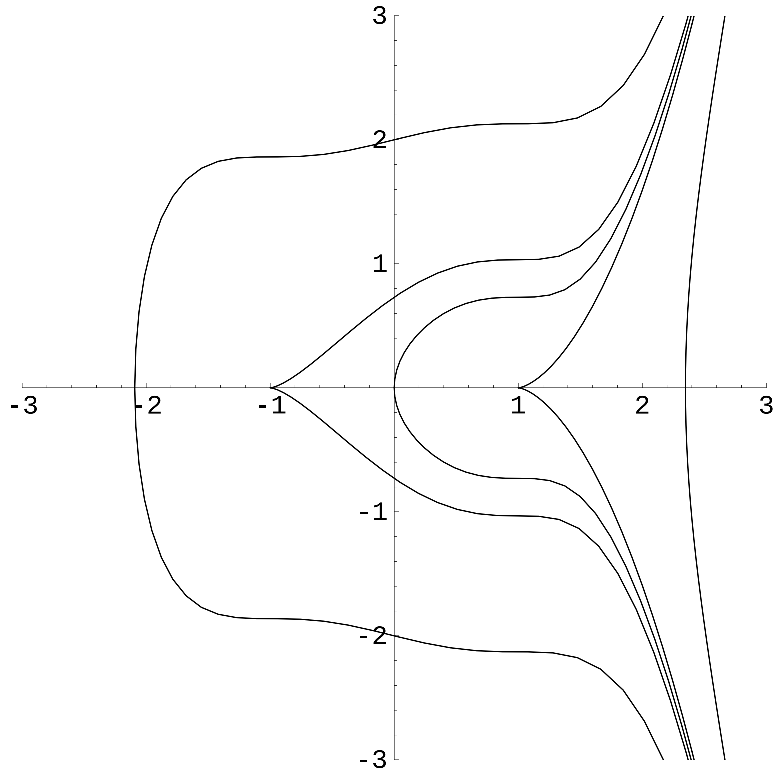

Figura 7. Piano delle fasi per $\beta = 1/2$.

Infine, per $\beta < 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 10. Lo scenario è molto simile al caso precedente,

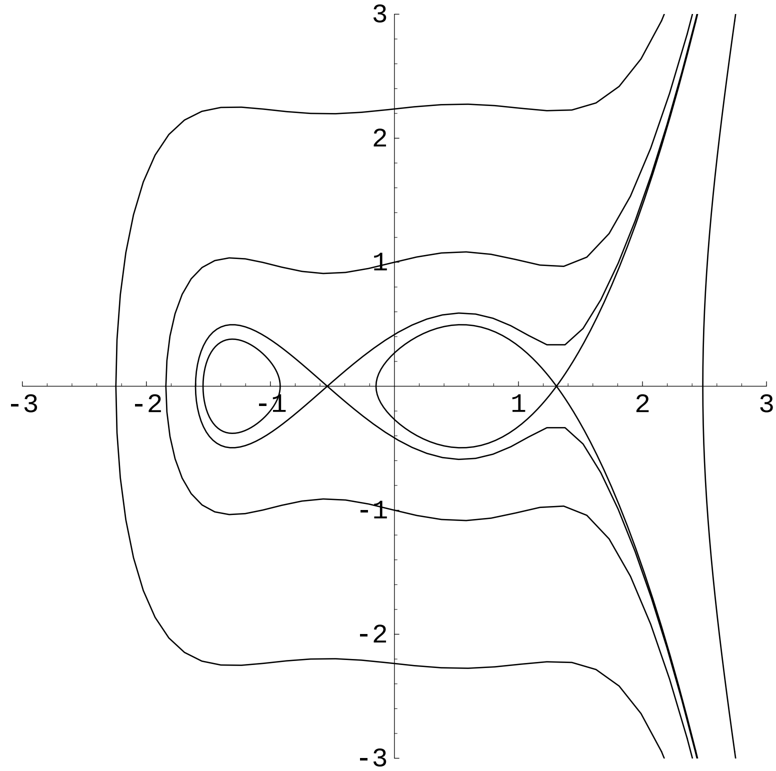

Figura 8. Piano delle fasi per $0 < \beta < 1/2$.

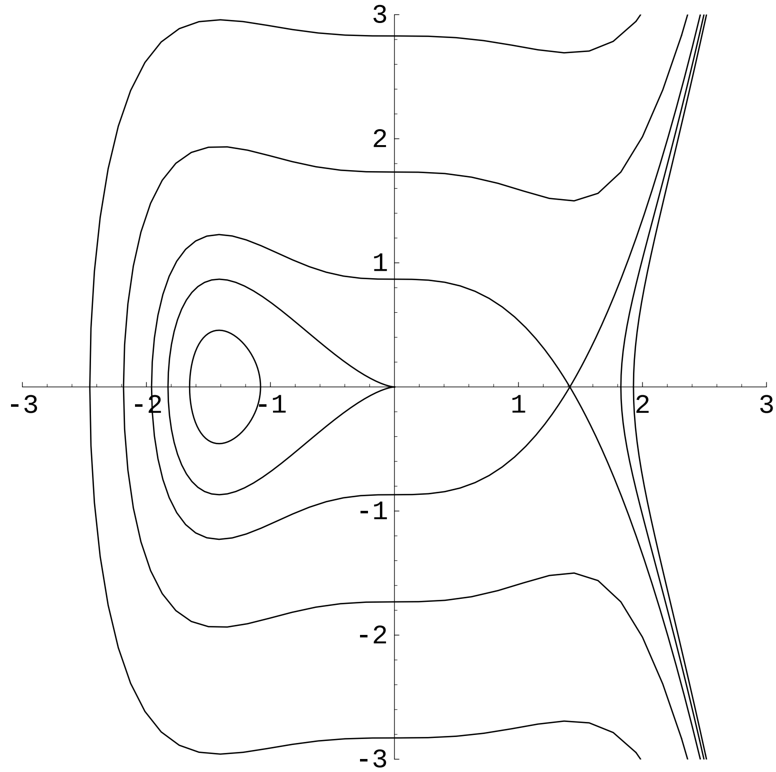

Figura 9. Piano delle fasi per $\beta = 0$.

con l'unica differenza che all'interno dell'orbita omoclina della separatrice ci sono solo traiettorie periodiche

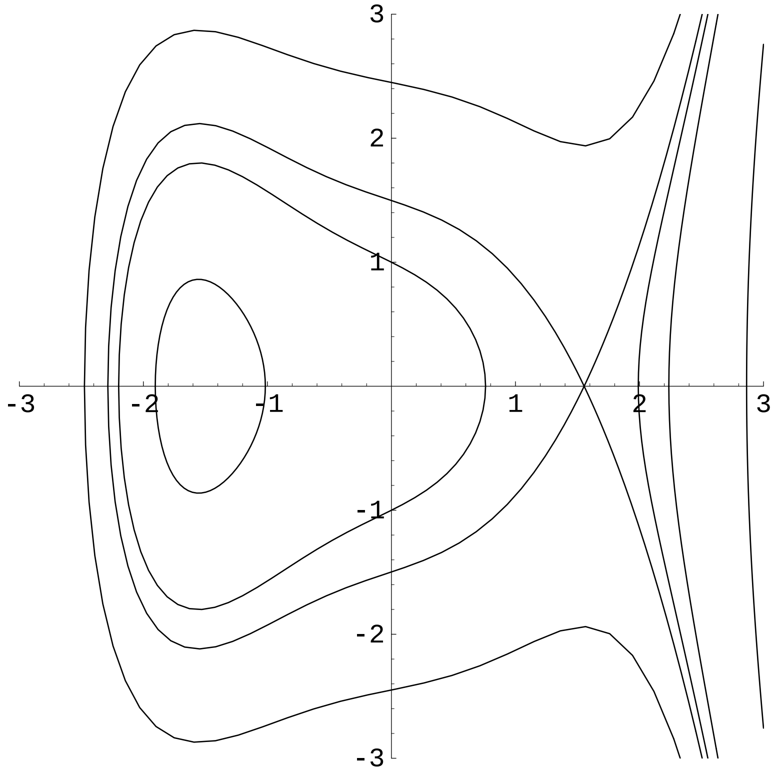

Figura 10. Piano delle fasi per $\beta < 0$.

(oltre al punto d'equilibrio stabile).

4.5. Traiettorie periodiche.

Per $\beta \geq 1/2$ non si hanno traiettorie periodiche.

Per $0 < \beta < 1/2$ si hanno traiettorie periodiche per dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$ in $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, dove

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : V(x_1) < H(\bar{x}, \bar{y}) < V(x_2), \quad \bar{x} < x_2 \right\},$$
$$\mathcal{A}_2 = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : V(x_3) < H(\bar{x}, \bar{y}) < V(x_4), \quad \bar{x} < x_4 \right\},$$

dove abbiamo posto

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + V(x),$$

e abbiamo usato la notazione del punto (4.1) per indicare i punti d'equilibrio per $\beta \in (0, 1/2)$.

Per $\beta = 0$ si hanno traiettorie periodiche per dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$ in $\mathcal{A}_3$, dove

$$\mathcal{A}_3 = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : V(-\sqrt{2}) < H(\bar{x}, \bar{y}) < V(\sqrt{2}), \quad H(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0 \right\},$$

dove $0 = V(0)$ è l'energia della curva di livello contenente il punto d'equilibrio instabile $(0, 0)$.

Per $\beta < 0$ si hanno traiettorie periodiche per dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$ in $\mathcal{A}_4$, dove

$$\mathcal{A}_4 = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : V(x_1) < H(\bar{x}, \bar{y}) < V(x_2) \right\},$$

dove abbiamo usato la notazione del punto (4.1) per indicare i punti d'equilibrio per $\beta < 0$.

<u>Esercizio 5.</u> Cfr. Cap. 8, §34, teorema 34.6 e paragrafo 34.7. Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante si ha $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$, e se P è fermo in K si ha $\dot{\mathbf{Q}} = 0$. Quindi si trova (con le notazioni del Cap. 8) $m\ddot{Q} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{cf}}$, dove $\mathbf{F}_{\text{cf}} = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ è la forza centrifuga che agisce sul punto P.

<u>Esercizio 6.</u> Cfr. Cap. 9, §36, teorema 36.4 e paragrafo 36.5.
