

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (09-01-2007)

ESERCIZIO 1. [5] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

si calcoli A^k per ogni $k \in \mathbb{N}$ e si utilizzi il risultato per calcolare $\exp A$.

ESERCIZIO 2. [8] Dato il problema di Cauchy in \mathbb{R}

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{4} x^{1/5}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

si risponda alle seguenti domande.

(2.1) Si dimostri che esiste più di una soluzione.

(2.2) Si spieghi perché il risultato non è in contraddizione con il teorema di unicità.

(2.3) Quante soluzioni esistono?

(2.4) Cosa succede se si cambia il dato iniziale ponendo $x(0) = 1$? In particolare quante soluzioni esistono?

ESERCIZIO 3. [5] Si consideri il sistema di equazioni differenziali in \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = Ax + f(x),$$

dove A è una matrice $n \times n$ e f è una funzione C^∞ tale che $f(x) = O(|x|^2)$. Si dimostri che se $\operatorname{Re} \lambda < 0$ per ogni autovalore λ di A , allora $x = 0$ è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile per il sistema.

ESERCIZIO 4. [12] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 + 2y^2 - 1 - R^2), \\ \dot{y} = -2x(y^2 - 1), \end{cases}$$

con $R \geq 0$.

(4.1) Si dimostri che la funzione

$$H(x, y) = (x^2 + y^2 - R^2)(y^2 - 1)$$

è una costante del moto per il sistema.

(4.2) Si determinino i punti d'equilibrio al variare di $R \in \mathbb{R}_+$.

(4.3) Se ne discuta la stabilità per $R > 1$.

(4.4) Si studi qualitativamente il moto nel piano (x, y) per $R > 1$.

(4.5) Si discuta la stabilità dei punti d'equilibrio per $R = 1$.

(4.6) Si studi qualitativamente il moto nel piano (x, y) per $R = 1$.

(4.7) Come cambia lo scenario per $R < 1$?

ESERCIZIO 5. [6] Si consideri un sistema che si muova di moto rotatorio rispetto a un sistema di riferimento fisso. Sia $B(t)$ l'operatore lineare che descrive la rotazione del sistema.

(5.1) Si dia la definizione di operatore velocità angolare in termini di $B(t)$.

(5.2) Se ne discutano e dimostri le proprietà principali.

(5.3) Cos'è il vettore velocità angolare e come è legato all'operatore velocità angolare?

ESERCIZIO 6. [6] Si enuncino le tre leggi di Keplero se ne dimostri una a piacere.