

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

SECONDA PROVA D'ESONERO (30-05-2006)

ESERCIZIO 1. [5] Si consideri una traiettoria periodica di un sistema meccanico conservativo unidimensionale. Si dimostri che il periodo si può scrivere come integrale definito in funzione dell'energia  $E$ .

ESERCIZIO 2. [5] Dimostrare che in un moto centrale si conserva il momento angolare.

ESERCIZIO 3. [6] Discutere il moto di un punto materiale in un campo centrale nel caso in cui la variabile radiale descriva un moto periodico. In particolare spiegare sotto quali condizioni il moto del punto materiale risulta periodico.

ESERCIZIO 4. [15] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{5}\alpha x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 2\beta x,$$

dove  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Si consideri preliminarmente il caso  $\alpha = 0$ .

(4.1) Studiare il grafico dell'energia potenziale al variare del parametro  $\beta$ .

(4.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato al variare di  $\beta$ .

(4.3) Se ne discuta la stabilità al variare di  $\beta$ .

(4.4) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema al variare di  $\beta$ .

(4.5) Si consideri ora il caso  $\alpha > 0$ : si risponda alle stesse domande sopra, al variare dei parametri  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

ESERCIZIO 5. [5] Si dimostri che la matrice velocità angolare è una matrice antisimmetrica, e che la sua azione si può descrivere attraverso l'azione di un prodotto vettoriale.

ESERCIZIO 6. [6] Definire l'operatore d'inerzia, e dimostrare che è un operatore lineare simmetrico definito positivo. Si dia un esempio esplicito di un caso in cui l'operatore non è definito strettamente positivo.