Capitolo 10. Proprietà dei sistemi rigidi

42. Momenti d'inerzia ed ellissoide d'inerzia

42.1. Introduzione. Abbiamo visto nel capitolo precedente, precisamente nel paragrafo §40, le formule che, nel caso di sistemi rigidi, esprimono le leggi di variazione rispetto al tempo della quantità di moto e del momento angolare.

In particolare se consideriamo un sistema rigido non soggetto ad altri vincoli che non siano quelli di rigidità, allora le equazioni del moto sono date dalle equazioni (40.1), dove $\mathbf{f}$ e $\mathbf{n}$ rappresentano, rispettivamente, la risultante delle forze attive agenti sul sistema e il risultante dei momenti di tale forze (in altre parole per il calcolo di $\mathbf{f}$ e di $\mathbf{n}$ possiamo ignorare le forze vincolari): questo segue dal principio di d'Alembert.

Se al contrario il sistema rigido ha un punto fisso, occorre considerare in aggiunta la reazione vincolare che si genera nel punto fisso O, mentre il momento corrispondente a tale reazione rispetto al punto O è ovviamente nullo: le corrispondenti equazioni del moto sono date dalle equazioni (40.11). Ci si riferisce a tale situazione talvolta, un po' impropriamente, come a un sistema rigido "libero con un punto fisso".

Si noti che in entrambi i casi la legge di variazione del momento angolare è la stessa.

Nel presente capitolo considereremo in grande dettaglio il caso di un sistema rigido non soggetto a forze.

Abbiamo visto che un sistema rigido è un sistema a 6 gradi di libertà, e che il suo spazio delle configurazioni è dato da $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$ (cfr. il teorema 36.4). È quindi naturale attendersi che molte proprietà del moto di un sistema rigido non dipendano dalla particolare forma che esso ha: questo può essere formalizzato introducendo la nozione di ellissoide d'inerzia.

42.2. Notazioni. Siano κ e K due sistemi di riferimento, il primo fisso e il secondo solidale con un sistema rigido che ruota intorno a un punto fisso O, che assumiamo coincidere con l'origine di entrambi i sistemi di riferimento (quindi nel sistema K, il sistema rigido è in quiete). Ogni vettore dello spazio K è trasformato in un vettore dello spazio κ da un operatore $B \equiv B_t$. I vettori corrispondenti negli spazi K e κ saranno indicati con la stessa lettera, maiuscola per i vettori in K e minuscola per i vettori in κ.

L'operatore B conserva la metrica e l'orientazione, quindi conserva anche il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e il prodotto vettoriale $[\cdot, \cdot]$.

Per definizione di velocità angolare e di momento angolare di un punto di massa m rispetto al punto fisso O, si ha (cfr. la (37.1) o la (37.17) con $N = 1$)

$$\mathbf{l} = m\,[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}] = m\,[\mathbf{q}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}]], \qquad \mathbf{L} = m\,[\mathbf{Q}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]], \tag{42.1}$$

se $\mathbf{l}$ è il momento angolare e $\mathbf{l} = B\mathbf{L}$ (la relazione tra $\mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}$ è data $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q} - \mathbf{q}_O = B\mathbf{Q}$). Dalla (42.1) segue l'esistenza di un operatore lineare $A\colon K \to K$, che trasforma $\boldsymbol{\Omega}$ in $\mathbf{L}$,

$$A\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}, \tag{42.2}$$

che prende il nome di *operatore d'inerzia* (del punto mobile).

42.3. LEMMA. *L'operatore d'inerzia è simmetrico e definito positivo, i.e. , fissata una qualsiasi base in $\mathbb{R}^3$, esso è rappresentato da una matrice simmetrica definita positiva.*

42.4. *Dimostrazione del lemma 42.3.* Per ogni $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K$, abbiamo, applicando due volte la (37.7),

$$\langle \mathbf{X}, A\mathbf{Y} \rangle = m \, \langle \mathbf{X}, [\mathbf{Q}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Q}]] \rangle = m \, \langle [\mathbf{X}, \mathbf{Q}], [\mathbf{Y}, \mathbf{Q}] \rangle \, , \tag{42.3}$$

che è un'espressione simmetrica in $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. In particolare, se scegliamo $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, la (42.3) dà $\langle \mathbf{X}, A\mathbf{X} \rangle = m|[\mathbf{X}, \mathbf{Q}]|^2 \geq 0$. ■

42.5. La (42.2) si può esprimere nello spazio κ

$$a\boldsymbol{\omega} = \mathbf{l}, \qquad a = BAB^T, \tag{42.4}$$

così che, dalla (42.1) e dalla (42.4), segue che, fissato un sistema di coordinate cartesiane, l'operatore a può essere rappresentato attraverso la matrice di elementi

$$a_{ij} = m\big(|\mathbf{q}|^2 \delta_{ij} - q_i q_j\big), \tag{42.5}$$

come è immediato verificare calcolando esplicitamente i prodotti vettoriali in (42.1); cfr. l'esercizio 1. Analogamente, nello spazio K, si ha

$$A_{ij} = m\big(|\mathbf{Q}|^2 \delta_{ij} - Q_i Q_j\big), \tag{42.6}$$

ovvero, più esplicitamente,

$$A = \begin{pmatrix} m\left(Q_2^2 + Q_3^2\right) & -mQ_1Q_2 & -mQ_1Q_3 \\ -mQ_1Q_2 & m\left(Q_1^2 + Q_3^2\right) & -mQ_2Q_3 \\ -mQ_1Q_3 & -mQ_2Q_3 & m\left(Q_1^2 + Q_2^2\right) \end{pmatrix}. \tag{42.7}$$

Dalla (42.6) risulta evidente che A è una costante del moto; infatti dipende solo dalle coordinate $\mathbf{Q}$ del punto materiale di massa m nel sistema K in cui esso è fisso.

42.6. LEMMA. *L'energia cinetica di un punto di un sistema rigido, nel sistema di riferimento solidale con esso, è data da*

$$T = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\Omega}, A\boldsymbol{\Omega} \rangle . \tag{42.8}$$

dove A è l'operatore d'inerzia e $\boldsymbol{\Omega}$ il vettore velocità angolare nel sistema K solidale con il sistema rigido.

42.7. *Dimostrazione del lemma 42.6.* Dal corollario 37.6 con $N = 1$ e $\mathbf{q}_O = \mathbf{0}$, dalla prima delle (42.1) e dalla (42.4) segue che

$$T = \frac{1}{2} m \left| \mathbf{v} \right|^2 = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, a\boldsymbol{\omega} \rangle , \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}. \tag{42.9}$$

L'operatore B e il prodotto scalare conservano la metrica, quindi la (42.9) è equivalente alla (42.8). Alternativamente, poiché $\mathbf{v} = B\mathbf{V} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}]$ e $\left| \mathbf{V} \right|^2 = \langle [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}], [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] \rangle$ $= \langle \boldsymbol{\Omega}, [\mathbf{Q}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]] \rangle$, la (42.8) segue dalle (42.2) e dalla definizione di energia cinetica $T = m \left| \mathbf{v} \right|^2 /2 = m \left| \mathbf{V} \right|^2 /2$. ■

42.8. Finora abbiamo considerato un unico punto materiale: se abbiamo un sistema rigido costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$, di masse, rispettivamente, $m_1, \ldots, m_N$, e $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_N$ sono i vettori che li individuano nel sistema di riferimento solidale con il sistema rigido, possiamo introdurre per ciasuno di essi il momento angolare $\mathbf{L}_i = m_i [\mathbf{Q}_i, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}_i]]$ e definire il momento angolare totale del sistema come

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i [\mathbf{Q}_i, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}_i]]; \tag{42.10}$$

analogamente possiamo definire

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i [\mathbf{q}_i, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i]], \tag{42.11}$$

con ovvio significato dei simboli, nel sistema di riferimento fisso; cfr. il paragrafo §37.

42.9. TEOREMA. *Dato un sistema rigido costituito da N punti materiali di masse $m_1, \ldots, m_N$, il momento angolare $\mathbf{L}$ di tale sistema rispetto all'origine O del sistema solidale con esso dipende linearmente dalla velocità angolare, i.e. esiste un operatore $I \colon K \to K$, tale che*

$$I\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}; \tag{42.12}$$

inoltre l'operatore I è simmetrico e definito positivo.

Conseguentemente l'energia cinetica del sistema rigido, nel sistema di riferimento solidale con esso, è data da

$$T = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\Omega}, I\boldsymbol{\Omega}\rangle = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L}\rangle \tag{42.13}$$

ed è quindi una forma quadratica definita positiva nella velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$*. L'operatore* I *prende il nome di* operatore d'inerzia *(del sistema rigido).*

42.10. *Dimostrazione del teorema 42.9.* Per definizione il momento angolare di un sistema rigido costituito da N punti è dato dalla somma dei momenti della quantità di moto dei suoi punti (cfr. il paragrafo §42.8). Quindi

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N} A_i \boldsymbol{\Omega} \equiv I\boldsymbol{\Omega}, \tag{42.14}$$

avendo definito $I = \sum_{i=1}^{N} A_i$ l'operatore d'inerzia del sistema rigido, se A_i è l'operatore d'inerzia del punto P_i. La (42.14) implica la (42.12). Per il lemma 42.3, I è simmetrico e definito positivo.

Poiché anche l'energia cinetica del sistema rigido è data dalla somma delle energie cinetiche dei suoi punti, segue anche la (42.13). Poiché I è definito positivo, T è definita positiva. ■

42.11. *Osservazione.* Se il sistema rigido ha un punto fisso, l'operatore d'inerzia nel sistema di riferimento fisso κ è dato da

$$i \equiv i(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t) = B_t I B_t^T, \tag{42.15}$$

dove $a_i(t) = B_t A_i B_t^T$; quindi, contrariamente a I, $i(t)$ è funzione del tempo (come segue dalla (42.5). Nel sistema κ, l'energia cinetica T assume la forma $2T = \langle \boldsymbol{\omega}, i\boldsymbol{\omega}\rangle \equiv \langle \boldsymbol{\omega}(t), i(t)\boldsymbol{\omega}(t)\rangle$.

42.12. DEFINIZIONE (ASSI D'INERZIA E MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA). *Chiameremo* assi d'inerzia *gli autovettori dell'operatore d'inerzia* I *e* momenti principali d'inerzia *gli autovalori corrispondenti.*

42.13. *Osservazione.* Si noti che l'operatore I, essendo simmetrico, ammette tre autovalori reali e autovettori ortogonali $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (cfr. gli esercizi 6÷10 del capitolo 1). Se gli autovalori non sono tutti distinti, gli assi d'inerzia non sono determinati in modo univoco. Poiché I è positivo, i suoi autovalori sono positivi (cfr. l'esercizio 2).

42.14. *Osservazione.* La (42.13) si può scrivere

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right), \tag{42.16}$$

se $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ è decomposta lungo le direzioni degli assi d'inerzia. Infatti, scrivendo $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3$, si ha $I\boldsymbol{\Omega} = I_1 \Omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \Omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \Omega_3 \mathbf{e}_3$ e, tenendo conto che $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, segue immediatamente la (42.16).

42.15. *Osservazione.* Se indichiamo con $\mathbf{Q}$ le coordinate nella base degli assi d'inerzia, si ha

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(Q_{i2}^2 + Q_{i3}^2 \right), \\ I_2 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(Q_{i1}^2 + Q_{i3}^2 \right), \\ I_3 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2 \right), \end{aligned} \tag{42.17}$$

come segue dalla (42.7) e dalla considerazione che nella base degli assi d'inerzia la matrice che rappresenta l'operatore d'inerzia è diagonale.

42.16. Definizione (Momento d'inerzia). *Dato un sistema rigido costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ e dato un asse $\mathbf{e}$, indichiamo con r_i la distanza del punto P_i da $\mathbf{e}$, per $i = 1, \ldots, N$. Definiamo* momento d'inerzia del sistema rigido rispetto all'asse $\mathbf{e}$ *la grandezza*

$$I_{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \tag{42.18}$$

dove m_i è la massa del punto P_i.

42.17. Corollario. *Gli autovalori I_1, I_2, I_3 dell'operatore d'inerzia I sono i momenti d'inerzia del sistema rispetto agli assi d'inerzia.*

42.18. *Dimostrazione del corollario 42.17.* Segue dalle definizioni 42.12 e 42.16, non appena si tenga conto della forma della matrice (42.7) e del fatto che, nella base degli autovettori, la matrice che rappresenta l'operatore d'inerzia $I = \sum_{i=1}^{N} A_i$ è una matrice diagonale (cfr. l'osservazione 42.15). ■

42.19. *Osservazione.* L'energia cinetica di un sistema rigido vincolato a un punto O, che ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$ (dove $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$) intorno all'asse $\mathbf{e}$ è data da

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathbf{e}} \Omega^2, \tag{42.19}$$

con le notazioni del paragrafo §42.16. Infatti, scegliendo un sistema di coordinate in cui $\mathbf{e}$ abbia componenti $(0,0,1)$, si ha $\langle \mathbf{e}, A_i \mathbf{e} \rangle = A_{i33} = m_i (Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2) = m_i r_i^2$, se m_i è la massa del punto P_i e r_i è la sua distanza dall'asse verticale (coincidente con

e). Quindi $2T = \langle \Omega \mathbf{e}, I \Omega \mathbf{e} \rangle = \Omega^2 \langle \mathbf{e}, I \mathbf{e} \rangle = \Omega^2 \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}, A_i \mathbf{e} \rangle = \Omega^2 I_{\mathbf{e}}$, in virtù della (42.18).

42.20. DEFINIZIONE (ELLISSOIDE D'INERZIA). *Si definisce* ellissoide d'inerzia *l'ellissoide*

$$\mathcal{E} = \{ \boldsymbol{\Omega} : \langle \boldsymbol{\Omega}, I \boldsymbol{\Omega} \rangle = 1 \}. \tag{42.20}$$

Nella base degli assi d'inerzia, l'ellissoide $\mathcal{E}$ ha la forma

$$I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 = 1; \tag{42.21}$$

quindi gli assi dell'ellissoide d'inerzia sono diretti lungo gli assi d'inerzia e la loro lunghezza è due volte $1/\sqrt{I_j}$, $j = 1, 2, 3$. Se l'ellissoide d'inerzia è invariante per rotazioni intorno a uno degli assi d'inerzia, e.g. $\mathbf{e}_3$ (quindi $I_1 = I_2$), diremo che è un ellissoide di rotazione.

42.21. *Osservazione.* Se un sistema rigido è schiacciato lungo un qualsiasi asse, allora il momento d'inerzia rispetto a tale asse sarà piccolo (cfr. il paragrafo §42.16), quindi anche l'ellissoide d'inerzia sarà schiacciato lungo lo stesso asse.

42.22. Proprietà degli ellissoidi d'inerzia. Se un sistema rigido possiede un *asse di simmetria di ordine n* passante per il punto fisso O (*i.e.* il sistema rigido si sovrappone a sé stesso in seguito a una rotazione di $2\pi/n$ intorno all'asse), allora l'ellissoide d'inerzia possiede la stessa simmetria rispetto a quell'asse.

Se **e** è un asse di simmetria di ordine n per ogni $n \geq 1$ allora diremo che **e** è un *asse di simmetria rotazionale.*

Gli assi d'inerzia costituiscono ovviamente assi di simmetria di ordine 2 per l'ellissoide d'inerzia; viceversa se un ellissoide d'inerzia ammette un asse **e** di simmetria di ordine 2 allora **e** deve essere un suo asse d'inerzia (cfr. l'esercizio 3). Inoltre un ellissoide d'inerzia non può avere assi di simmetria di ordine $n > 2$ che non siano assi di simmetria rotazionale (cfr. l'esercizio 4): in tal caso l'ellissoide d'inerzia è un ellissoide di rotazione.

Se allora un sistema rigido ammette un asse di simmetria di ordine 2, tale asse deve essere anche un asse di simmetria di ordine 2 per il corrispondente ellissoide d'inerzia, e quindi deve essere un asse d'inerzia.

Se un sistema rigido ammette un asse **e** di simmetria di ordine $n > 2$, allora tale asse è *a fortiori* un asse di simmetria di ordine n per l'ellissoide d'inerzia. Ma, poiché abbiamo visto che un ellissoide d'inerzia può avere assi di simmetria di ordine $n > 2$ solo se è un ellissoide di rotazione, ne segue che in tal caso **e** deve essere un asse d'inerzia dell'ellissoide: più precisamente uno degli assi d'inerzia dell'ellissoide sarà diretto lungo **e**, mentre gli altri due saranno due assi perpendicolari (ma per il resto arbitrari) contenuti nel piano ortogonale a **e**.

Se un sistema rigido ammette due assi di simmetria di ordine $n > 2$ distinti, allora l'ellissoide d'inerzia deve essere una sfera (cfr. l'esercizio 5). Se infine un sistema rigido ammette due assi di simmetria distinti $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$, tali che (1) l'angolo tra i due assi sia diverso da $\pi/2$ e (2) almeno uno dei due assi sia di simmetria di ordine $n > 2$, allora di nuovo l'ellissoide d'inerzia deve essere una sfera (cfr. l'esercizio 6).

42.23. *Osservazione.* Si noti che se $\boldsymbol{\Omega}(t)$ è la velocità angolare del sistema rigido, allora dal confronto della (42.13) con la (42.19) si vede che $\boldsymbol{\Omega}(t)/\sqrt{2T} \in \mathcal{E}$. Il vettore $\mathbf{L}(t)$ (momento angolare) per un sistema rigido che ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}(t)$ ha direzione normale alla superficie del suo ellissoide d'inerzia $\mathcal{E}$ nel suo punto di intersezione con l'asse di $\boldsymbol{\Omega}(t)$, *i.e.* nel punto $\boldsymbol{\Omega}(t)/\sqrt{2T}$; infatti la normale all'ellissoide $\mathcal{E}$ nel punto $\boldsymbol{\Omega}$ è diretta lungo il vettore $\nabla \langle \boldsymbol{\Omega}, I\boldsymbol{\Omega} \rangle = 2I\boldsymbol{\Omega}$ (cfr. l'esercizio 7) e, se $\boldsymbol{\Omega}(t)$ è la velocità angolare del sistema rigido, allora $I\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{L}(t)$ (cfr. la (42.14)).

42.24. *Osservazione.* Se un sistema rigido ha un asse di simmetria rotazionale (*i.e.* è invariante per rotazioni intorno a un suo asse), allora possiamo determinare a priori le direzioni dei suoi assi d'inerzia. Infatti, dalla definizione di operatore d'inerzia (cfr. la (42.7) e il paragrafo §42.10), se scegliamo un sistema di coordinate in cui si abbia $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ e definiamo

$$c_0 = \sum_{i=1}^{N} m_i \big(Q_{i1}^2 + Q_{i2}^2\big), \tag{42.22}$$

abbiamo che l'azione dell'operatore d'inerzia I sull'asse di simmetria $\mathbf{e}$ dà $I\mathbf{e} = c_0\mathbf{e}$, come si può verificare immediatamente tenendo conto che, per simmetria, per ogni punto con coordinate (Q_1, Q_2, Q_3) ce n'è uno con coordinate $(-Q_1, -Q_2, Q_3)$. Quindi $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}$ è un asse d'inerzia e il momento principale d'inerzia associatogli è $I_3 \equiv c_0$. Inoltre $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ sono perpendicolari a $\mathbf{e}_3$: per simmetria una qualsiasi scelta di due assi ortogonali tra loro e contenuti nel piano perpendicolare a $\mathbf{e}_3$ e passante per il centro d'inerzia del sistema rigido è valida (cfr. l'osservazione 42.13).

42.25. TEOREMA (HUYGENS-STEINER). *Il momento d'inerzia I di un sistema rigido rispetto a un asse $\mathbf{e}$ parallelo all'asse $\mathbf{e}_0$ passante per il centro d'inerzia è legato al momento d'inerzia I_0 rispetto all'asse $\mathbf{e}_0$ dalla relazione*

$$I = I_0 + mr^2, \tag{42.23}$$

dove m è la massa del sistema e r la distanza tra i due assi $\mathbf{e}_0$ ed $\mathbf{e}$.

42.26. *Dimostrazione del teorema 42.25.* Segue dalla definizione di momento d'inerzia (cfr. il paragrafo §42.16). Infatti risulta

$$I \equiv I_{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \qquad I_0 \equiv I_{\mathbf{e}_0} = \sum_{i=1}^{N} m_i (r_{0i})^2, \tag{42.24}$$

se r_i e r_{0i} denotano la distanza del punto P_i, rispettivamente, dall'asse $\mathbf{e}$ e dall'asse $\mathbf{e}_0$.

Sia π un piano ortogonale ai due assi: ogni punto P_i sarà individuato da un vettore $\mathbf{r}_i$ (di lunghezza r_i), che ne definisce la distanza dall'asse $\mathbf{e}$, e da un vettore $\mathbf{z}_i$, che ne definisce la distanza dal piano π; analogamente possiamo individuare tale punto dando i vettori $\mathbf{r}_{0i}$ e $\mathbf{z}_i$ che ne definiscono la distanza dall'asse $\mathbf{e}_0$ e la distanza dal piano π, rispettivamente. Denotiamo con $\mathbf{r}$ il vettore (di lunghezza r) sul piano π che va dall'asse $\mathbf{e}$ all'asse $\mathbf{e}_0$; quindi, per ogni punto P_i si ha $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{0i} + \mathbf{r}$. Cfr. la figura 42.1.

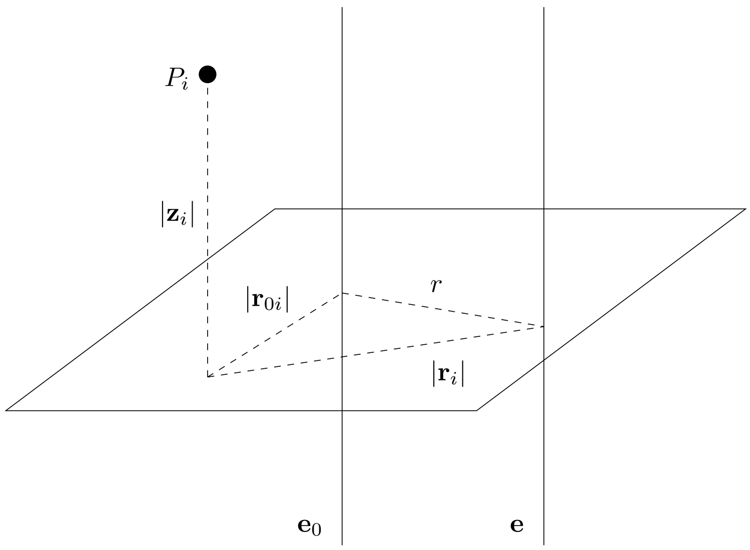

FIGURA 42.1. Discussione del teorema 42.25.

Possiamo quindi riscrivere $I_{\mathbf{e}}$ in (42.23) come

$$I_{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(|\mathbf{r}_{0i}|^2 + |\mathbf{r}_0|^2 + 2\,\langle \mathbf{r}_{0i}, \mathbf{r} \rangle \right) = I_{\mathbf{e}_0} + mr^2, \tag{42.25}$$

poiché, per definizione di centro d'inerzia, il terzo termine della somma è nullo. ■

42.27. Sistemi continui. Possiamo considerare un sistema continuo $\mathcal{C}$ di densità (di massa) $\rho(\mathbf{Q})$ come limite per $\Delta\mathbf{Q} \to 0$ di una successione di sistemi rigidi formati da un numero finito di punti $\mathbf{Q}_i$, di massa $\rho(\mathbf{Q}_i)\Delta\mathbf{Q}$. Definiremo allora il momento d'inerzia di un sistema continuo rispetto a un asse $\mathbf{e}$ come la grandezza (cfr. la definizione 42.16)

$$I_{\mathbf{e}} = \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{Q}\, \rho(\mathbf{Q})\, r^2(\mathbf{Q}), \tag{42.26}$$

dove $r(\mathbf{Q})$ è la distanza del punto di coordinate $\mathbf{Q}$ dall'asse $\mathbf{e}$. Tutti i risultati validi per i sistemi discreti possono essere trasferiti al caso dei sistemi continui. Ovviamente anche la definizione di centro di massa va cambiata di conseguenza (cfr. l'esercizio 8).

42.28. ESEMPIO. I momenti principali d'inerzia del sistema costituito da due punti di massa m e distanza d sono (cfr. l'esercizio 9)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}\, m d^2, \qquad I_3 = 0, \tag{42.27}$$

e gli assi d'inerzia individuano una terna con origine il centro d'inerzia del sistema, con $\mathbf{e}_3$ diretto lungo la retta passante per i due punti ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ nel piano perpendicolare a tale retta. Cfr. la figura 42.2.

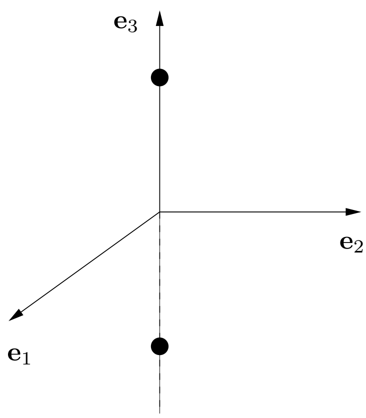

FIGURA 42.2. Assi d'inerzia di un sistema costituito da due punti materiali.

Si noti che $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ non sono univocamente determinati (cfr. le osservazioni 42.13 e 42.24): scelta una coppia di versori ortogonali tra loro e a $\mathbf{e}_3$, due versori che si ottengono da quelli dati con una rotazione arbitraria intorno a $\mathbf{e}_3$ costituiscono una scelta altrettanto valida.

42.29. ESEMPIO. I momenti principali d'inerzia di un'asta omogenea di sezione trascurabile, di massa m e di lunghezza ℓ (densità lineare $\lambda = m/\ell$) sono (cfr. l'esercizio 10)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\, m\ell^2, \qquad I_3 = 0, \tag{42.28}$$

e gli assi d'inerzia individuano una terna con origine il centro d'inerzia del sistema, con $\mathbf{e}_3$ diretto lungo l'asta ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ perpendicolari all'asta. Cfr. la figura 42.3.

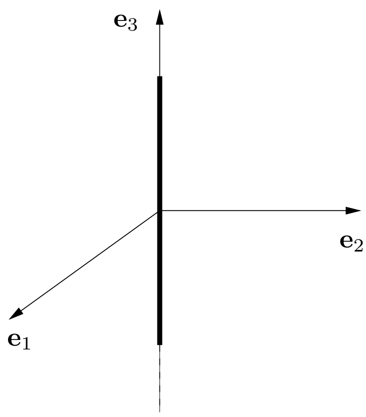

FIGURA 42.3. Assi d'inerzia di un'asta omogenea.

Il momento d'inerzia rispetto a un asse $\mathbf{e}$ pasante per un estremo e perpendicolare alla sbarra è $I_{\mathbf{e}} = m\ell^2/3$.

42.30. ESEMPIO. I momenti principali d'inerzia di un anello sottile di massa m e raggio r (densità lineare $\lambda = m/(2\pi r)$) sono (cfr. l'esercizio 11)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}mr^2, \qquad I_3 = mr^2, \tag{42.29}$$

e gli assi d'inerzia individuano una terna con origine il centro d'inerzia del sistema, con $\mathbf{e}_3$ perpendicolare al piano dell'anello ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ contenuti in tale piano. Cfr. la figura 42.4.

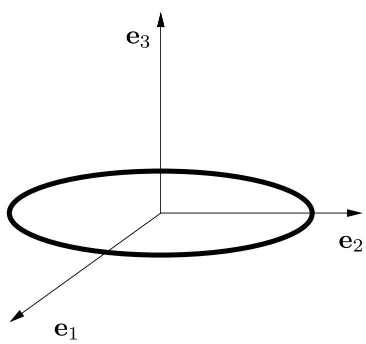

FIGURA 42.4. Assi d'inerzia di un anello sottile.

42.31. ESEMPIO. I momenti principali d'inerzia di un disco sottile di massa m e raggio r (densità superficiale $\sigma = m/(\pi r^2)$) sono (cfr. l'esercizio 12)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}\,mr^2, \qquad I_3 = \frac{1}{2}\,mr^2, \tag{42.30}$$

e gli assi d'inerzia individuano una terna con origine il centro d'inerzia del sistema, con $\mathbf{e}_3$ perpendicolare al piano del disco ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ contenuti in tale piano. Cfr. la figura 42.5.

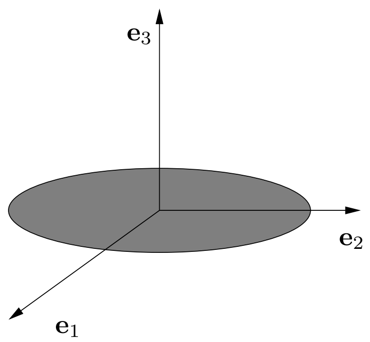

FIGURA 42.5. Assi d'inerzia di un disco sottile.

42.32. ESEMPIO. I momenti principali d'inerzia di un anello di massa r, raggio esterno b e raggio interno $a \leq b$ (densità superficiale $\sigma = m/[\pi(b^2 - a^2)]$) sono (cfr. l'esercizio 13)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}\,m(a^2 + b^2), \qquad I_3 = \frac{1}{2}\,m(a^2 + b^2), \tag{42.31}$$

e gli assi d'inerzia individuano una terna con origine il centro d'inerzia del sistema, con $\mathbf{e}_3$ perpendicolare al piano dell'anello ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ contenuti in tale piano. Cfr. la figura 42.6.

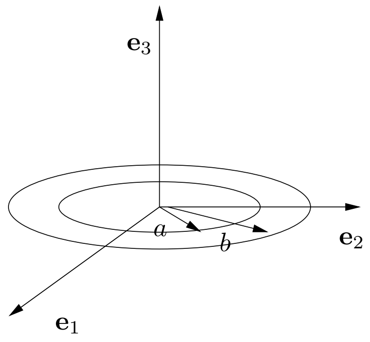

FIGURA 42.6. Assi d'inerzia di un anello.

Si noti che, per $a = b$, ritroviamo l'anello sottile dell'esempio 42.30, con raggio $r = a = b$, mentre, per $a = 0$, ritroviamo il disco sottile dell'esempio 42.31, con raggio $r = b$.

42.33. ESEMPIO. I momenti principali d'inerzia di un cilindro (circolare retto) di massa m, raggio r e altezza h (densità di volume $\rho = m/(\pi r^2 h)$) sono (cfr. l'esercizio 14)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\, m\big(3r^2 + h^2\big), \qquad I_3 = \frac{1}{2}\, mr^2, \tag{42.32}$$

e gli assi d'inerzia individuano una terna con origine il centro d'inerzia del sistema, con $\mathbf{e}_3$ diretto lungo l'asse del cilindro ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ perpendicolari a tale asse. Cfr. la figura 42.7.

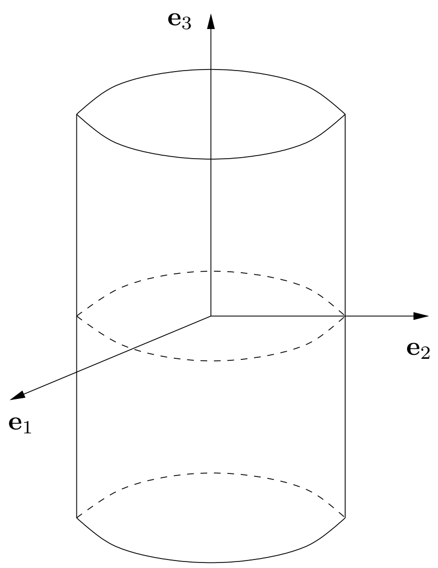

FIGURA 42.7. Assi d'inerzia di un cilindro.

Si noti che per $r \to 0$ si ottiene l'asta dell'esempio 42.29, mentre per $h \to 0$ si ottiene il disco dell'esempio 42.31. Il momento d'inerzia rispetto a un asse $\mathbf{e}$ passante per un diametro di una base del cilindro è $I_{\mathbf{e}} = m(h^2/3 + r^2/4)$; cfr. l'esercizio 15.

42.34. ESEMPIO. I momenti principali d'inerzia di una sfera di massa m e raggio r (densità di volume $\rho = 3m/(4\pi r^3)$) sono (cfr. l'esercizio 16)

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\, mr^2, \tag{42.33}$$

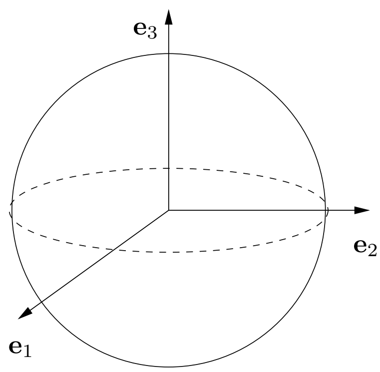

FIGURA 42.8. Assi d'inerzia di una sfera.

e gli assi d'inerzia individuano una terna con origine il centro d'inerzia del sistema, con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ arbitrari (purché ortogonali tra loro). Cfr. la figura 42.8.

Il momento d'inerzia rispetto a un asse $\mathbf{e}$ tangente alla superficie è $I_{\mathbf{e}} = 7mr^2/5$; cfr. l'esercizio 17.

42.35. ESEMPIO. I momenti principali d'inerzia di una lamina rettangolare di massa m, e lati di lunghezza a e b (densità superficiale $\sigma = m/(ab)$) sono (cfr. l'esercizio 18)

$$I_1 = \frac{1}{12} ma^2, \qquad I_2 = \frac{1}{12} mb^2, \qquad I_3 = \frac{1}{12} m\big(a^2 + b^2\big), \tag{42.34}$$

e gli assi d'inerzia individuano una terna con origine il centro d'inerzia del sistema, con $\mathbf{e}_3$ perpendicolare al piano della lamina, $\mathbf{e}_1$ parallelo al lato di lunghezza b ed $\mathbf{e}_2$ parallelo al lato di lunghezza a (come si può ricavare con argomenti di simmetria analoghi a quelli discussi nel paragrafo §42.24). Cfr. la figura 42.9.

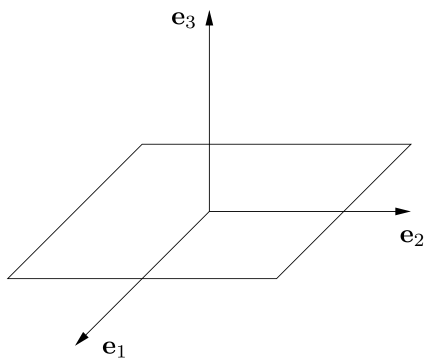

FIGURA 42.9. Assi d'inerzia di una lamina rettangolare.

42.36. Esempio. I momenti principali d'inerzia di un cono (circolare retto) di massa m, raggio r e altezza h (densità di volume $\rho = 3m/(\pi r^2 h)$) sono (cfr. l'esercizio 19)

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{80}\, m\big(4r^2 + h^2\big), \qquad I_3 = \frac{3}{10}\, mr^2, \tag{42.35}$$

e gli assi d'inerzia individuano una terna con origine il centro d'inerzia del sistema (che si trova lungo l'asse del cono a distanza $3h/4$ dal vertice), con $\mathbf{e}_3$ diretto lungo l'asse del cono ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ perpendicolari a tale asse. Cfr. la figura 42.10.

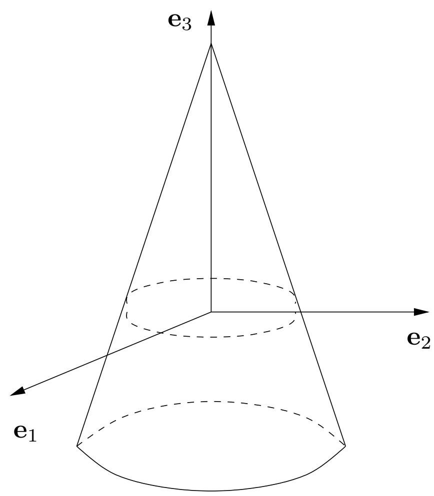

Figura 42.10. Assi d'inerzia di un cono.

Il momento d'inerzia rispetto a un asse $\mathbf{e}$ passante per il vertice e perpendicolare all'asse del cono $\mathbf{e}_3$ è $I_{\mathbf{e}} = 3m(h^2/5 + r^2/20)$; cfr. l'esercizio 20.

43. Angoli di Eulero

43.1. Introduzione. Consideriamo due sistemi di riferimento κ e K, il primo fisso e il secondo mobile, solidale con un sistema rigido che ruota intorno a un punto fisso di $O \in \kappa$. Scegliamo in κ una terna (destrogira) $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ tale che O sia l'origine nel sistema κ. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una terna (destrogira) nel sistema mobile, tale che i suoi versori siano orientati lungo gli assi principali d'inerzia del sistema rigido per O. Supponiamo anche che i due assi $\mathbf{e}_3$ ed $\mathbf{e}_z$ non coincidano.

Si noti che i due sistemi di riferimento κ e K hanno la stessa origine e che il moto $D_t\colon K \to \kappa$ è una rotazione $B_t \equiv B$.

Indichiamo con $\mathbf{e}_N$ il versore dell'asse $[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_3]$; poiché $\mathbf{e}_z$ ed $\mathbf{e}_3$ non coincidono, il versore $\mathbf{e}_N$ è ben definito e appartiene al piano contenente i versori $\mathbf{e}_x$ ed $\mathbf{e}_y$.

Per sovrapporre il sistema fisso κ al sistema mobile K si devono compiere tre rotazioni:
(1) una rotazione di un angolo φ intorno all'asse $\mathbf{e}_z$, durante la quale $\mathbf{e}_z$ rimane fisso ed $\mathbf{e}_x$ si sovrappone a $\mathbf{e}_N$;
(2) una rotazione di un angolo θ intorno all'asse $\mathbf{e}_N$, durante la quale $\mathbf{e}_N$ rimane fisso ed $\mathbf{e}_z$ si sovrappone a $\mathbf{e}_3$;
(3) una rotazione di un angolo ψ intorno all'asse $\mathbf{e}_3$, durante la quale $\mathbf{e}_3$ rimane fisso ed $\mathbf{e}_N$ si sovrappone a $\mathbf{e}_1$.
Come risultato delle tre rotazioni, $\mathbf{e}_x$ si sovrappone a $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_z$ a $\mathbf{e}_3$; di conseguenza $\mathbf{e}_y$ si sovrappone a $\mathbf{e}_2$, essendo ciascuna terna un sistema di coordinate cartesiane destrogiro. Cfr. la figura 43.1.

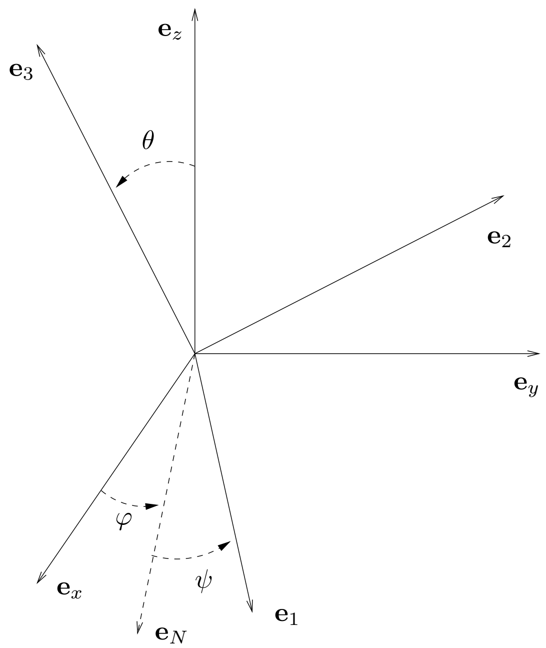

FIGURA 43.1. Angoli di Eulero.

Indichiamo con $S^3(\varphi)$ la rotazione (1), con $S^1(\theta)$ la rotazione (2), e con $S^3(\psi)$ la rotazione (3); notiamo anche che si ha $\theta \neq 0$, poiché, per ipotesi, gli assi $\mathbf{e}_3$ ed $\mathbf{e}_z$ non coincidono.

Gli indici in alto 1 e 3 indicano che si tratta di rotazioni intorno al primo asse e, rispettivamente, al terzo asse di una terna, che è: per $S^3(\varphi)$ la terna $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, per $S^1(\theta)$ la terna ottenuta da $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ attraverso la rotazione $S^3(\varphi)$, e per $S^3(\psi)$ la terna ottenuta dalla precedente attraverso la rotazione $S^1(\theta)$. Questo vuol dire che, sebbene si tratti di rotazioni rispetto a terne diverse, tuttavia la rotazioni con lo stesso indice in alto hanno la stessa forma analitica nelle rispettive terne (cfr. l'osservazione 43.4 più avanti).

La rotazione totale è data dalla composizione delle tre rotazioni, quindi

$$S(\varphi, \theta, \psi) = S^3(\psi)\, S^1(\theta)\, S^3(\varphi). \tag{43.1}$$

43.2. DEFINIZIONE (ANGOLI DI EULERO). *Gli angoli* (φ, θ, ψ) *costruiti nel paragrafo §43.1 si chiamano* angoli di Eulero. *Il versore* $\mathbf{e}_N$ *nella direzione* $[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_3]$ *prende il nome di* asse dei nodi *e la retta che lo contiene si dice* linea dei nodi. *L'angolo* φ *si chiama* angolo di precessione *(o* angolo azimutale *o semplicemente* azimut*), l'angolo* θ angolo di nutazione *e l'angolo* ψ angolo di rotazione propria.

43.3. *Osservazione.* Gli angoli di Eulero formano in SO(3) un sistema locale di coordinate, con singolarità ai poli ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$) e plurivocità ai meridiani (similmente a quanto accade alle coordinate geografiche). Gli intervalli di variabilità degli angoli di Eulero sono quindi

$$0 \le \varphi < 2\pi, \qquad 0 \le \theta < \pi, \qquad 0 \le \psi < 2\pi, \tag{43.2}$$

e l'applicazione $(\varphi, \theta, \psi) \to S(\varphi, \theta, \psi) \in \mathrm{SO}(3)$ definisce una rotazione che trasporta il sistema di riferimento κ nel sistema di riferimento K solidale con il sistema rigido.

43.4. *Osservazione.* Per costruzione, se si tengono presenti le relazioni (33.33) e (33.36) del capitolo 8, si ha

$$S^3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{43.3}$$

con $\alpha = \varphi$, o $\alpha = \psi$. Allo stesso modo la rotazione intorno al primo asse può essere rappresentata dalla matrice

$$S^1(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \tag{43.4}$$

con $\beta = \theta$; cfr. l'esercizio 3 del capitolo 8 e si tenga conto della (33.33). La matrice che definisce la trasformazione di coordinate è data da

$$B(\varphi, \theta, \psi) = S^T(\varphi, \theta, \psi). \tag{43.5}$$

43.5. *Osservazione.* Non tutti i punti del dominio di variabilità degli angoli di Eulero dato dalla (43.2) individuano configurazioni distinte del sistema rigido; *e.g.* , per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$, i punti $(0, \varphi + \sigma, \psi - \sigma)$ corrispondono tutti alla stessa configurazione.

43.6. Formule del cambiamento di base dal sistema solidale al sistema fisso. Dalla (43.1) e dal lemma 36.20, ricaviamo che il cambiamento di base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \to \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ è definito dalla trasformazione

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \tag{43.6}$$

(dove le "matrici colonna" devono essere interpretate come matrici 3×3, di cui ogni riga è costituita dai tre elementi corrispondenti alle componenti del vettore che compare in quella riga: questo vuol dire che le (43.6) definiscono le trasformazioni di tre vettori).

Sviluppando il prodotto delle tre matrici di rotazione in (43.6), otteniamo

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{43.7}$$

Se indichiamo con $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ la base che otteniamo dalla base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ del sistema fisso κ mediante l'azione della rotazione $S^3(\varphi)$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_x \\ \mathbf{e}'_y \\ \mathbf{e}'_z \end{pmatrix}, \tag{43.8}$$

abbiamo che $\mathbf{e}'_x \equiv \mathbf{e}_N$ per costruzione. Si ottiene quindi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_N \\ \mathbf{e}'_y \\ \mathbf{e}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \tag{43.9}$$

come si può leggere dalla (43.6) e dalla definizione (43.8).

Dalle (43.7) e (43.9) otteniamo allora le formule che esprimono i versori $\mathbf{e}_z$ ed $\mathbf{e}_N$ come combinazioni lineari deli versori della base del sistema solidale con il sistema rigido, *i.e.*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z &= \sin\theta\sin\psi\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\cos\psi\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_N &= \cos\psi\,\mathbf{e}_1 - \sin\psi\,\mathbf{e}_2, \end{aligned} \tag{43.10}$$

che saranno utili più avanti.

43.7. *Osservazione.* Notiamo che se si sceglie l'asse dei nodi $\mathbf{e}_N$ coincidente con il versore $\mathbf{e}_1$ (questo sarà sempre lecito se il sistema rigido è invariante per rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_3$), le formule (43.10) si semplificano in

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z &= \sin\theta\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_N &= \mathbf{e}_1, \end{aligned} \tag{43.11}$$

poiché $\psi = 0$ in tale caso.

43.8. LEMMA. *La velocità angolare di un sistema rigido, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da*

$$\boldsymbol{\Omega} = \big(\dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi\big)\mathbf{e}_1 + \big(\dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi\big)\mathbf{e}_2 + (\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\mathbf{e}_3, \tag{43.12}$$

nel sistema di riferimento K solidale con il sistema rigido.

43.9. *Dimostrazione del lemma 43.8.* La velocità angolare del moto descritto da $S^3(\varphi)$ è data da $\dot\varphi\mathbf{e}_z$, quella del moto descritto da $S^1(\theta)$ è data da $\dot\theta\mathbf{e}_N(t)$, e quella del moto descritto da $S^3(\psi)$ è data da $\dot\psi\mathbf{e}_3(t)$, dove abbiamo indicato esplicitamente la dipendenza dal tempo dei versori che si muovono rispetto al sistema fisso κ e abbiamo tenuto conto di come si trasformano le matrici di rotazione cambiando sistema di riferimento.

Se ricordiamo la legge di composizione delle velocità angolari, abbiamo che la velocità angolare del moto composto è

$$\dot\varphi(t)\,\mathbf{e}_z + \dot\theta(t)\,\mathbf{e}_N(t) + \dot\psi(t)\,\mathbf{e}_3(t), \tag{43.13}$$

che, utilizzando la (43.10), possiamo esprimere nel sistema di riferimento solidale K con il corpo rigido, ottenendo la (43.12). ■

43.10. COROLLARIO. *L'energia cinetica di un sistema rigido nel sistema di riferimento solidale, espressa in termini degli angoli di Eulero, è data da*

$$T = \frac{I_1}{2}\big(\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi\big)^2+\frac{I_2}{2}\big(\dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi\big)^2+\frac{I_3}{2}(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2, \tag{43.14}$$

dove I_1, I_2 e I_3 sono gli assi principali d'inerzia, e si riduce a

$$T = \frac{I_1}{2}\big(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\big) + \frac{I_3}{2}\big(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\big)^2, \tag{43.15}$$

nel caso di un sistema rigido simmetrico rispetto a rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_3$ ($I_1 = I_2$).

43.11. *Dimostrazione del corollario 43.10.* L'energia cinetica di un sistema rigido, nel sistema di riferimento solidale, è data dalla (43.10), così che, utilizzando l'espressione (43.12) per la velocità angolare, otteniamo la (43.14).

Nel caso di un sistema rigido simmetrico (rispetto a rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_3$) l'energia cinetica si ottiene dalla (43.14) ponendo $I_1 = I_2$.

Alternativamente, non volendo usare la formula (43.12) che esprime la velocità angolare in generale, si può semplificare la trattazione come segue. Possiamo assumere, in ogni istante t_0, senza perdita di generalità, che l'asse dei nodi $\mathbf{e}_N(t_0)$ coincide con l'asse $\mathbf{e}_1(t_0)$.

Nel sistema K le componenti di $\mathbf{e}_z$ all'istante t_0 sono (cfr. la (43.11))

$$\mathbf{e}_z = \cos\theta(t_0)\,\mathbf{e}_3(t_0) + \sin\theta(t_0)\,\mathbf{e}_2(t_0), \tag{43.16}$$

e quindi la velocità angolare (43.12) diventa

$$\boldsymbol{\Omega}(t_0) = \dot\theta(t_0)\,\mathbf{e}_1(t_0) + \dot\varphi(t_0)\sin\theta(t_0)\,\mathbf{e}_2(t_0) + \big(\dot\varphi(t_0)\cos\theta(t_0) + \dot\psi(t_0)\big)\mathbf{e}_3(t_0). \tag{43.17}$$

Quindi per ogni t_0 si ha

$$\Omega_1 = \dot\theta, \qquad \Omega_2 = \dot\varphi\sin\theta, \qquad \Omega_3 = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi, \tag{43.18}$$

pur di scegliere, come detto, $\mathbf{e}_N(t_0) = \mathbf{e}_1(t_0)$.

L'energia cinetica (43.14) diventa quindi

$$T = \frac{1}{2}\Big(I_1^2\big(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\big) + I_3^2\Omega_3^2\Big), \tag{43.19}$$

poiché $I_1 = I_2$, e, utilizzando le (43.18), si ottiene la (43.15). ■

43.12. Nel seguito analizzeremo brevemente le precessioni regolari, mettendone in luce la rilevanza per problemi di interesse fisico.

43.13. Definizione (Precessione regolare). *Si immagini che un sistema rigido ruoti uniformemente intorno a un asse* **f** *solidale con esso, e che tale asse, a sua volta, mantenendosi incidente a un asse fisso* **e** *in un suo punto O, ruoti uniformemente intorno a quest'ultimo. Si chiamerà* precessione regolare *(o* precessione *tout court) il moto assoluto del sistema rigido; l'asse fisso* **e** *si dice* asse di precessione*, l'asse* **f** *fisso nel sistema mobile* asse di figura*, e il punto fisso O comune ai due assi* polo della precessione.

43.14. *Osservazione.* Una precessione regolare risulta individuata quando sia dato il polo e siano assegnate le velocità angolari dei due moti generatori, una costante nel sistema fisso e l'altra costante nel sistema solidale. Se indichiamo con $\boldsymbol{\omega}_1$ e con $\boldsymbol{\omega}_2$ le velocità angolari del sistema intorno a **f** e, rispettivamente, intorno a **e**, si ha, ricordando la legge di composizione delle velocità angolari (cfr. il lemma 33.41), che

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \tag{43.20}$$

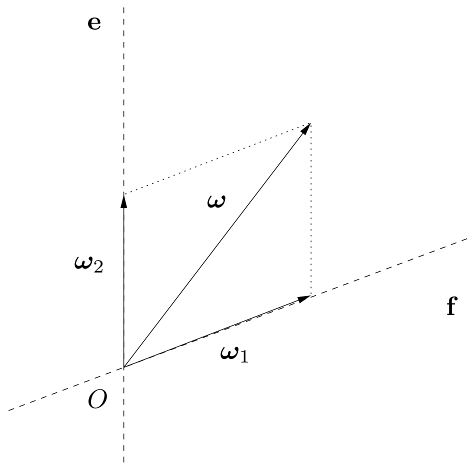

FIGURA 43.2. Esempio di precessione regolare.

esprime la velocità angolare della precessione regolare. Cfr. la figura 43.2.

43.15. LEMMA. *In una precessione regolare i coni di Poinsot sono rotondi.*

43.16. *Dimostrazione del lemma 43.15.* Durante la precessione regolare, il parallelogramma di lati $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$ ruota intorno all'asse $\mathbf{e}$ conservando inalterata la sua configurazione, poiché $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$ sono costanti. In particolare la diagonale del parallelogramma, che individua la velocità angolare (43.12), si mantiene inclinata di un angolo costante sia rispetto all'asse $\mathbf{e}$ sia rispetto all'asse $\mathbf{f}$. Da qui segue l'asserto. ■

43.17. Classificazione delle precessioni regolari. Una precessione regolare in cui il prodotto scalare $\langle \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \rangle$ non sia nullo si dice *precessione progressiva* o *retrograda* a seconda che tale quantità sia positiva o negativa. Se introduciamo i due versori $\mathbf{e}_z$ ed $\mathbf{e}_3$, applicati in O e diretti, rispettivamente, lungo i due assi $\mathbf{e}$ e $\mathbf{f}$, possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \nu \mathbf{e}_3, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \mu \mathbf{e}_z, \tag{43.21}$$

così che risulta

$$\langle \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \rangle = \mu\nu \cos\theta_0, \tag{43.22}$$

se θ_0 denota l'angolo tra i due versori $\mathbf{e}_z$ ed $\mathbf{e}_3$. Sarà quindi il segno del prodotto nel membro di destra della (43.22) che discrimina se la precessione è progressiva o retrograda: possiamo dire in generale che la precessione è progressiva o retrograda a seconda che i due vettori $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$ formino tra loro un angolo acuto o ottuso.

Un'altra possibile classificazione delle precessioni regolari discende dalla mutua posizione dei coni rotondi di Poinsot. Infatti sono possibili i seguenti casi (cfr. la figura

43.3:
(1) i due coni sono l'uno esterno all'altro;
(2) il cono mobile è interno a quello fisso;
(3) il cono fisso è interno a quello mobile.

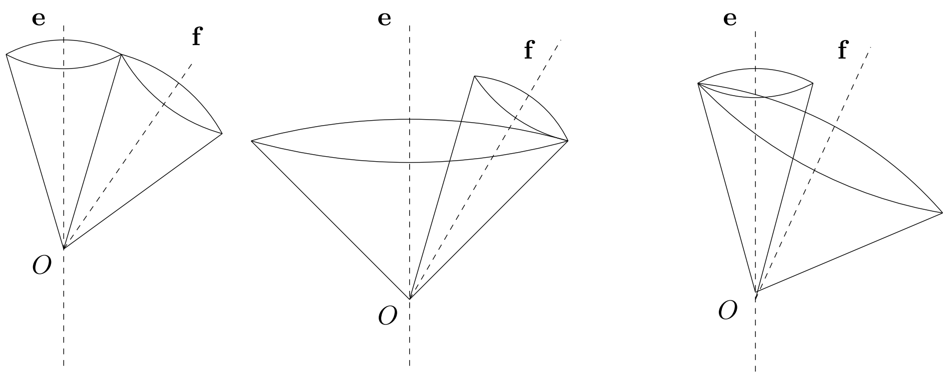

FIGURA 43.3. Classificazione delle precessioni regolari.

Introducendo gli angoli di Eulero, prendendo come origine il polo della precessione e come assi $\mathbf{e}_z$ e $\mathbf{e}_3$ i versori omonimi precedentemente introdotti, l'angolo φ dà l'anomalia (rispetto all'asse $\mathbf{e}_x$) dell'asse dei nodi sul piano ortogonale in O all'asse $\mathbf{e}$ e l'angolo ψ dà l'anomalia (rispetto all'asse dei nodi) dell'asse $\mathbf{e}_1$ sul piano ortogonale in O all'asse $\mathbf{f}$; si avrà quindi

$$\theta = \theta_0, \qquad \varphi = \varphi_0 + \nu t, \qquad \psi = \psi_0 + \mu t, \tag{43.23}$$

dove $(\varphi_0, \theta_0, \psi_0)$ sono gli angoli di Eulero della configurazione iniziale del sistema rigido.

43.18. ESEMPIO (PRECESSIONE REGOLARE DELLA TERRA). La Terra ruota uniformemente intorno al suo asse polare $\mathbf{f}$ in senso antiorario, descrivendo un giro completo in un giorno. L'asse polare terrestre, a sua volta, non conserva direzione invariabile rispetto alla sfera celeste, ma ruota uniformemente (per quanto con estrema lentezza) intorno a una retta $\mathbf{e}$ di direzione fissa passante per il centro della Terra O e ortogonale al piano dell'*eclittica* (*i.e.* al piano dell'orbita ellittica descritta dalla Terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole); cfr. la figura 43.4.

L'angolo costante θ_0 tra le due rette (non orientate) è di circa $23°30'$. Se immaginiamo la $\mathbf{f}$ orientata dal centro della Terra verso il polo Nord e la $\mathbf{e}$ orientata in modo da formare con la $\mathbf{f}$ l'angolo acuto θ_0, risulta (dalle osservazioni astronomiche) che l'asse terrestre $\mathbf{f}$ ruota intorno a $\mathbf{e}$ in senso orario, descrivendo un intero giro in circa 26000 anni (*anno platonico*): si tratta quindi di una precessione regolare retrograda.

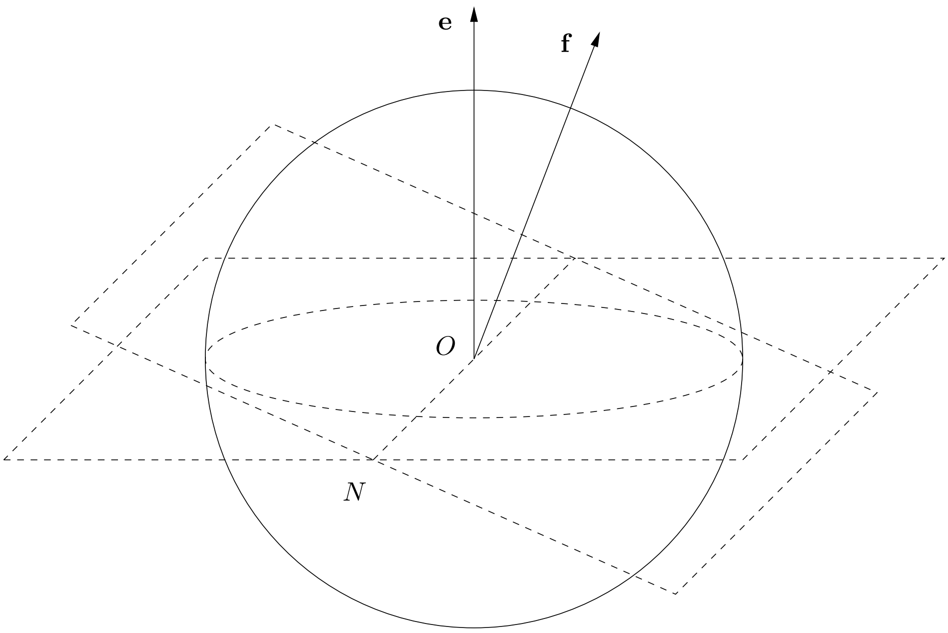

FIGURA 43.4. Precessione degli equinozi. Il piano dell'equatore (piano inclinato della figura) interseca il piano dell'eclittica lungo l'asse dei nodi N.

Se prendiamo come unità di misura il giorno risulta allora

$$\mu = 2\pi, \qquad \nu \approx -2\pi \, 10^{-7}, \tag{43.24}$$

che mostra l'estrema piccolezza del rapporto $|\mu|/|\nu|$ dei moduli delle due velocità angolari. L'asse di moto della precessione sarà quindi una retta orientata, esterna all'angolo tra le due rette $\mathbf{f}$ e $\mathbf{e}$ e inclinata su $\mathbf{f}$ di un angolo piccolissimo (di circa $0,00867''$); quindi il cono mobile di Poinsot, di apertura piccolissima, rotola internamente al cono fisso, di apertura lievemente superiore a θ_0.

Poiché il moto dovuto alla rotazione dell'asse terrestre è estremamente lento, spesso in prima approssimazione si considera il moto della Terra come una semplice rotazione uniforme intorno al proprio asse. In realtà per qualche secolo la rotazione di $\mathbf{f}$ intorno a $\mathbf{e}$ rimane pressocché inavvertibile, anche se diventa osservabile con i millenni: *e.g.* alcune costellazioni ora visibili solo nell'emisfero meridionale lo furono un tempo (circa 3000 anni fa) anche dalle regioni mediterranee, come è testimoniato da passi biblici e omerici.

43.19. ESEMPIO (PRECESSIONE DEGLI EQUINOZI). Come risulta dalla discussione nel paragrafo §43.18 il piano equatoriale non coincide con il piano dell'eclittica. Sia N l'intersezione dei due piani (contenente il centro della Terra O): tale retta è la linea dei nodi nel sistema di riferimento per gli angoli di Eulero che si è scelto nel paragrafo §43.18. Nel moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole, quest'ultimo attraversa una volta sola la semiretta positiva condotta da O con direzione data dall'asse dei nodi: l'epoca di tale attraversamento costituisce l'*equinozio di primavera.* L'intersezione con la semiretta opposta costituisce l'*equinozio di autunno.* La retta N si dice allora *linea degli equinozi.* Risulta allora dalla (43.23) che tale linea ruota sul piano dell'eclittica con velocità angolare $\dot{\varphi} = \nu$, che, in conformità con la (43.24), è lentissima e diventa apprezzabile solo su intervalli di tempo lunghi (dell'ordine di secoli o millenni). Poiché $\nu < 0$ (cfr. di nuovo la (43.24)), la rotazione corrispondente è in senso orario sul piano dell'eclittica e dà quindi luogo a un anticipo degli equinozi a cui di dà il nome di *precessione degli equinozi.* In conseguenza di tale precessione ogni 13000 anni circa (mezzo anno platonico; cfr. il paragrafo §43.18) si verifica un totale capovolgimento delle condizioni di temperatura caratteristiche delle singole stagioni.

44. Equazioni di Eulero

44.1. Introduzione. Utilizzando i risultati del paragrafo §42, studieremo ora in dettaglio il moto del vettore velocità angolare (o equivalentemente del momento angolare).

Questo non risolve completamente il problema di determinare il moto del sistema rigido (cfr. l'osservazione 44.16 più avanti): vedremo comunque che le equazioni che descrivono il moto della velocità angolare definiscono un sistema dinamico di per sè interessante.

44.2. TEOREMA. *Dato un sistema rigido che ruota intorno a un punto fisso O in assenza di forze esterne, si ha*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = [\mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega}], \tag{44.1}$$

se $\mathbf{L}$ è il momento angolare rispetto a O e $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare del sistema rigido.

44.3. *Dimostrazione del teorema 44.2.* Utilizzando il lemma 34.4 del capitolo 8, si ha

$$\dot{\mathbf{l}} = B\big(\dot{\mathbf{L}} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L}]\big). \tag{44.2}$$

Poiché $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{0}$ (conservazione del momento angolare in assenza di forze; cfr. la seconda delle (39.11)), segue la (44.1). ■

44.4. *Osservazione.* Poiché $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$, possiamo considerare la (44.1) come un sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle variabili $\boldsymbol{\Omega}$. Se $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2 + \Omega_3\mathbf{e}_3$ è la scomposizione di $\boldsymbol{\Omega}$ nella base degli assi d'inerzia, la (44.1) assume la forma

$$\begin{cases} I_1\dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3, \\ I_2\dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3, \\ I_3\dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2, \end{cases} \tag{44.3}$$

che sono note come *equazioni di Eulero* (per un sistema rigido non sottoposto a forze).

44.5. *Osservazione.* Se sul sistema rigido agiscono forze esterne, si ha $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{n}$, dove $\mathbf{n}$ è la somma dei momenti delle forze esterne rispetto al punto O; cfr. il paragrafo §40. Allora, se $\mathbf{n} = B\mathbf{N}$, si ha, in luogo della (44.1),

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = [\mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{N}, \tag{44.4}$$

così che, per componenti, possiamo scrivere

$$\begin{cases} I_1\dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 + N_1, \\ I_2\dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3 + N_2, \\ I_3\dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 + N_3, \end{cases} \tag{44.5}$$

che sono le equazioni di Eulero nel caso generale.

44.6. TEOREMA. *Le equazioni di Eulero (44.3) ammettono due integrali primi quadratici*

$$2E = \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = \left\langle \mathbf{L}, I^{-1}\mathbf{L} \right\rangle, \qquad L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \langle \mathbf{L}, \mathbf{L} \rangle, \tag{44.6}$$

dove $E = T$ è l'energia cinetica e L è il modulo del momento angolare $\mathbf{L}$. I due integrali sono indipendenti purché $I \neq c\mathbb{1}$, per ogni costante c.

44.7. *Dimostrazione del teorema 44.6.* Si calcoli esplicitamente la derivata temporale dell'energia e del modulo del momento angolare, utilizzando le (44.3) e ricordando che $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$, così che $\dot{\mathbf{L}} = I\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ e $\dot{E} = \langle \dot{\boldsymbol{\Omega}}, I\boldsymbol{\Omega} \rangle$. ■

44.8. DEFINIZIONE (ROTAZIONE STAZIONARIA). *Il moto di un sistema rigido, durante il quale la velocità angolare rimane costante, si chiama* rotazione stazionaria.

44.9. *Osservazione.* Le equazioni (44.3) descrivono un sistema dinamico in $\mathbb{R}^3$; le rotazioni stazionarie di un sistema rigido costituiscono quindi i punti d'equilibrio del sistema dinamico (44.3), *i.e.* i punti in cui si annulla il corrispondente campo vettoriale.

44.10. TEOREMA. *Un sistema rigido vincolato a un punto ammette una rotazione stazionaria intorno a uno qualsiasi dei suoi tre assi d'inerzia.*

44.11. *Dimostrazione del teorema 44.10.* Dal teorema 44.6 segue che $\mathbf{L}$ deve giacere sull'intersezione della superficie dell'ellissoide $\left\langle \mathbf{L}, I^{-1}\mathbf{L} \right\rangle = 2E = 2T$ con la superficie della sfera $\langle \mathbf{L}, \mathbf{L} \rangle = L^2$. Quindi le traiettorie del sistema si devono svolgere sulle curve di intersezione. Fissiamo l'ellissoide (*i.e.* E) e facciamo variare il raggio della sfera (*i.e.* $L = |\mathbf{L}|$), per studiare i possibili casi che si presentano.
(1) Supponiamo inizialmente che sia

$$I_1 < I_2 < I_3, \tag{44.7}$$

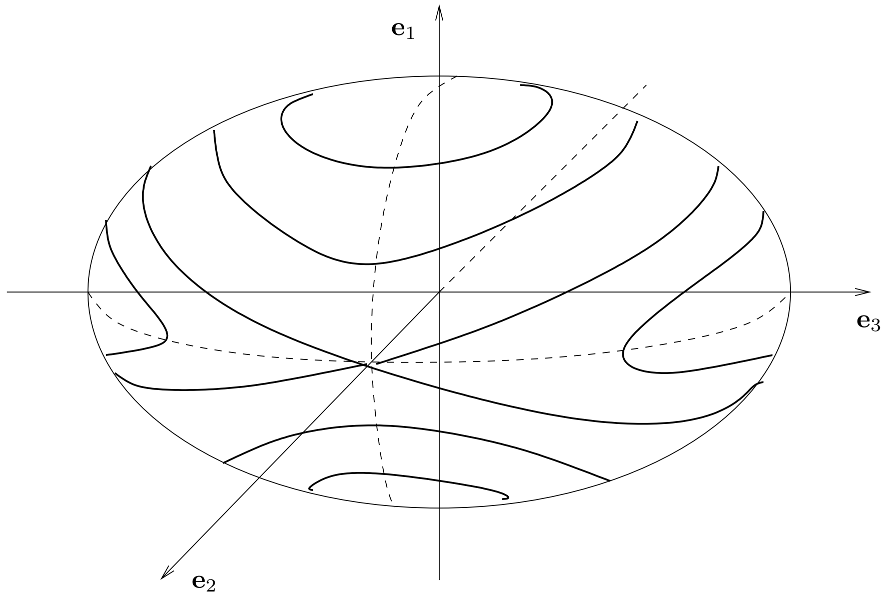

FIGURA 44.1. Discussione del teorema 44.10: caso $I_1 < I_2 < I_3$.

così che i semiassi dell'ellissoide saranno $\sqrt{2EI_1} < \sqrt{2EI_2} < \sqrt{2EI_3}$. Cfr. la figura 44.1.

Se il raggio L della sfera è uguale al semiasse più grande, l'intersezione consiste in due punti antipodali $(0, 0, \pm\sqrt{2EI_3})$. Diminuendo il valore del raggio ($\sqrt{2EI_3} > L > \sqrt{2EI_2}$), si ottengono due curve chiuse intorno agli estremi del semiasse più grande; cfr. anche l'esercizio 21 e la figura 44.2.

Allo stesso modo se il raggio L della sfera è uguale al semiasse più piccolo, l'intersezione consiste in due punti antipodali $(\pm\sqrt{2EI_1}, 0, 0)$. Aumentando il valore del raggio ($\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_2}$), si ottengono due curve chiuse intorno agli estremi del semiasse più piccolo; cfr. anche l'esercizio 22 e la figura 44.3.

Se $L = \sqrt{2EI_2}$ l'intersezione consiste in due curve chiuse che hanno in comune gli estremi del semiasse intermedio dell'ellissoide, *i.e.* i due punti antipodali $(0, \pm\sqrt{2EI_2}, 0)$. È inoltre facile vedere che le due curve sono delle circonferenze. Infatti, se $L = \sqrt{2EI_2}$, moltiplicando la prima delle (44.6) per I_2 e considerandone la differenza con la seconda otteniamo

$$\frac{I_2 - I_1}{I_1} L_1^2 = \frac{I_3 - I_2}{I_3} L_3^2, \tag{44.8}$$

che è l'equazione di due piani, che intersecano il piano $L_2 = 0$ lungo le rette

$$L_1 = \pm\sqrt{\frac{I_1}{I_3}\,\frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1}}\, L_3. \tag{44.9}$$

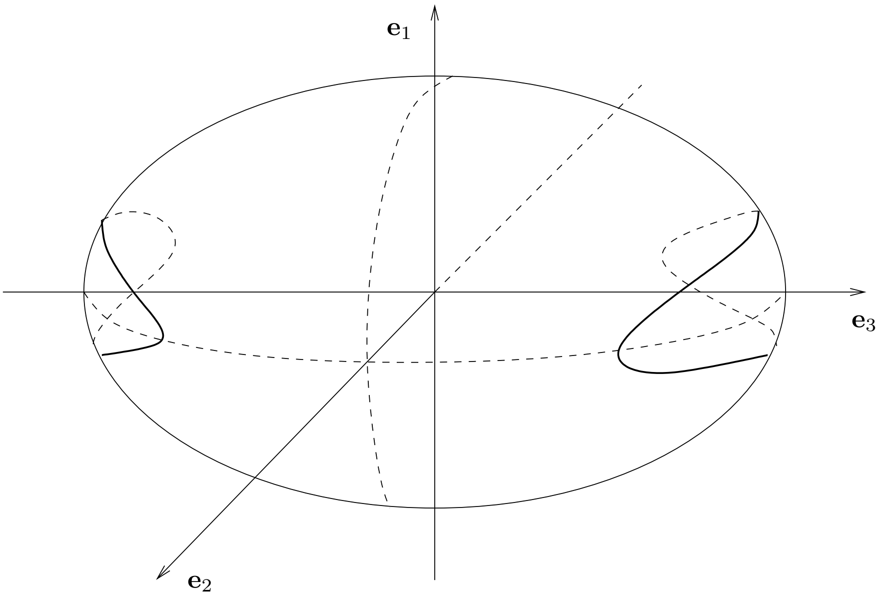

FIGURA 44.2. Curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera per $\sqrt{2EI_2} < L < \sqrt{2EI_3}$.

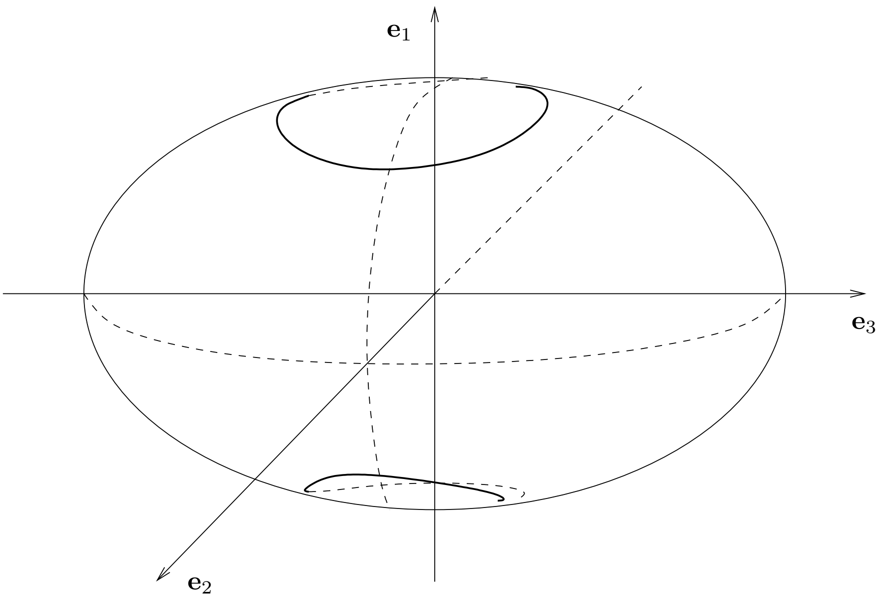

FIGURA 44.3. Curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera per $\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_2}$.

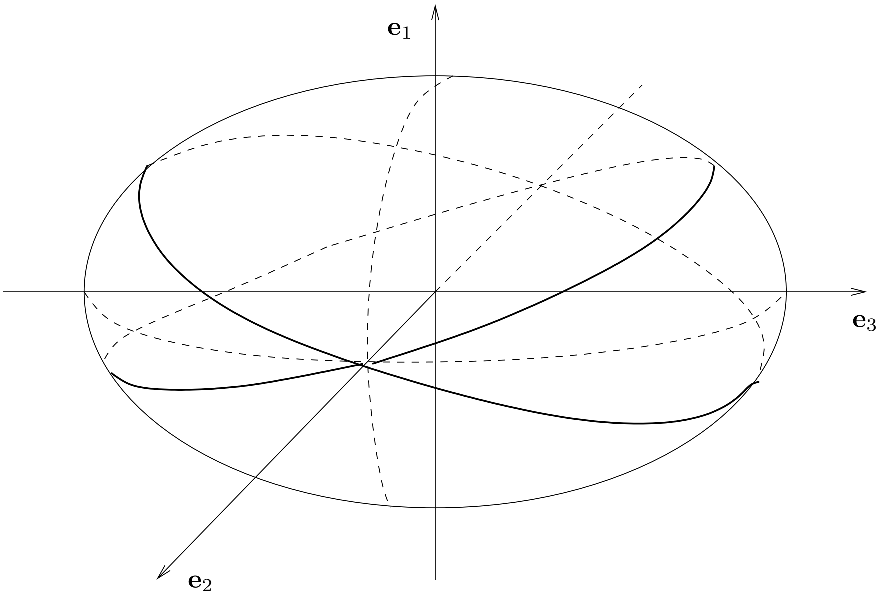

FIGURA 44.4. Curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera per $L = \sqrt{2EI_2}$.

I piani (44.8) passano per il centro della sfera: intersecano pertanto la superficie della sfera lungo due cerchi di raggio massimo; cfr. l'esercizio 24 e la figura 44.4.

Ognuno dei 6 estremi dei semiassi rappresenta una singola traiettoria del sistema di equazioni (44.3) e precisamente un punto d'equilibrio (la loro natura sarà discussa nel teorema 44.13): a esso corrisponde un valore costante del momento angolare, che rimane diretto lungo uno degli assi d'inerzia per tutto il tempo. Inoltre $\mathbf{L}$ risulta parallelo a $\boldsymbol{\Omega}$. Infatti, se $\mathbf{L} = L_j\mathbf{e}_j$, si ha $\mathbf{L} = L_j\mathbf{e}_j = I_j\Omega_j\mathbf{e}_j = I\boldsymbol{\Omega}$, con $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_j$.

Per definizione di velocità angolare, si ha $\dot{B}B^{-1} = A_{\boldsymbol{\omega}}$ (cfr. l'osservazione 33.17). D'altra parte $A_{\boldsymbol{\omega}} = BA_{\boldsymbol{\Omega}}B^{-1}$, così che $\dot{B} = BA_{\boldsymbol{\Omega}}$. Se $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(0)$ per ogni t, si ha quindi, se si assume $B = \mathbb{1}$ per $t = 0$ (come si può fare senza perdita di generalità), $B = \exp[tA_{\boldsymbol{\Omega}}]$ (poiché $A_{\boldsymbol{\Omega}}$ è costante), e quindi $A_{\boldsymbol{\omega}} = \dot{B}B^{-1} = A_{\boldsymbol{\Omega}}$, ovvero $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(0)$ per ogni t.

Quindi, poiché $\mathbf{l}$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono entrambi costanti e $\mathbf{l} = B\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega} = B\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}$, con $\mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega}$ collineari, anche il vettore $\mathbf{l}$ rimane collineare a $\boldsymbol{\omega}$ nello spazio κ: il sistema rigido ruota con velocità angolare uniforme intorno a uno degli assi d'inerzia $\mathbf{e}_j$ (si ha perciò una rotazione stazionaria; cfr. la definizione 44.8).

(2) Supponiamo ora che due autovalori di I coincidano, *e.g.* $I_1 = I_2 < I_3$ (il caso $I_1 < I_2 = I_3$ si discute allo stesso modo). Cfr. la figura 44.5.

Per $L = \sqrt{2EI_1} = \sqrt{2EI_2}$, l'intersezione dell'ellissoide con la sfera è una curva chiusa γ_0 (circonferenza) costituita interamente da punti d'equilibrio per il moto di $\boldsymbol{\Omega}$ (cfr. le (44.3): se $I_1 = I_2$ ogni $\boldsymbol{\Omega}$ con $\Omega_3 = 0$ è un punto d'equilibrio). Si tratta

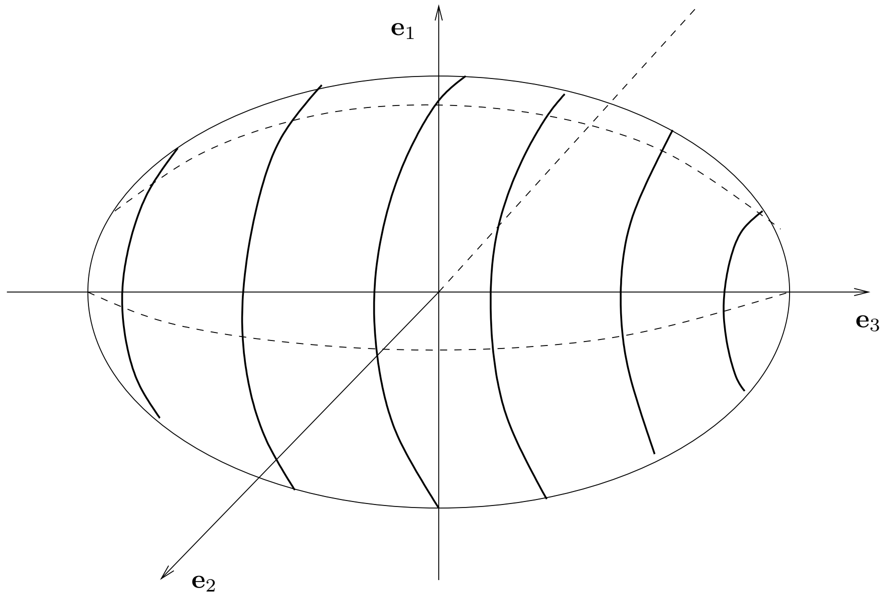

FIGURA 44.5. Discussione del teorema 44.10: caso $I_1 = I_2 < I_3$.

di punti d'equilibrio instabili. Infatti per $L \approx \sqrt{2EI_1}$, l'intersezione è una curva γ di raggio finito, che, per $L \to \sqrt{2EI_1}$, tende a γ_0. Tuttavia la curva γ non contiene posizioni d'equilibrio e quindi il moto corrispondente è periodico. È facile vedere che per ogni valore $\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_3}$ l'intersezione dell'ellissoide con la sfera definisce due circonferenze contenute in due piani ortogonali all'asse $\mathbf{e}_3$ ed equidistanti dal piano (L_1, L_2); cfr. l'esercizio 25.

Se $L = \sqrt{2EI_3}$, si ha un punto d'equilibrio stabile: la trattazione è identica a quella fatta al punto (1), e, in particolare, la stabilità potrà essere discussa come nel teorema 44.13 più avanti.

(3) Se infine $I_1 = I_2 = I_3$, anche l'ellissoide in (44.6) è in realtà una sfera, e le due sfere o non hanno intersezione o si sovrappongono ($2EI_1^2 = L^2$). In quest'ultimo caso $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$ per ogni $\boldsymbol{\Omega}$, *i.e.* $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(0)$ per ogni $\boldsymbol{\Omega}(0)$ (cfr. le (44.3)), e quindi sono possibili solo rotazioni stazionarie stabili. ■

44.12. *Osservazione.* Se i momenti principali d'inerzia sono tutti distinti (cfr. (44.7)), i membri di destra delle equazioni di Eulero non si annullano mai se non quando sono nulle almeno due componenti della velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$, e quindi non sono possibili altre rotazioni stazionarie oltre a quelle intorno agli assi d'inerzia. Se due momenti principali d'inerzia sono uguali, *e.g.* $I_1 = I_2$, sono possibili rotazioni stazionarie (instabili; cfr. il paragrfo §44.11) intorno a qualsiasi asse che giaccia nel piano individuato dagli assi d'inerzia $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ (che può essere scelto come asse d'inerzia). Infine, nel caso in cui tutti i momenti principali d'inerzia coincidano, ogni asse passante per il centro della sfera è un asse d'inerzia, e le rotazioni stazionarie intorno a esso sono stabili. In conclusione, avremo rotazioni stazionarie solo intorno ad assi che sono (o comunque possono essere scelti come) assi d'inerzia.

44.13. TEOREMA. *Nel caso in cui i momenti principali d'inerzia siano tutti distinti, le soluzioni stazionarie delle equazioni di Eulero che corrispondono a rotazioni intorno agli assi d'inerzia minore o maggiore* ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1$ *e* $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_3 \mathbf{e}_3$) *sono stabili, mentre la soluzione stazionaria che corrisponde alla rotazione intorno all'asse d'inerzia intermedio* ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega_2 \mathbf{e}_2$) *è instabile.*

44.14. *Dimostrazione del teorema 44.13.* Segue dalla costruzione del paragrafo §44.11, come ora mostreremo. Si noti innazitutto che per valori $L \neq \sqrt{2EI_j}$, per ogni $j = 1, 2, 3$, le curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera sono curve chiuse, lungo le quali il campo vettoriale non si annulla mai: le traiettorie che si svolgono su tali curve sono quindi periodiche. Per L vicino a $\sqrt{2EI_1}$ (o L vicino a $\sqrt{2EI_3}$) l'intersezione dell'ellissoide con la sfera consiste in due curve di diametro piccolo che racchiudono (sulla superficie dell'ellissoide) il punto d'equilibrio $L = \sqrt{2EI_1}$ (o $L = \sqrt{2EI_3}$), e il diametro tende a zero quando i dati iniziali tendono al punto d'equilibrio.

Al contrario, per $L = \sqrt{2EI_2}$, i punti d'equilibrio dividono le due curve d'intersezione dell'ellissoide con la sfera in quattro archi su cui si svolgono moti asintotici (per il teorema di unicità delle soluzioni). E per dati iniziali vicino ai punti d'equilibrio corrispondenti a $L = \sqrt{2EI_2}$ si hanno sia orbite chiuse che racchiudono (sulla superficie dell'ellissoide) un punto d'equilibrio $L = \sqrt{2EI_1}$ sia orbite chiuse che racchiudono (sulla superficie dell'ellissoide) un punto d'equilibrio $L = \sqrt{2EI_3}$. Quindi i punti d'equilibrio che corrispondono $L = \sqrt{2EI_2}$ sono instabili.

Alternativamente si può considerare la linearizzazione del sistema dinamico (44.3) intorno alle posizioni d'equilibrio $L = \sqrt{2EI_2}$, *i.e.* nell'intorno dei due punti d'equilibrio $\boldsymbol{\Omega} = (0, \pm\sqrt{2E/I_2}, 0)$ e verificare che gli autovalori della matrice corrispondente sono (cfr. l'esercizio 26)

$$0, \qquad \pm\sqrt{\frac{2E\,(I_3 - I_2)\,(I_2 - I_1)}{I_1 I_2^2 I_3}}, \tag{44.10}$$

quindi uno di essi è positivo. Possiamo quindi applicare il teorema 17.13. ■

44.15. ESEMPIO. Se si lancia in aria un libro imprimendogli una rotazione intorno all'asse perpendicolare alla copertina, o intorno all'asse parallelo al lato più lungo della copertina, esso cade ruotando in maniera (approssimativamente) uniforme intorno allo stesso asse. Se invece lo si lancia imprimendogli una rotazione intorno all'asse parallelo al lato più corto della copertina, tende a cadere compiendo un moto irregolare. [Ovviamente il libro è soggetto anche alla forza gravitazionale: si può tuttavia assumere che essa non alteri in maniera apprezzabile il moto rotatorio del libro ma ne determini solo la caduta verso il basso.]

44.16. *Osservazione.* Le traiettorie $(B_t, \boldsymbol{\Omega}(t))$ del sistema rigido che corrispondono alle rotazioni stazionarie intorno agli assi d'inerzia non sono stabili. Per verificare tale asserzione, è sufficiente considerare le rotazioni stazionarie intorno agli assi d'inerzia maggiore e minore (intorno alle quali il moto di $\boldsymbol{\Omega}(t)$ è stabile), nel caso in cui i momenti principali d'inerzia sono tutti distinti. Il moto è determinato dalla configurazione e dalla velocità iniziali, quindi $(B_0, \boldsymbol{\Omega}(0))$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $B_0 = \mathbb{1}$. Sia $\{\boldsymbol{\Omega}_n(0)\}$ una successione tale che $\boldsymbol{\Omega}_n(0) \to \boldsymbol{\Omega}(0) \equiv \boldsymbol{\Omega}_0$, dove $\boldsymbol{\Omega}_0$ è un punto d'equilibrio $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_1 \mathbf{e}_1$ o $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_3 \mathbf{e}_3$ per le equazioni di Eulero (44.3). In generale si ha

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| B_t(\mathbb{1}, \Omega_n(0)) - B_t(\mathbb{1}, \Omega_0) \right| \neq 0, \tag{44.11}$$

i.e. piccole variazioni della velocità angolare iniziale producono, in un tempo sufficientemente lungo, un completo sfasamento dei punti rappresentativi sulle orbite. Una dimostrazione più formale si vedrà come conseguenza del teorema 46.4 più avanti: il moto può essere caratterizzato da due frequenze, che in generale non sono commensurabili, così che il moto non è in generale periodico. Si ha quindi uno sfasamento progressivo, con conseguente instabilità delle traiettorie.

44.17. TEOREMA. *Se due momenti d'inerzia principali sono uguali, ogni soluzione delle equazioni di Eulero la cui orbita non contiene punti d'equilibrio è periodica.*

44.18. *Dimostrazione del teorema 44.17.* Il teorema è stato già dimostrato attraverso l'analisi del paragrafo §44.11, nella discussione del caso $I_1 = I_2 < I_3$. Una deduzione equivalente si può fare analiticamente studiando direttamente le equazioni (44.3). Se $I_1 = I_2$, si vede subito dalla terza equazione in (44.3) che deve essere

$$\Omega_3(t) = \Omega_3(0), \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{44.12}$$

così che

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = -\alpha\Omega_2, \\ \dot{\Omega}_2 = \alpha\Omega_1, \end{cases} \tag{44.13}$$

dove $\alpha = (I_3 - I_1)\Omega_3(0)/I_1$. Quindi la proiezione di $\boldsymbol{\Omega}(t)$ lungo l'asse $\mathbf{e}_3$ è costante, mentre la proiezione $\boldsymbol{\Omega}_p(t) = \Omega_1(t)\mathbf{e}_1 + \Omega_2(t)\mathbf{e}_2$ sul piano perpendicolare all'asse $\mathbf{e}_3$ si muove di moto rotatorio uniforme con velocità angolare α; cfr. la figura 44.6.

Infatti, introducendo il vettore costante $\boldsymbol{\alpha} \equiv \alpha\mathbf{e}_z = (0, 0, \alpha)$, possiamo riscrivere le (42.12) e (44.13) nella forma $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Omega}]$, che mostra che $\boldsymbol{\Omega}$ ruota uniformemente intorno all'asse $\mathbf{e}_3$. In particolare

$$|\boldsymbol{\Omega}_p(t)|^2 = \Omega_1^2(t) + \Omega_2^2(t) = \Omega_p^2(t) \tag{44.14}$$

è costante; infatti si ha

$$|\mathbf{L}|^2 = I_1^2 \left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) + I_3^2\Omega_3^2 = I_1^2\Omega_p^2 + I_3\Omega_3^2 \tag{44.15}$$

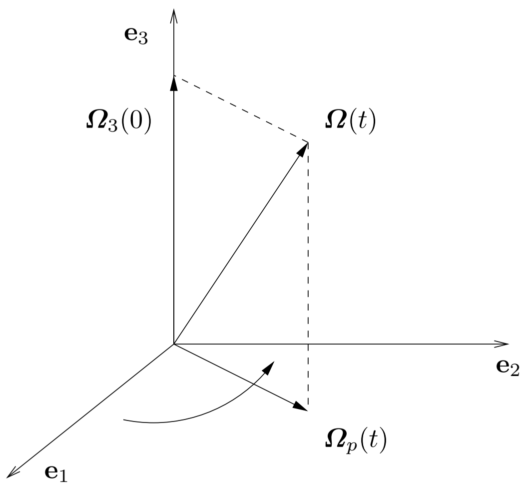

FIGURA 44.6. Discussione del teorema 44.17 nel caso $I_1 = I_2 < I_3$.

e poiché $|\mathbf{L}|$ e Ω_3 sono costanti, deve essere costante anche $\Omega_p(t)$. Questo implica che $|\boldsymbol{\Omega}(t)|^2 = \Omega_p^2(t) + \Omega_3^2(t)$ è costante. ■

45. Descrizione del moto secondo Poinsot

45.1. Introduzione. Nel presente paragrafo studieremo la descrizione secondo Poinsot del moto di un sistema rigido non sottoposto a forze. Notiamo che ci si può sempre ridurre al caso di un sistema rigido con un punto fisso: se il sistema è libero se ne può descrivere il moto nel sistema di riferimento (inerziale) in cui il centro d'inerzia è fisso. Si tratta di una descrizione geometrica molto suggestiva, ma in fondo meno fondamentale di quella data, per esempio, nel paragrafo successivo: infatti mentre l'approccio che verrà seguito nella discussione analitica del paragrafo §46 si presta a un'estensione al caso in cui il sistema rigido sia sottoposto a forze, mediante l'utilizzazione del formalismo lagrangiano (cfr. la nota bibliografica), la descrizione secondo Poinsot non può essere generalizzata a tale caso, per lo meno non im modo altrettanto costruttivo.

Si ricordi la definizione di ellissoide d'inerzia 42.20. In ogni istante t, l'ellissoide d'inerzia $\mathcal{E}$ occupa nello spazio κ la posizione $\mathcal{E}_t \equiv B_t\mathcal{E}$, tale che

$$\mathcal{E}_t = \{\boldsymbol{\omega} \,:\, \langle \boldsymbol{\omega}, i(t)\boldsymbol{\omega}\rangle = 1\}. \tag{45.1}$$

Si noti che $\mathcal{E}_t$ si muove solidalmente con il sistema rigido. Infatti, se $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_t$, allora

$\boldsymbol{\omega} = B_t \boldsymbol{\Omega}$, con $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{E}$.

45.2. LEMMA. *Nel moto di un sistema rigido con un punto fisso, se $\boldsymbol{\omega}(t)$ è la velocità angolare del sistema rigido, allora $\boldsymbol{\omega}(t)/\sqrt{2T} \in \mathcal{E}_t$.*

45.3. *Dimostrazione del lemma 45.2.* Si ha $2T = \langle \boldsymbol{\omega}(t), i(t)\boldsymbol{\omega}(t) \rangle$, quindi l'asserto segue immediatamente dalla (45.1). ∎

45.4. LEMMA. *Se $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_t$, la normale a $\mathcal{E}_t$ nel punto $\boldsymbol{\omega}$ è parallela al vettore $i(t)\boldsymbol{\omega}$.*

45.5. *Dimostrazione del lemma 45.4.* La normale a $\mathcal{E}_t$ in un punto $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione data da $\nabla \langle \boldsymbol{\omega}, i(t)\boldsymbol{\omega} \rangle = 2i(t)\boldsymbol{\omega}$ (cfr. anche l'osservazione 42.23). ∎

45.6. TEOREMA (POINSOT). *L'ellissoide d'inerzia rotola senza strisciare su un piano fisso perpendicolare al vettore momento angolare.*

45.7. *Dimostrazione del teorema 45.6.* Consideriamo uno dei due piani perpendicolari a $\mathbf{l}$ e tangenti all'ellissoide d'inerzia $\mathcal{E}_t$, e indichiamolo con π_0; per concretezza supponiamo che sia quello che interseca la retta d'azione di $\mathbf{l}$ in un punto che si trovi, rispetto al punto fisso, nella direzione di $\mathbf{l}$. Sia $\boldsymbol{\xi}$ il punto di tangenza di $\mathcal{E}_t$ con π_0; la normale all'ellissoide in $\boldsymbol{\xi}$ è parallela a $\mathbf{l}$. Poiché la normale è diretta secondo il vettore $i(t)\boldsymbol{\xi}$ (cfr. il lemma 45.4) e $\mathbf{l} = i(t)\boldsymbol{\omega}(t)$, possiamo concludere, per il lemma 45.2, che si ha $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\omega}(t)/\sqrt{2T}$.

Quindi il piano π_0 è tangente a $\mathcal{E}_t$ nel punto $\boldsymbol{\xi}$ situato sulla retta d'azione dell'asse di moto. D'altra parte

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{l} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2T}} \langle \boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{l} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2T}} \langle \boldsymbol{\omega}(t), i(t)\boldsymbol{\omega}(t) \rangle = \sqrt{2T}, \tag{45.2}$$

che implica che la distanza del piano π_0 da O è costante, quindi il piano π_0 è fisso. Cfr. la figura 45.1.

Poiché il punto di tangenza si trova sull'asse di moto, la sua velocità istantanea è nulla (potrebbe avere solo componente lungo la direzione di $\boldsymbol{\omega}(t)$, ma questo non è possibile poiché il sistema è rigido e il punto O, che appartiene all'asse di moto, è fisso). Quindi il moto dell'ellissoide sul piano π_0 è un moto di rotolamento senza strisciamento; cfr. il paragrafo §36.26. ∎

45.8. COROLLARIO. *Per condizioni iniziali vicino alla rotazione stazionaria intorno all'asse maggiore o minore, la velocità angolare rimane vicino alla sua posizione iniziale non solo nel sistema di riferimento solidale con il sistema rigido ma anche in quello fisso.*

45.9. *Dimostrazione del corollario 45.8.* È stato dimostrato nel paragrafo §44.14: lo ritroviamo come conseguenza della costruzione del paragrafo §45.7. ∎

45.10. DEFINIZIONE (POLOIDE ED ERPOLOIDE). *Il punto di contatto di $\mathcal{E}_t$ con il*

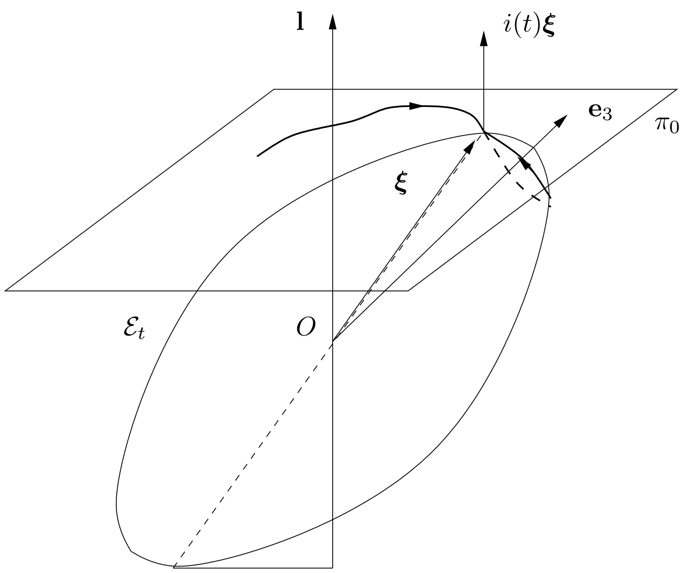

FIGURA 45.1. Descrizione del moto secondo Poinsot. L'asse di moto, individuato dalla retta d'azione del vettore $\boldsymbol{\xi}$, descrive una curva chiusa sull'ellissoide d'inerzia (poloide) e una curva sul piano π_0 (erpoloide).

*piano π_0 del teorema 45.6 descrive due curve, una su π_0 (*erpoloide*) e una su $\mathcal{E}_t$ (*poloide*).*

45.11. LEMMA. *Se l'ellissoide d'inerzia è un ellissoide di rotazione intorno a un asse, la poloide e l'erpoloide sono entrambe delle circonferenze.*

45.12. *Dimostrazione del lemma 45.11.* Supponiamo che l'asse di simmetria rotazionale dell'ellissoide sia $\mathbf{e}_3$. Si ha che $|\boldsymbol{\Omega}(t)|$ è una costante del moto (cfr. il paragrafo §44.18), e poiché $|\boldsymbol{\omega}(t)| = |\boldsymbol{\Omega}(t)|$ anche $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ deve essere costante. Per la (45.2) la componente di $\boldsymbol{\omega}(t)$ lungo $\mathbf{l}$ è costante, quindi la proiezione di $\boldsymbol{\omega}(t)$ su π_0 descrive una circonferenza.

Inoltre l'angolo tra $\boldsymbol{\omega}(t)$ e l'asse di simmetria $B_t\mathbf{e}_3$ dell'ellissoide $\mathcal{E}_t$ è costante, poiché

$$\langle \boldsymbol{\omega}(t), B_t\mathbf{e}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{e}_3 \rangle = \Omega_3, \tag{45.3}$$

che è costante (cfr. il paragrafo §44.18). Quindi anche la poloide è una circonferenza. ■

45.13. TEOREMA. *Se il sistema rigido ha un ellissoide d'inerzia che è un ellissoide di rotazione, il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ e l'asse di simmetria (rotazionale) del sistema rigido ruotano con la stessa velocità angolare intorno al vettore momento* *angolare* $\mathbf{l}$.

45.14. *Dimostrazione del teorema 45.13.* Supponiamo che l'asse di simmetria dell'ellissoide sia $\mathbf{e}_3$. In questo caso l'asse di simmetria dell'ellissoide $B_t\mathbf{e}_3$ visto nel sistema di riferimento fisso, l'asse di moto (lungo il quale è diretto $\boldsymbol{\omega}(t)$) e il momento angolare $\mathbf{l}$ giacciono sullo stesso piano. Questo segue dal fatto che

$$\langle [\mathbf{l}, \boldsymbol{\omega}], B_t\mathbf{e}_3 \rangle = \langle [\mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega}], \mathbf{e}_3 \rangle = 0. \tag{45.4}$$

Infatti possiamo scrivere $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_3\mathbf{e}_3 + \Omega_p\mathbf{e}_p$, dove $\mathbf{e}_p$ è un versore nel piano perpendicolare a $\mathbf{e}_3$ (combinazione lineare di $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$), e $\mathbf{L} = L_3\mathbf{e}_3 + L_p\mathbf{e}_p$, poiché $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega} = I_1(\Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2) + I_3\Omega_3\mathbf{e}_3 = I_1\Omega_p\mathbf{e}_p + I_3\Omega_3\mathbf{e}_3$. Quindi $\boldsymbol{\Omega}$ e $\mathbf{L}$ sono coplanari: indichiamo con π_1 il piano che li contiene. Perciò $[\mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega}] = 0$ oppure $[\mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega}]$ è perpendicolare al piano π_1, e quindi al vettore $\mathbf{e}_3$, da cui segue la (45.4).

L'angolo compreso tra i vettori $\boldsymbol{\omega}(t)$ e $\mathbf{l}$ e l'angolo compreso tra $\boldsymbol{\omega}(t)$ e $B_t\mathbf{e}_3$ si conservano, per le (45.2) e (45.3): quindi i vettori $\boldsymbol{\omega}(t)$ e $B_t\mathbf{e}_3$ ruotano con velocità angolare costante ν intorno a $\mathbf{l}$.

45.15. *Osservazione.* Nel caso di un ellissoide di rotazione, se scomponiamo il vettore $\boldsymbol{\omega}$ in una componente $\boldsymbol{\omega}'$ diretta lungo $\mathbf{l}$ e una componente $\boldsymbol{\omega}''$ lungo $B_t\mathbf{e}_3$, la prima sarà la velocità angolare della precessione, $|\boldsymbol{\omega}'| = \omega_{\text{pr}}$, poiché la seconda non contribuisce alla rotazione dell'asse del sistema rigido intorno a $\mathbf{l}$; cfr. la figura 45.2.

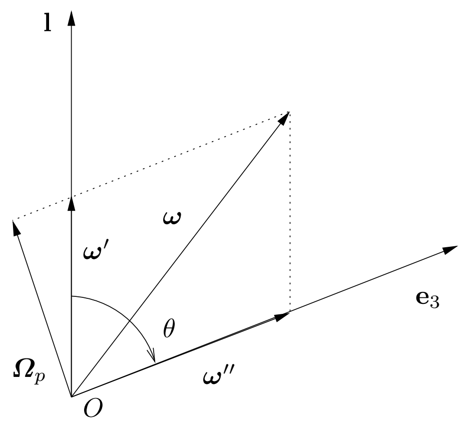

FIGURA 45.2. Costruzione grafica dell'osservazione 45.15.

Inoltre, se indichiamo con θ l'angolo tra $\mathbf{l}$ e $B_t\mathbf{e}_3$, si ha $|\boldsymbol{\omega}'|\,|\sin\theta| = \Omega_p$ (con le notazioni dei paragrafi §45.14 e §44.18). Quindi, poiché $\cos\theta = L_3/|\mathbf{L}|$ e $\Omega_p = I_1^{-1}\sqrt{L_1^2 + L_2^2} = I_1^{-1}\sqrt{|\mathbf{L}|^2 - L_3^2}$, si ottiene $\omega_{\text{pr}} = |\mathbf{L}|/I_1$. Poiché $\boldsymbol{\omega}'$ è costante nel sistema di riferimento fisso e $\boldsymbol{\omega}''$ è costante nel sistema di riferimento solidale con il sistema rigido, la precessione descritta dal moto è una precessione regolare; cfr. la definizione 43.13.

45.16. *Osservazione.* Nel caso di un ellissoide di rotazione, se consideriamo i punti d'intersezione $P_3(t)$ e $P_{\boldsymbol{\omega}}(t)$ delle rette d'azione di $B_t\mathbf{e}_3$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$, rispettivamente, con il piano π_0 del teorema 45.6, si ha che $P_{\boldsymbol{\omega}}(t)$ deve trovarsi sempre sulla retta congiungente $P_3(t)$ al punto d'intersezione di $\mathbf{l}$ con π_0. Questo vuol dire che l'ellissoide ruota con velocità angolare costante μ intorno al proprio asse di simmetria, il quale ruota a sua volta con velocità angolare costante ν intorno a $\mathbf{l}$. Quindi gli assi $\boldsymbol{\omega}(t)$ e $B_t\mathbf{e}_3$ descrivono dei coni simmetrici intorno a $\mathbf{l}$, ruotando con velocità angolare costante ν. Inoltre $\boldsymbol{\omega}(t)$ descrive un cono simmetrico intorno a $B_t\mathbf{e}_3$, ruotando con velocità angolare costante μ. I due coni descritti da $\boldsymbol{\omega}(t)$ intorno a $\mathbf{l}$ e da $\boldsymbol{\omega}(t)$ intorno a $B_t\mathbf{e}_3$ (che sono i coni di Poinsot, secondo la definizione 36.27) ruotano senza strisciare l'uno sull'altro, e il rapporto delle due velocità angolari ν e μ è uguale all'inverso del rapporto dei raggi della poloide e dell'erpoloide. Con le notazioni dei paragrafi §44.18 e §45.15, abbiamo

$$\mu = \alpha = L_3 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right), \qquad \nu = \omega_{\mathrm{pr}} = \frac{|\mathbf{L}|}{I_1}, \tag{45.5}$$

tali che $\boldsymbol{\omega}_1 = \mu\mathbf{e}_3$ e $\boldsymbol{\omega}_2 = \nu\mathbf{e}_z$ rappresentano le due velocità angolari che, sommate, dànno la precessione regolare che descrive il moto del sistema rigido (cfr. per le notazioni nel paragrafo §43.17).

45.17. *Osservazione.* Si possono utilizzare gli angoli che parametrizzano la posizione del punto di tangenza dell'ellissoide $\mathcal{E}_t$ al piano π_0 sulla poloide e sull'erpoloide, per dare una descrizione completa del moto del sistema rigido. Si noti che in generale l'erpoloide è una curva aperta sul piano π_0; la poloide è invece sempre una curva chiusa, essendo il luogo dei punti dell'ellissoide individuati dal vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$. Quando il punto avrà fatto un giro completo sull'ellissoide, il sistema rigido avrà girato di un certo angolo χ intorno all'asse individuato da $\mathbf{l}$, e così via: ogni giro sarà simile al precedente. Se χ è commesurabile con 2π, il moto nel suo complesso sarà periodico. Se χ è incommensurabile con 2π il sistema rigido non torna più allo stato di partenza; inoltre, in tal caso, il punto di tangenza ricopre sul piano in maniera ovunque densa un anello che ha centro nell'intersezione della retta passante per $\mathbf{l}$ con il piano stesso. Una parametrizzazione più esplicita del moto sarà data nel paragrafo successivo.

46. Integrabilità di un sistema rigido con un punto fisso

46.1. Introduzione. Nel presente paragrafo diamo una differente soluzione al problema di determinare il moto di un sistema rigido non soggetto a forze con un punto fisso, facendo vedere anche, come conseguenza della dimostrazione, che tale sistema costituisce un sistema integrabile, nel senso seguente.

Sia $\mathcal{S}$ lo spazio dei dati iniziali di un sistema a n gradi di libertà sottoposto a forze conservative e vincoli ideali. Ricordiamo che si definisce costante del moto (o integrale primo) una quantità che rimane costante lungo le traiettorie di un sistema dinamico; cfr. il paragrafo §16.2.

Diremo che il sistema è *integrabile* nella regione aperta $W \subset \mathcal{S}$ se è possibile definire su W n integrali primi $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ e n funzioni regolari $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathbb{T}^n$, tali che
(1) la trasformazione

$$(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}) \tag{46.1}$$

è una trasformazione invertibile e regolare tra W e $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$;
(2) esistono n funzioni $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{A}) = (\omega_1(\mathbf{A}), \ldots, \omega_n(\mathbf{A}))$ tali che, nelle variabili $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$ il moto è descritto dalla legge oraria

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0, \qquad \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{A}_0)t, \tag{46.2}$$

dove $(\mathbf{A}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)$ dipendono dai dati iniziali $(\dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{q}_0)$. Diremo in tal caso che il moto è *quasiperiodico*. Se le componenti del vettore $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{A})$ sono razionalmente indipendenti (*i.e.* se non esiste nessuna combinazione lineare a coefficienti interi che sia nulla) il moto quasiperiodico ha n periodi $T_1 = 2\pi/\omega_1(\mathbf{A}), \ldots, T_n = 2\pi/\omega_n(\mathbf{A})$. Se invece le componenti sono razionalemnte dipendenti (*e.g.* alcune di esse posssono essere nulle), esisteranno $q < n$ componenti $\omega_{i_1}(\mathbf{A}), \ldots, \boldsymbol{\omega}_{i_q}$, con $\{i_1, \ldots, i_q\} \subset \{1, \ldots, n\}$, in termini delle quali si possono scrivere le restant $n - q$L: diremo in tal caso che il moto ha *q periodi fondamentali* (o periodi tout court) $T_{i_1} = 2\pi/\omega_{i_1}(\mathbf{A}), \ldots, T_{i_q} = 2\pi/\omega_{i_q}(\mathbf{A})$.

46.2. TEOREMA. *Il moto di un sistema rigido non soggetto a forze con un punto fisso, il cui ellissoide d'inerzia sia un ellissoide di rotazione ($I_1 = I_2$), costituisce un esempio di sistema integrabile nella regione dei dati iniziali in cui $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$. Il moto è quasiperiodico con due periodi $T_1 = 2\pi/\omega_\varphi$ e $T_2 = 2\pi/\omega_\psi$, dove ω_φ e ω_ψ sono due costanti che dipendono dai dati iniziali.*

46.3. *Dimostrazione del teorema 46.2.* Poiché il momento angolare è un integrale primo, possiamo scegliere una terna di riferimento nel sistema fisso κ tale che $\mathbf{l}$ sia parallelo all'asse $\mathbf{e}_z$. Quindi

$$\mathbf{l} = (0, 0, l_z), \qquad l_z > 0, \tag{46.3}$$

(il caso $l_z = 0$ corrisponde a un sistema rigido in quiete).

Allora la (43.7) dà, scrivendo $l_z\mathbf{e}_z = L_1\mathbf{e}_1 + L_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3 \equiv B\mathbf{L}$,

$$\begin{aligned} L_1 &= I_1\Omega_1 = l_z \sin\theta \sin\psi, \\ L_2 &= I_1\Omega_2 = l_z \sin\theta \cos\psi, \\ L_3 &= I_3\Omega_3 = l_z \cos\theta, \end{aligned} \tag{46.4}$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ è data da (cfr. l'esercizio 27)

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi, \\ \Omega_2 &= \dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi, \\ \Omega_3 &= \dot\psi + \dot\varphi \cos\theta, \end{aligned} \tag{46.5}$$

e $\mathbf{L}$ ha modulo $|\mathbf{L}| = l_z$.

Se $I_1 = I_2$ abbiamo dalla (44.12) che Ω_3 è costante, quindi possiamo concludere che le due quantità

$$l_z^2 = I_1^2 \left(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + I_3^2 \Omega_3^2, \qquad L_3 = I_3 \dot\varphi \cos\theta + I_3 \dot\psi \tag{46.6}$$

sono costanti del moto.

Consideriamo dunque insieme le equazioni (46.4) e (46.6) (tenendo conto delle relazioni (46.5)). Si tratta di un numero ridondante di equazioni (sono 5 equazioni in 3 incognite), tuttavia in questo modo è immediato determinare la soluzione del moto $(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$ in termini dei dati iniziali $(\varphi_0, \theta_0, \psi_0)$ e $(\dot\varphi_0, \dot\theta_0, \dot\psi_0)$.

La seconda delle (46.6) e la terza delle (46.4) implicano che $\cos\theta$ è costante; quindi

$$\theta(t) = \theta_0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{46.7}$$

Sostituendo la (46.7) nella prima delle (46.6) troviamo che $\dot\varphi$ è costante; quindi

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \dot\varphi_0 t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{46.8}$$

Le (46.7), (46.8) e la seconda delle (46.6) implicano che anche $\dot\psi$ è costante, così che

$$\psi(t) = \psi_0 + \dot\psi_0 t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{46.9}$$

Possiamo allora scegliere come integrali primi l'angolo δ che il momento angolare forma con l'asse verticale (angolo che abbiamo fissato a zero nel sistema di riferimento scelto) e le due frequenze $\dot\varphi_0$ e $\dot\psi_0$. Come angoli scegliamo (γ, φ, ψ), dove γ è l'angolo che un versore prefissato perpendicolare a $\mathbf{l}$ forma con $\mathbf{e}_x$ (ed è quindi costante). Da qui segue l'asserto, con $\omega_\varphi = \dot\varphi_0$ e $\omega_\psi = \dot\psi_0$. ■

46.4. TEOREMA. *Sia $V(x)$ la funzione data da*

$$V(x) = -\frac{\left[(2EI_3 - L^2) - (I_3 - I_2) I_2 x^2\right] \left[(L^2 - 2EI_1) - (I_2 - I_1) I_2\, x^2\right]}{I_1 I_2^2 I_3}, \tag{46.10}$$

dove E è l'energia del sistema rigido, $L = |\mathbf{L}|$, se $\mathbf{L}$ è il momento angolare, e siano $\pm a_1$, $\pm a_3$ le radici di $V(x) = 0$. Il moto di un sistema rigido non soggetto a forze con un punto fisso, il cui ellissoide d'inerzia è tale che $I_1 < I_2 < I_3$, costituisce un *esempio di sistema integrabile nella regione dei dati iniziali con* $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ *e* $a_1 \neq a_3$*. Il moto è quasiperiodico con due periodi*

$$T_1 = 2 \int_{\alpha_-}^{\alpha^+} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-V(x)}}, \tag{46.11}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{L} \int_{\alpha_-}^{\alpha^+} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-V(x)}} \left[\int_{\alpha_-}^{\alpha^+} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-V(x)}} \left(\frac{(2EI_3 - L^2) - (I_1 - I_2) I_2 x^2}{I_1 (2EI_3 - L^2) - I_2 I_3 (I_1 - I_2)\, x^2} \right) \right]^{-1},$$

dove $\alpha_\pm$ *sono le due radici più piccole in modulo di* $V(x) = 0$*, i.e.* $\alpha_+ = \min\{a_1, a_3\}$ *e* $\alpha_- = -\alpha_+$*.*

46.5. *Dimostrazione del teorema 46.4.* Le equazioni (44.6), scrivendo $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$, permettono di esprimere due delle tre componenti di $\boldsymbol{\Omega}$ in termini della terza, *e.g.*

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \pm\sqrt{\frac{(2EI_3 - L^2) - (I_3 - I_2) I_2 \Omega_2^2}{I_1 (I_3 - I_1)}}, \\ \Omega_3 &= \pm\sqrt{\frac{(L^2 - 2EI_1) - (I_2 - I_1) I_2 \Omega_2^2}{I_3 (I_3 - I_1)}}. \end{aligned} \tag{46.12}$$

Utilizzando quindi la seconda delle equazioni di Eulero (44.3), con Ω_1 e Ω_3 espresse in termini di Ω_2 secondo le (46.12), troviamo un'equazione chiusa per Ω_2:

$$\dot{\Omega}_2 = \pm\sqrt{\frac{[(2EI_3 - L^2) - (I_3 - I_2) I_2 \Omega_2^2]\, [(L^2 - 2EI_1) - (I_2 - I_1) I_2 \Omega_2^2]}{I_1 I_2^2 I_3}}. \tag{46.13}$$

La discussione del segno in (46.13) si effettua come usuale nei sistemi unidimensionali, cfr. il capitolo 6. Inizialmente Ω_2 ha un segno che conserva finché non diventa nullo, quindi il segno cambia fino al successivo tempo in cui si annulla, e così via, con alternanza.

La (46.13) si può interpretare come legge del moto di un sistema unidimensionale di massa $m = 2$, energia $e = 0$ ed energia potenziale $V(\Omega_2)$ data dalla (46.10) con $x = \Omega_2$ (cfr. la figura 46.1), *i.e.*

$$2\ddot{\Omega}_2 = -\frac{\mathrm{d}V(\Omega_2)}{\mathrm{d}\Omega_2}. \tag{46.14}$$

Possiamo dunque concludere che $t \to \Omega_2(t)$ è una funzione periodica di t che oscilla tra due valori α_- e α_+ che sono gli estremi del più piccolo dei due intervalli $(-a_1, a_1)$ e $(-a_3, a_3)$, se $\pm a_1$ e $\pm a_3$ sono le radici di $V(x) = 0$, *i.e.*

$$a_1 = \sqrt{\frac{2EI_3 - L^2}{I_2 (I_3 - I_2)}}, \qquad a_3 = \sqrt{\frac{L^2 - 2EI_1}{I_2 (I_2 - I_1)}}, \tag{46.15}$$

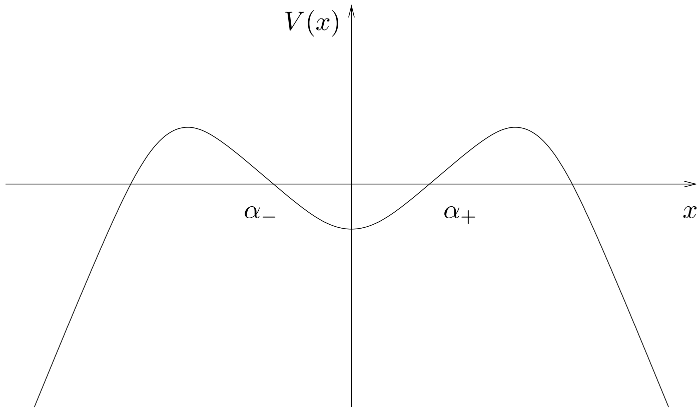

FIGURA 46.1 Grafico della funzione $V(x)$ data dalla (46.10).

purché sia $a_1 \neq a_3$, altrimenti $V(x) = 0$ ha solo due soluzioni $\pm a$, con $[dV/\mathrm{d}x](\pm a) = 0$, e quindi il moto risultante sarà non periodico (più precisamente asintotico). Il periodo del moto $t \to \Omega_2$ è quindi dato da T_1, come definito dalla prima delle (46.11).

Se definiamo $t \to \Omega(t)$ la soluzione di (46.14) con dati iniziali $(\Omega(0), \dot{\Omega}) = (\alpha_-, 0)$, allora

$$\Omega_2(t) = \Omega(t + t_0), \tag{46.16}$$

se t_0 è il tempo (minimo) necessario perché la soluzione $(\Omega(t), \dot{\Omega}(t))$ raggiunga il "dato iniziale" $(\Omega_2(0), \dot{\Omega}_2(0))$, *i.e.*

$$t_0 = \int_{\alpha_-}^{\Omega_2(0)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-V(x)}}. \tag{46.17}$$

Inoltre, per $0 \leq t \leq T_1$, si ha

$$t = \int_{\alpha_-}^{\Omega(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-V(x)}}, \tag{46.18}$$

che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra t e $\Omega \equiv \Omega(t)$.

Per determinare la configurazione del sistema rigido abbiamo bisogno di tre parametri: possiamo scegliere come coordinate gli angoli di Eulero. Se scegliamo la terna di riferimento in κ in modo tale che $\mathbf{l}$ risulti parallelo all'asse $\mathbf{e}_z$ (cfr. la (46.3)), e risulti di conseguenza $L \equiv |\mathbf{L}| = |\mathbf{l}| = l_z$, si ha

$$\begin{aligned} I_1\Omega_1 &= L \sin\theta \sin\psi, \\ I_2\Omega_2 &= L \sin\theta \cos\psi, \\ I_3\Omega_3 &= L \cos\theta, \end{aligned} \tag{46.19}$$

e quindi

$$\theta(t) = \arccos \frac{I_3\Omega_3(t)}{L}, \qquad \psi(t) = \arctan \frac{I_1\Omega_1(t)}{I_2\Omega_2(t)}, \tag{46.20}$$

dove la determinazione dell'arcotangente deve essere scelta in maniera tale che $t \to \psi(t)$ sia continua.

Quindi, ricordando le (46.12), abbiamo che θ e ψ sono state espresse in termini di Ω_2; resta da detreminare la dipendenza dal tempo del terzo angolo φ. Dalla prima e dalla seconda delle (46.5), per esclusione di $\dot\theta$, si deduce che

$$\dot\varphi = \frac{\Omega_1 \sin\psi + \Omega_2 \cos\psi}{\sin\theta} = L\frac{I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2}{I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2}, \tag{46.21}$$

dove la seconda relazione è stata ottenuta dalla prima attraverso le prime due equazioni in (46.19), che implicano

$$\frac{\sin\psi}{\sin\theta} = \frac{I_1\Omega_1}{L\sin^2\theta}, \qquad \frac{\cos\psi}{\sin\theta} = \frac{I_2\Omega_2}{L\sin^2\theta}, \qquad \sin^2\theta = \frac{I_1^2\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2}{L^2}. \tag{46.22}$$

Poiché $t \to \Omega_2(t)$ è periodica di periodo T_1, e $\Omega_1(t)$ dipende da t attraverso Ω_2 (cfr. la (46.21)), il membro di destra di (46.21) è una funzione periodica di periodo T_1. Quindi

$$\dot\varphi = \Phi(t+t_0), \qquad \Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi_n \, e^{2\pi i n t/T_1}, \tag{46.23}$$

dove $\Phi(t+t_0)$ si ottiene dal membro di destra della (46.21) scrivendo $\Omega_1(t)$ in termini di $\Omega_2(t)$, e quindi sostituendo $\Omega_2(t)$, ovunque appaia, con $\Omega(t+t_0)$, definito in (46.16). Quindi, integrando la (46.23),

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \chi_0 t + S(t+t_0) - S(t_0), \qquad S(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \chi_n \, \frac{e^{2\pi i n t/T_1}}{2\pi i n/T_1}, \tag{46.24}$$

dove $t \to S(t)$ è una funzione periodica di periodo T_1.

In conclusione abbiamo tre integrali primi: l'energia E, il modulo del momento angolare L e l'angolo δ che il momento angolare forma con l'asse verticale (angolo che abbiamo fissato a zero, con la scelta fatta della terna del sistema di riferimento).

Scegliamo tre angoli $(\gamma, \tilde\varphi, \tilde\psi)$ nel modo seguente. Come γ si può scegliere l'angolo che un versore prefissato perpendicolare a $\mathbf{l}$ forma con $\mathbf{e}_x$, che è quindi costante (*e.g.* $\gamma = 0$); poniamo inoltre

$$\tilde\psi = \frac{2\pi}{T_1}\, t_0, \qquad \tilde\varphi = \varphi - S(t_0), \tag{46.25}$$

dove t_0 è definito dopo la (46.16) come il tempo necessario per andare da $(\alpha_-, 0)$ a $(\Omega_2(0), \dot\Omega_2(0))$.

Se teniamo conto della definizione di t_0 dopo la (46.16), possiamo considerare t_0 come funzione di t attraverso la relazione $t_0 = t_0(\Omega_2(t))$, *i.e.*

$$t_0 = t_0(\Omega_2(t)) = \int_{\alpha_-}^{\Omega_2(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-V(x)}}, \tag{46.26}$$

così che se $t_0 \equiv t_0(\Omega_2(0))$ è il tempo per andare da α_- a $\Omega_2(0)$, il tempo per andare da α_- a $\Omega_2(t)$ sarà semplicemente $t_0(\Omega_2(t)) = t_0 + t$. Di conseguenza anche $S(t + t_0) \equiv \tilde{S}(t_0(\Omega_2(t)))$ può essere vista come funzione di $t_0(\Omega_2(t))$, così che, in conclusione, la dipendenza dal tempo degli angoli (46.25) può essere espressa attraverso le relazioni

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{2\pi}{T_1} t_0(\Omega_2(t)), \qquad \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - \tilde{S}(t_0(\Omega_2(t))). \tag{46.27}$$

Da qui segue allora che $\tilde{\psi}$ ruota con periodo T_1, mentre $\tilde{\varphi}$ ruota con periodo $2\pi/\chi_0$ (cfr. la (46.24)). Infatti abbiamo

$$\tilde{\psi}(t + T_1) = \frac{2\pi}{T_1}\, t_0(\Omega_2(t + T_1)) = \frac{2\pi}{T_1}\left[t_0(\Omega_2(t)) + T_1\right] = \frac{2\pi}{T_1}\tilde{\psi}(t) + 2\pi, \tag{46.28}$$

poiché il moto $t \to \Omega_2(t)$ è periodico di periodo T_1, e

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t + 2\pi/\chi_0) &= \varphi(t + 2\pi/\chi_0) - \tilde{S}(t_0(\Omega_2(t + 2\pi/\chi_0))) \\ &= \varphi_0 + \chi_0\left[t + 2\pi/\chi_0\right] - \tilde{S}(t_0(\Omega_2(0))) = \tilde{\varphi}(t) + 2\pi, \end{aligned} \tag{46.29}$$

poiché $S(t_0) = \tilde{S}(t_0(\Omega_2(t)))$ in (46.25) (cfr. la (46.27)), laddove $S(t_0)$ deve essere considerata una costante nell'espressione di $\varphi(t)$ in (46.24) (poiché in (46.24) $S(t_0)$ non è funzione di t, *i.e.* $t_0 = t_0(\Omega_2(0))$).

È immediato verificare, dalla (46.26) e dalla (46.13), che

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t_0(\Omega_2(t))}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}t_0(\Omega_2)}{\mathrm{d}\Omega_2}\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{-V(\Omega_2(t))}}\sqrt{-V(\Omega_2(t))} = 1, \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\varphi_0 + \chi_0 t - \tilde{S}(t_0(\Omega_2(0)))\Big] = \chi_0, \end{aligned} \tag{46.30}$$

così che, dalle (46.29) e (46.30), concludiamo che $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\varphi}$ sono angoli che ruotano uniformemente con periodi, rispettivamente, T_1 e $2\pi/\chi_0$. Si noti che la prima delle (46.30) è in realtà una semplice verifica, poiché già abbiamo osservato che $t_0(\Omega_2(t)) = t_0(\Omega_2(0)) + t \equiv t_0 + t$, così che $\mathrm{d}t_0(\Omega_2(t))/\mathrm{d}t = 1$.

Dalla definizione di χ_n in (46.23) abbiamo che

$$\chi_0 = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \mathrm{d}t\, \Phi(t); \tag{46.31}$$

effettuando il cambio di variabili $t \to \Omega(t) \equiv \Omega$, si vede che, tenendo conto che

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\sqrt{-V(\Omega)}}, \qquad \Omega(0) = \alpha_-, \qquad \Omega(T_1) = \alpha_+, \tag{46.32}$$

otteniamo che χ_0 in (46.31) si può riscrivere

$$\chi_0 = \frac{2}{T_1} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{d\Omega}{\sqrt{-V(\Omega)}} \, \Phi(t(\Omega)), \tag{46.33}$$

e quindi, tenendo conto della definizione di T_1, segue anche la seconda di (46.11), con $T_2 = 2\pi/\chi_0$. La determinazione della soluzione delle equazioni del moto è stata quindi ridotta alle due "quadrature" (46.11). ■

46.6. *Osservazione.* In generale le coordinate scelte nel paragrafo §46.5 non si riducono a quelle del caso simmetrico ($I_1 = I_2$) introdotte nel paragrafo §46.3, quando $I_1 \to I_2$. Si osservi tuttavia che c'è grande arbitrarietà nel definire gli integrali primi, perché ogni funzione di (δ, E, L) è ancora un integrale primo. È allora possibile scegliere due integrali primi Φ e Ψ che divengano $\dot{\varphi}_0$ e $\dot{\psi}_0$ per $I_1 \to I_2$; si pone

$$\begin{aligned} \Phi =& \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \mathrm{d}t \, L \, \frac{I_1 \tilde{\Omega}_1^2(t) + I_1 \tilde{\Omega}_2^2(t)}{I_1^2 \tilde{\Omega}_1^2(t) + I_1^2 \tilde{\Omega}_2^2(t)}, \\ \Psi =& \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \mathrm{d}t \, \frac{(L^2 - 2EI_3)\tilde{\Omega}_3(t)}{I_1^2 \tilde{\Omega}_1^2(t) + I_1^2 \tilde{\Omega}_2^2(t)}, \end{aligned} \tag{46.34}$$

dove $\tilde{\Omega}_2(t) = \Omega(t)$, mentre $\tilde{\Omega}_1(t)$ e $\tilde{\Omega}_3(t)$ si ottengono dalle (46.12) sostituendo $\Omega_2(t)$ con $\tilde{\Omega}_2(t)$, e l'ambiguità di segno di $\tilde{\Omega}_3(t)$ è risolta notando che $\Omega_3(t)$ in (46.12) non si annulla mai per $L \neq 0$, e quindi ha segno costante univocamente determinato dal valore iniziale. Se ricordiamo la (46.21) e notiamo che, analogamente, utilizzando la (46.6) e la (46.21) stessa, risulta

$$\dot{\psi} = \frac{L^2 - 2EI_3}{I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2} \, \Omega_3, \tag{46.35}$$

si deduce che le (46.34) esprimono le medie su un periodo di $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$, e si riducono quindi alle frequenze ω_φ e ω_ψ del teorema 46.2 per $I_1 = I_2$. Notiamo incidentalemente che, per $I_1 = I_2$, otteniamo dalle (46.25), $\Phi \equiv \dot{\varphi} = L/I_1$ e $\Psi \equiv \dot{\psi} = L_3(I_1^{-1} - I_3^{-1})$, consistentemente con le (45.5).

Ovviamente si potrebbe anche cambiare $\tilde{\psi}$ in un angolo che si riduce a ψ per $I_1 \to I_2$ (e utilizzare φ in luogo di $\tilde{\varphi}$).

46.7. *Osservazione.* Le trasformazioni di coordinate, che, nei paragrafi §46.3 e §46.5, portano alle nuove variabili, sono regolari e invertibili (come richiede la definizione di integrabilità, cfr. il paragrafo §46.1): questo può essere esplicitamente verificato senza difficoltà (cfr. l'esercizio 28).

Nota bibliografica

Per definizioni e proprietà dell'ellissoide d'inerzia abbiamo fatto riferimento essenzialmente a [Arnol'd2], Cap. VI. Per gli angoli di Eulero abbiamo seguito [Gallavotti], Cap. 3, mentre, riguardo allo studio delle precessioni regolari, abbiamo fatto riferimento a [Levi-Civita-Amaldi], Vol. 1, Cap. IV.

Il paragrafo §44 segue principalmente [Arnol'd2], Cap. VI, e, in misura minore, [Landau-Lifshitz], Cap. VI, il paragrafo §45 segue [Arnol'd2], Cap, VI, [Dell'Antonio], Cap. V, il paragrafo §46 è infine tratto da [Gallavotti], Cap. 5.

Esercizi

Esercizio 1. Verificare le (42.5) e (42.6). [*Suggerimento.* Si ricordi che, fissata una base $\{v_1, v_2, v_3\}$, gli elementi di matrice A_{ij} sono dati da $(A\mathbf{e}_i)_j = \langle \mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_j \rangle$. Usando la definizione di A in (42.1) e (42.2), e due volte l'identità (37.7) si ottiene $A_{ij} = \langle \mathbf{e}_j, [\mathbf{Q}, [\mathbf{e}_i, \mathbf{Q}]] \rangle = \langle [ee_i, \mathbf{Q}], [\mathbf{e}_j, \mathbf{Q}] \rangle$. Un semplice conto à $[\mathbf{e}_1, \mathbf{Q}] = (0, -Q_3, Q_2)$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{Q}] = (Q_3, 0, -Q_1)$ e $[\mathbf{e}_3, \mathbf{Q}] = (-Q_2, Q_1, 0)$. Da qui segue subito la (42.6). La (42.5) si ottiene allo stesso modo lavorando in una base del sistema fisso.]

Esercizio 2. Dimostrare che in uno spazio vettoriale E, dato un operatore lineare simmetrico positivo A, i suoi autovalori sono tutti positivi. [*Soluzione.* Poiché $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ per ogni $x \in E$, se si ha $Av = \lambda v$, allora $\langle v, Av \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda |v|^2 \geq 0$, quindi $\lambda \geq 0$.]

Esercizio 3. Dimostrare che se l'ellissoide d'inerzia $\mathcal{E}$ ammette un asse $\mathbf{e}$ di simmetria di ordine 2, allora $\mathbf{e}$ è un asse d'inerzia.

Esercizio 4. Dimostrare che, dato un ellissoide d'inerzia $\mathcal{E}$, se $\mathbf{e}$ è un asse di simmetria di ordine $n > 2$, allora $\mathbf{e}$ è un asse di simmetria rotazionale per $\mathcal{E}$.

Esercizio 5. Dimostrare che, se un sistema rigido ammette due assi di simmetria di ordine $n > 2$ distinti, allora il suo ellissoide di rotazione deve essere una sfera.

Esercizio 6. Dimostrare che, se un sistema rigido ammette due assi di simmetria distinti tali che l'angolo tra esse sia diverso da $\pi/2$ e almeno uno dei due sia un asse di simmetria di ordine $n > 2$, allora il suo ellissoide di rotazione deve essere una sfera.

Esercizio 7. Data una superficie Σ in $\mathbb{R}^n$ definita dalla relazione $G(x) = 0$, mostrare che il vettore normale alla superficie Σ nel suo punto x è diretto lungo il vettore $\nabla G(x)$. [*Suggerimento.* Ragionare come nel paragrafo §21.7.]

Esercizio 8. Verificare che per un sistema rigido continuo la coordinata del centro di massa O è definita come l'integrale

$$\mathbf{q}_O = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\mathbf{Q}\, \rho(\mathbf{Q})\, \mathbf{Q}, \qquad M = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\mathbf{Q}\, \rho(\mathbf{Q}),$$

dove $\rho(\mathbf{Q})$ è la densità di massa. [*Suggerimento.* Si parta dalla definizione 36.9 di centro di massa data per un sistema di punti materiali e si ragioni come nel paragrafo §42.27.]

Esercizio 9. Dimostrare le (42.27). [*Suggerimento.* Si tenga conto dell'osservazione 42.24 e si applichi la definizione 42.16.]

Esercizio 10. Dimostrare le (42.28). [*Soluzione.* Si ha

$$I_1 = I_2 = \lambda \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \mathrm{d}x\, x^2, \qquad I_3 = 0,$$

come segue dalla definizione 42.16 e dall'osservazione 42.24.]

Esercizio 11. Dimostrare le (42.29). [*Soluzione.* Utilizzando coordinate polari si ha

$$I_1 = I_2 = \lambda \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\theta\, r^2 \sin^2\theta, \qquad I_3 = \lambda \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\theta\, r^2 \theta,$$

come segue dalla definizione 42.16 e dall'osservazione 42.24.]

Esercizio 12. Dimostrare le (42.30). [*Soluzione.* Utilizzando coordinate polari si ha

$$I_1 = I_2 = \sigma \int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} r'\,\mathrm{d}\theta\, (r')^2 \sin^2\theta, \qquad I_3 = \sigma \int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} r'\,\mathrm{d}\theta\, (r')^2,$$

come segue dalla definizione 42.16 e dall'osservazione 42.24.]

Esercizio 13. Dimostrare le (42.31). [*Soluzione.* Si ragioni come per l'esercizio precedente, con l'unica differenza che ora r' va integrato tra a e b.]

Esercizio 14. Dimostrare le (42.32). [*Soluzione.* Utilizzando coordinate cilindriche si ha

$$I_1 = I_2 = \rho \int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} r'\,\mathrm{d}\theta \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\, \left(z^2 + (r')^2 \sin^2\theta\right),$$
$$I_3 = \rho \int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} r'\,\mathrm{d}\theta \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\, (r')^2,$$

come segue dalla definizione 42.16 e dall'osservazione 42.24.]

Esercizio 15. Dimostrare che il momento d'inerzia di un cilindro circolare retto rispetto a un asse $\mathbf{e}$ passante per un diametro di una delle due basi è dato da $I_{\mathbf{e}} = m(h^2/3 + r^2/4)$. [*Suggerimento.* Combinare le (42.32) con il teorema 42.25.]

Esercizio 16. Dimostrare le (42.33). [*Soluzione.* Utilizzando coordinate sferiche si ha

$$I_1 = I_2 = I_3 = \rho \int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{\pi} (r')^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, (r')^2 \sin^2\theta,$$

come segue dalla definizione 42.16, dalla discussione del paragrafo §42.22 e dall'osservazione 42.24.]

Esercizio 17. Dimostrare che il momento d'inerzia di una sfera rispetto a un asse $\mathbf{e}$ tangente alla superficie è dato da $I_{\mathbf{e}} = 7mr^2/5$. [*Suggerimento.* Combinare le (42.33) con il teorema 42.25.]

Esercizio 18. Dimostrare le (42.34). [*Suggerimento.* Si ha

$$I_1 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y\, y^2, \qquad I_2 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y\, x^2,$$
$$I_3 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y\, \left(x^2 + y^2\right),$$

come segue dalla definizione 42.16 e dall'osservazione 42.24.]

Esercizio 19. Dimostrare le (42.35). [*Suggerimento.* L'angolo al vertice del cono α è tale che $\tan\alpha = r/h$; quindi il centro di massa avrà coordinate $(0,0,z_0)$, con

$$z_0 = \frac{1}{m}\left(\rho\int_0^h z\,\mathrm{d}z\int_0^{rz/h} r'\,\mathrm{d}r'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right) = \frac{3}{4}h.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}
I_1 = I_2 &= \rho\int_0^h \mathrm{d}z\int_0^{rz/h} r'\,\mathrm{d}r'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left((z-z_0)^2 + (\rho')^2\sin^2\theta\right),\\
I_3 &= \rho\int_0^h \mathrm{d}z\int_0^{rz/h} r'\,\mathrm{d}r'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,(r')^2,
\end{aligned}$$

avendo tenuto conto della definizione 42.16 e dell'osservazione 42.24.]

Esercizio 20. Dimostrare che il momento d'inerzia di un cono circolare retto rispetto a un asse $\mathbf{e}$ passante per il vertice e perpendicolare all'asse del cono è dato da $I_{\mathbf{e}} = 3m(h^2/5 + r^2/20)$. [*Suggerimento.* Combinare le (42.35) con il teorema 42.25.]

Esercizio 21. Dimostrare che nella discussione delle equazioni di Eulero (44.3), per $\sqrt{2EI_2} < L < \sqrt{2EI_3}$, l'intersezione dell'ellissoide $\langle \mathbf{L}, I^{-1}\mathbf{L}\rangle = 2E$ con la sfera $\langle \mathbf{L},\mathbf{L}\rangle = L^2$ consiste in due curve chiuse che si avvolgono intorno all'asse $\mathbf{e}_3$. [*Soluzione.* Le curve d'intersezione sono curve in $\mathbb{R}^3$, quindi possono essere parametrizzate come $(L_1, L_2) \to L_3 = f(L_1, L_2)$. Usando coordinate polari si ha $(L_1, L_2) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, con $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in \mathbb{R}$: infatti in principio le curve potrebbero non chiudersi. Noi vogliamo appunto dimostrare che, dopo che θ ha compiuto un giro completo di 2π, le curve si sono chiuse. Dalle (44.6) si vede subito che, dati L_1 e L_2 sono definiti due valori di L_3, quindi le curve sono due; inoltre si ha

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{I_1} + \frac{\rho^2\sin^2\theta}{I_2} + \frac{L^2-\rho^2}{I_3} = 2E,$$

quindi, esplicitando ρ in funzione di θ,

$$\rho^2 = \frac{2EI_3 - L^2}{\dfrac{I_3}{I_1}\cos^2\theta + \dfrac{I_3}{I_2}\sin^2\theta - 1},$$

dove $2EI_3 - L^2 > 0$ e $I_3\cos^2\theta/I_1 + I_3\sin^2\theta/I_2 - 1 > 0$, così che $\rho = \rho(\theta)$ è univocamente determinata come funzione periodica di θ. Pertanto $f(L_1, L_2) = f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) \equiv G(\theta)$ è una funzione periodica di θ di periodo 2π.]

Esercizio 22. Dimostrare che nella discussione delle equazioni di Eulero (44.3), per $\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_2}$, l'intersezione dell'ellissoide $\langle \mathbf{L}, I^{-1}\mathbf{L}\rangle = 2E$ con la sfera $\langle \mathbf{L},\mathbf{L}\rangle = L^2$ consiste in due curve chiuse che si avvolgono intorno all'asse $\mathbf{e}_1$. [*Suggerimento.* Ragionare analogamente a quanto fatto nell'esercizio 21.]

Esercizio 23. Verificare che le curve degli esercizi 21 e 22 non sono curve piane. [*Suggerimento.* Basta far vedere che la funzione $G(\theta)$ definita nello svolgimento dell'esercizio 21 non è costante in θ.]

Esercizio 24. Dimostrare che l'intersezione di una sfera di raggio R e centro C con un piano π passante per C definisce un cerchio di raggio R e centro C. [*Suggerimento.* Si ricordi che l'equazione generale di un piano è data da $ax + by + cz + d = 0$, con a, b, c, d costanti reali. Possiamo fissare un sistema di riferimento con origine in C, così che l'equazione del piano diventa $ax + by + cz = 0$

e l'equazione della sfera diventa $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Attraverso una rotazione $(x, y, z) \to (x', y', z')$ possiamo trasformare l'equazione del piano in $z' = 0$, mentre l'equazione della sfera rimane $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$. Quindi l'intersezione della sfera con il piano individua il cerchio $x'^2 + y'^2 = R^2$.]

Esercizio 25. Dimostrare che, per $I_1 = I_2$ e $\sqrt{2EI_1} < L < \sqrt{2EI_3}$, l'intersezione dell'ellissoide $\langle \mathbf{L}, I^{-1}\mathbf{L}\rangle = 2E$ con la sfera $\langle \mathbf{L}, \mathbf{L}\rangle = L^2$ consiste in due circonferenze contenute in due piani ortogonali all'asse $\mathbf{e}_3$, equidistanti dall'origine. [*Suggerimento.* Per $I_1 = I_2$ l'espressione per ρ trovata nello svolgimento dell'esercizio 21 diventa

$$\rho^2 = I_1 \frac{2EI_3 - L^2}{I_3 - I_1} = \text{cost.},$$

quindi la proiezione delle due curve sul piano (L_1, L_2) definisce una circonferenza di raggio ρ. Inoltre si ha $L_3^2 = L^2 - L_1^2 - L_2^2 = L^2 - \rho^2$, quindi $L_3 = \pm\sqrt{L^2 - \rho^2}$, *i.e.* anche L_3 è costante.]

Esercizio 26. Sia A la matrice del sistema lineare ottenuto per linearizzazione del sistema (44.3). Dimostrare che gli autovalori corrispondenti sono dati dalla (44.10).

Esercizio 27. Dimostrare le (46.5).

Esercizio 28. Verificare che le trasformazioni di coordinate descritte nei paragrafi §46.3 e §46.5 sono trasformazioni regolari. [*Suggerimento.* Verificare che si tratta di trasformazioni differenziabili e la cui matrice jacobiana ha determinante non nullo, e quindi invertibili.]

Bibliografia ragionata

• I testi di riferimento di base, che si sono tenuti principalmente presenti nel corso dell'opera, sono i seguenti:

[1] M. W. Hirsch, S. Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974. [Hirsch-Smale].

[2] G. Dell'Antonio: *Elementi di Meccanica*, Liguori, Napoli, 1996. [Dell'Antonio].

[3] V.I. Arnol'd: *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma, 1979. [Arnol'd2].

Essenzialmente si è seguito [Hirsch-Smale] per i capitoli 1, 2, 3, 4 e 5, [Dell'Antonio] per i capitoli 4, 5, 6 e 7, e [Arnol'd2] per i capitoli 7, 8, 9 e 10, anche se si possono trovare vari riferimenti ai testi citati anche altrove (come sempre indicato nelle note bibliografiche che corredano i vari capitoli).

Notiamo in generale che [Hirsch-Smale] è un libro nel complesso facile da leggere, secondo le linee che sono state seguite anche nel presente testo, anche se talora si possono trovare dimostrazioni o anche solo passaggi assolutamente non banali, in cui, improvvisamente, sono richieste al lettore maggiori applicazione e autonomia di ragionamento. I libri [Arnol'd2] e [Dell'Antonio] sono due testi sicuramente stimolanti ma non di facile lettura per il lettore inesperto che affronti per la prima volta gli argomenti ivi trattati. In particolare [Arnol'd2] è un testo ormai classico e di importanza storica assolutamente fondamentale, che ha dato inizio a un approccio di tipo moderno allo studio della Meccanica Razionale.

• Per alcuni argomenti specifici si sono tenuti presenti anche:

[4] F. John: *Ordinary Differential Equations - Lecture Notes*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1965. [John].

[5] G. Gallavotti: *Meccanica Elementare*, Bollati Boringhieri, Torino, 1980. [Gallavotti].

[6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz: *Meccanica*, Editori Riuniti, Roma, 1976. [Landau-

Lifshitz].

[7] T. Levi-Civita, U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica Elementare*, Zanichelli, Bologna, 1947. [Levi-Civita-Amaldi].

[8] H. Goldstein: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1980. [Goldstein].

[9] S. Bressan, A. Grioli: *Esercizi di Meccanica Razionale*, Edizioni Libreria Cortina, Padova, 1998. [Bressan-Grioli].

[10] V.I. Arnol'd: *Équations Différentielles Ordinaires*, MIR, Mosca, 1974. [Arnol'd1].

[11] A. Fasano, S. Marmi: *Meccanica Analitica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994. [Fasano-Marmi].

Più precisamente si è fatto a riferimento a [John] nel capitolo 3, a [Gallavotti] nei capitoli 7, 9 e 10, a [Landau-Lifshitz] nei capitoli 9 e 10, a [Goldstein] nel capitolo 7, a [Bressan-Grioli] per alcuni esercizi del capitolo 8, a [Levi-Civita-Amaldi] nei capitoli 9 e 10, a [Fasano-Marmi] nel capitolo 7, a [Arnol'd1] nel capitolo 3. In particolare rimandiamo a [Gallavotti] per un approfondimento di molti degli argomenti trattati nei vari capitoli: è inoltre il libro che maggiormente abbiamo avuto in mente nel desiderio di studiare fino in fondo ogni argomento trattato, senza lasciare salti logici o utilizzare risultati indimostrati nel corso dell'analisi (problema che ogni tanto si presenta *e.g.* in [Arnol'd2]). Il libro [Levi-Civita-Amaldi] è un testo classico, forse un po' datato come impostazione, ma che sicuramente offre moltissimi spunti di riflessione e approfondimento.

Un testo utile per gli esercizi, specie di analisi qualitativa per sistemi planari, sistemi unidimensionali e campi centrali, sfortunatamente non pubblicato, è il seguente:

[12] G. Dell'Antonio, E. Orlandi, A. Teta: *Esercizi di Meccanica Razionale*, SISSA, Trieste. [Dell'Antonio-Orlandi-Teta].

Un altro testo in cui si possono trovare esercizi sui moti unidimensionali è:

[13] A. Celletti: *Esercizi di Meccanica Razionale*, Aracne, 1999.

Alcuni degli esercizi dati nel testo, in particolare nei capitoli 5, 6 e 7, sono presi o ispirati al testo [Dell'Antonio-Orlandi-Teta]. Altri esercizi, anche di stampo diverso, e applicazioni, sugli stessi argomenti, si possono trovare in [Gallavotti].

• Per richiami di Analisi, di Geometria e di Algebra si può consultare qualsiasi testo sull'argomento. Noi, a titolo puramente indicativo, abbiamo fatto riferimento a:

[14] E. Giusti: *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1985. [Giusti1].

[15] E. Giusti: *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1983. [Giusti2].

[16] S. Lang: *Algebra Lineare*, Bollati Boringhieri, Torino, 1970. [Lang].

[17] A.G. Kuroš: *Corso di Algebra Superiore*, Editori Riuniti, Roma, 1977. [Kuroš].

[18] E. Martinelli: *Il metodo delle coordinate*, Veschi, Roma, 1984. [Martinelli].

[19] E. Sernesi: *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torini, 1994. [Sernesi].

[20] M. P. do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976. [do Carmo].

[21] B. Dubrovin, S. Novikov, V. Fomenko: *Geometria contemporanea*, Editori Riuniti, 1991. [Dubrovin-Novikov-Fomenko].

I riferimenti bibliografici sono sempre stati indicati in dettaglio nelle note bibliografiche in coda ai singoli capitoli.

• Riguardo agli argomenti di carattere più avanzato (teorema della curva di Jordan, proprietà generiche e teoria di Floquet), a cui si è solamente accennato nel testo, abbiamo fatto riferimento ai seguenti testi, rispettivamente per il teorema della curva di Jordan, per la nozione di genericità e per la teoria di Floquet:

[22] G. N. Watson: *Complex integration and Cauchy's theorem* Cambridge University Press, Cambridge, 1914. [Watson].

[23] A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. [Katok-Hasselblatt].

[24] E.L. Ince: *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1944. [Ince].

Si tratta in ogni caso di argomenti al di là del contenuto del testo, e il riferimento è dato solo per motivi di completezza.

Infine diamo un elenco di testi che, pur non essendo stati citati nel corso dell'opera e pur non avendovi fatto riferimento, sono cnsigliati per un approfondimento di argomenti trattati o per una discussione di altri aspeti della teoria dei sistemi dinamici che non sono stati affrontati in questa sede:

[25] I. Percival, D. Richards: *Introduction to dynamics*, Cambridge University Press,

Cambridge-New York, 1982.

[26] E.T. Whittaker: *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. With an introduction to the problem of three bodies*, Cambridge University Press, Cambridge, 1937.

[27] V.I. Arnol'd, A. Avez: *Ergodic problems of classical mechanics*, Benjamin, New York-Amsterdam, 1968.

[28] V.I. Arnol'd, V.V. Kozlov, A.I. Neishtadt: *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences: Dynamical Systems. III, Springer, Berlin, 1993.

[29] N.N. Krasovskij: *Stability of motion*, Stanford University Press, Stanford, 1963.

[30] D.W. Jordan, P.Smith: *Nonlinear ordinary differential equations*, Clarendon Press, Oxford, 1977.

Indice analitico

Indice dei nomi

Indice delle materie