

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (11-09-2006)

ESERCIZIO 1. [8] Dato il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = y, \end{cases}$$

se ne calcoli la soluzione $(x(t), y(t), z(t))$ in funzione del dato iniziale (x_0, y_0, z_0) . In particolare si trovi la soluzione che corrisponde al dato iniziale $(1, 0, 0)$.

ESERCIZIO 2. [6] Si descriva il metodo di separazione delle variabili nella soluzione di equazioni differenziali, e se ne dia un esempio.

ESERCIZIO 3. [6] Si enunci e dimostri il teorema di Dirichlet sulla stabilità dei sistemi meccanici conservativi.

ESERCIZIO 4. [6] Si discutano le forze apparenti, e si fornisca un esempio in cui queste si riducano alla sola forza centrifuga. È possibile una situazione in cui l'unica forza apparente ad agire sia la forza di Coriolis?

ESERCIZIO 5. [10] Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \alpha \log(1 + \rho^2),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere il moto della variabile $\rho(t)$, rispondendo alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare del sistema.

- (5.1) Scrivere l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.
- (5.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (5.3) Disegnare il grafico del potenziale efficace.
- (5.4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (5.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (5.6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 6. [6] Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens-Steiner.