Capitolo 3. Equazioni differenziali ordinarie

10. Problema di Cauchy: esistenza e unicità della soluzione

10.1. Introduzione. Nel capitolo precedente abbiamo studiato un caso particolare di sistemi di equazioni differenziali: i sistemi lineari. Abbiamo visto che in tal caso esiste un'unica soluzione definita globalmente. Vogliamo ora vedere cosa si può dire in generale se il campo vettoriale è una qualsiasi funzione continua $x \to f(x)$.

Vedremo che in generale la situazione è molto più complicata. Sotto opportune ipotesi di regolarità sul campo vettoriale (e precisamente che esso sia una funzione di classe C^1, o anche più semplicemente che sia una funzione localmente lipschitziana) vedremo che è ancora possibile dimostrare l'esistenza e unicità della soluzione: tuttavia in generale tale soluzione sarà solo *locale*, *i.e.* sarà definita solo per un intervallo di tempo limitato.

Altra fondamentale differenza rispetto al caso lineare è che, nel caso di un campo vettoriale qualsiasi, non esiste alcun metodo generale (cioè applicabile in qualsiasi situazione) per trovare la soluzione; anzi in generale il problema di determinare analiticamente la soluzione non ha soluzione, e bisogna allora accontentarsi di trovare soluzioni numericamente. Questo non vuol dire che in alcuni casi particolarmente semplici non sia possibile trovare la soluzione: un caso che esplicitamente considereremo sarà il caso di equazioni a variabili separabili.

10.2. DEFINIZIONE (SISTEMA DINAMICO). *Dati uno spazio vettoriale E e un insieme aperto $W \subset E$, definiremo* sistema dinamico *una coppia (W, φ), dove $\varphi\colon J \times W \to W$, con J intervallo in $\mathbb{R}$, è un'applicazione differenziabile che verifica le seguenti proprietà:*
(1) $\exists t_0 \in J$ tale che $\varphi(t_0, x) = x$,
(2) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$.

10.3. *Osservazione.* La proprietà (2) comporta che l'applicazione φ ha proprietà di gruppo (cfr. la nota bibliografica e l'esercizio 1). In particolare esiste l'inversa: basta prendere $s = t_0 - t$ in (2).

10.4. Data un'applicazione $(t, x) \to \varphi(t, x)$, per l'ipotesi di differenziabilità, è possibile definire un *campo vettoriale*

$$f(x,t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,x), \tag{10.1}$$

per ogni $x \in W$; se poniamo $x(t) = \varphi(t,x)$, sottolineando la sola dipendenza dal tempo della φ, possiamo riscrivere la (10.1) nella forma

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,t). \tag{10.2}$$

Introdotto in E un sistema di coordinate, così che $x = (x_1, \ldots, x_n)$, la (10.2) equivale al sistema di n equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n, t), \\ \qquad \ldots\ldots, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n, t). \end{cases} \tag{10.3}$$

Quindi a un sistema dinamico (W, φ) possiamo sempre fare corrispondere un campo vettoriale $f \colon W \times I \to E$, dove I è un intervallo in $\mathbb{R}$. Ci si può porre il problema inverso: dato un campo vettoriale $f : W \times I \to E$, con $W \times I \subset E \times \mathbb{R}$, esiste qualche applicazione φ che per un opportuno $J \subset \mathbb{R}$ associ a $(t,x) \in J \times W$ una funzione $\varphi(t,x)$ che soddisfi la (10.1) e tale che $\varphi(t_0,x) = x$ (quindi tale che (W,φ) si possa interpretare come sistema dinamico)? Oltre al problema di esistenza si può considerare il problema di unicità delle soluzioni: una volta fissato il campo vettoriale $f \colon W \times I \to E$ e un dato iniziale $x_0 \in W$, se esistono soluzioni $\varphi(t, x_0)$, quante ce ne sono? Sotto quali condizioni esiste un'unica soluzione?

In generale la risposta a tali domande è non banale: non è nemmeno ovvio che debbano esistere soluzioni a tale problema, in particolare senza ipotesi opportune sul campo vettoriale f. Prima di affrontare il problema, definiamo in maniera più formale cosa si intende per soluzione.

10.5. DEFINIZIONE (EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE). *Dati uno spazio vettoriale E e un insieme aperto $W \subset E$, chiameremo* sistema di equazioni differenziali ordinarie *delle relazioni che legano una funzione $x \colon J \to W$, con J intervallo in $\mathbb{R}$, ad alcune delle sue derivate:*

$$F\left(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(p)}(t)\right) = 0, \qquad p \in \mathbb{N}, \tag{10.4}$$

con $F \colon J \times W \times E^p \to \mathbb{R}^n$ continua nei suoi argomenti. Qui e nel seguito $x^{(j)} = \mathrm{d}^j x/\mathrm{d}t^j$. Diremo che il sistema (10.4) è in forma normale *se la derivata di ordine più alto è isolata a primo membro:*

$$x^{(p)}(t) = f\left(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(p-1)}(t)\right). \tag{10.5}$$

Diremo che il sistema (10.4) è autonomo *se F non dipende esplicitamente dal tempo, i.e. se $\partial F/\partial t = 0$ e* non autonomo *in caso contrario. Diremo che il sistema (10.4) è* del primo ordine *se $p = 1$.*

10.6. Nel seguito consideremo prevalentemente equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Preliminarmente limiteremo l'analisi al caso di sistemi autonomi. Per semplicità studieremo direttamente il caso in cui il sistema è scritto in forma normale: quindi in questo paragrafo (e in quelli immediatamente successivi) assumiamo che il sistema si possa sempre scrivere nella forma

$$\dot{x} = f(x), \tag{10.6}$$

con $x\colon J \to W \subset E$ e $\dot{x}(t) = x^{(1)}(t)$.

Più avanti, nel paragrafo §13, vedremo come i risultati trovati in questo caso si generalizzino facilmente al caso di sistemi non autonomi. Vedremo poi nel paragrafo §14 come estendere i risultati al caso di equazioni differenziali ordinarie di ordine qualsiasi della forma (10.4).

10.7. Definizione (Soluzione di un'equazione differenziale ordinaria). *Dati uno spazio vettoriale E e un insieme aperto $W \subset E$, sia $f\colon W \to E$ un'applicazione continua. Diremo che $u = u(t)$ è una* soluzione *dell'equazione (10.6) se*
(1) $u\colon J \to W$, con J intervallo in $\mathbb{R}$,
(2) $u(t)$ è di classe C^1,
(3) $\dot{u}(t) = f(u(t))$ $\forall t \in J$.
Dato $(t_0, x_0) \in J \times W$ diremo che $u = u(t)$ è una soluzione della (10.6) con condizioni iniziali x_0 se soddisfa le proprietà (1)÷(3) e, inoltre, $u(t_0) = x_0$.

10.8. *Osservazione.* L'insieme J è un intervallo di $\mathbb{R}$: può essere della forma $[\alpha, \beta]$, (α, β), $(\alpha, \beta]$ o $[\alpha, \beta)$, con $\alpha < \beta$. Si può avere $\alpha = -\infty$ o $\beta = \infty$ o entrambi.

10.9. *Osservazione.* Il parametro $t \in J$ può essere interpretato come tempo: $\varphi(t, x_0)$ rappresenta allora l'evoluzione nel tempo del dato iniziale x_0 determinata dal campo vettoriale $f : W \to E$. Geometricamente la soluzione della (10.5) con condizioni iniziali x_0 è una curva $(t, x_0) \to \varphi(t, x_0)$ passante per x_0 all'istante $t = t_0$. A ogni istante t il vettore tangente alla curva nel punto $\varphi(t, x_0)$ è dato dal campo vettoriale $f(\varphi(t, x_0))$.

10.10. Fissato $x_0 \in W$, la funzione $J \to W$, con J intervallo in $\mathbb{R}$, data da $\varphi(t, x_0)$, si chiama *traiettoria* con dato iniziale x_0, mentre la curva descritta da $\varphi(t, x_0)$ al variare di $t \in J$, *i.e.* il supporto della funzione $\varphi(t, x_0)$ in W, prende il nome di *orbita*. Per ogni $x_0 \in W$ l'intervallo massimale di definizione di t dipenderà da x_0 (cfr. il paragrafo §2.3 per la definizione precisa di soluzione massimale): possiamo allora indicare tale intervallo $J(x_0)$. Sia $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W \ : \ t \in J(x)\}$. La funzione $(t, x) \in \Omega \to \varphi(t, x) \in W$ prende allora il nome di *flusso*: il flusso di un sistema dinamico è quindi l'insieme di tutte le traiettorie.

10.11. Definizione (Problema di Cauchy). *Il problema della determinazione delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali del primo ordine con condizioni iniziali*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \ , \end{cases} \tag{10.7}$$

con $x_0 \in W \subset E$ *e* $f\colon W \to E$*, prende il nome di* problema di Cauchy*.*

10.12. *Osservazione.* Vedremo che il problema di Cauchy ammette soluzione unica se si fa l'ipotesi che la funzione f sia di classe C^1 (o semplicemente lipschitziana, cfr. l'osservazione 10.32 più avanti). Si può dimostrare che la soluzione esiste sempre sotto l'ipotesi che f sia solo continua; in tal caso però non è garantita l'unicità della soluzione (come dimostra l'esempio 10.42 sotto). Prima di enunciare precisamente tali risultati e procedere alla loro dimostrazione, richiamiamo una serie di risultati di Analisi (cfr. la nota bibliografica) che saranno utilizzati nel corso della dimostrazione: il lettore che volesse passare direttamente alla discussione del problema di Cauchy può andare direttamente al paragrafo §10.25.

10.13. Definizione (Funzioni lipschitziane). *Dati uno spazio vettoriale normato* E *e una funzione* $f\colon W \to E$*, con* W *insieme aperto di* E*, diremo che* f *è* localmente lipschitziana *(in* W*) se per ogni* $W_0 \subset W$ *compatto, esiste una costante* $L = L(W_0)$ *tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in W_0, \tag{10.8}$$

dove $|\cdot|$ *è la norma in* E*. La costante* L *prende il nome di* costante di Lipschitz *della funzione* f *nella regione* W_0 *e dipenderà in generale da* W_0*. Se comunque sia scelto* $W_0 \subset W$ *esiste una costante* L *indipendente da* W_0*, diremo che la funzione* f *è* lipschitziana *(in* W*).*

10.14. *Osservazione.* Dalla definizione 10.13 segue che se una funzione $f\colon W \to E$ è localmente lipschitziana in W, allora, comunque si consideri un compatto $W_0 \subset W$, la funzione $f|W_0$ è lipschitziana in W_0.

10.15. *Osservazione.* Di solito una funzione $f\colon W \to E$, con $W \subset E$ aperto, si definisce localmente lipschitziana se per ogni $x_0 \in W$ esiste un intorno $B(x_0)$ tale che la restrizione $f|B(x_0)$ è lipschitziana (in $B(x_0)$), ovvero esiste una costante $L = L(B(x_0))$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ $\forall x, y \in B(x_0)$. Tuttavia tale definizione in realtà è equivalente alla definizione 10.13. È immediato vedere che la proprietà appena enunciata è implicata dalla definizione 10.13 (se la proprietà vale per ogni compatto $W_0 \neq \emptyset$, basta considerare, per ogni $x_0 \in W_0 \setminus \partial W_0$, un intorno $B(x_0) \subset W_0 \setminus \partial W_0$: la funzione f sarà ivi lipschitziana con costante di Lipschitz $L(W_0)$). L'implicazione inversa è meno banale, ma vale ugualmente, come dimostra il seguente risultato.

10.16. Lemma. *Siano* E *uno spazio vettoriale normato e* $W \subset E$ *un suo sottoinsieme* *aperto. Supponiamo che la funzione* $f\colon W \to E$ *verifichi la seguente proprietà: per ogni* $x_0 \in W$ *esistono un intorno* $B(x_0)$ *e una costante* Λ *tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq \Lambda|x - y| \qquad \forall x, y \in B(x_0). \tag{10.9}$$

Allora per ogni compatto $W_0 \subset W$*, la funzione* $f|W_0$ *è lipschitziana (in* W_0*).*

10.17. *Dimostrazione del lemma 10.16.* Per assurdo supponiamo che $f|W_0$ non sia lipschitizana, *i.e.* non ammetta una costante L tale che valga la (10.8). Questo vuol dire che per ogni $K > 0$ esistono $x, y \in W_0$ tali che

$$|f(x) - f(y)| > K|x - y|. \tag{10.10}$$

In particolare per ogni $n \in \mathbb{N}$ si possono trovare $x_n, y_n \in W_0$ tali che

$$|f(x_n) - f(y_n)| > n|x_n - y_n|. \tag{10.11}$$

Poiché W_0 è compatto, si possono trovare sottosuccessioni di $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, che possiamo indicare con $\{x_{n_k}\}$ e $\{y_{n_k}\}$, convergenti a due punti x_0 e y_0, rispettivamente, entrambi contenuti in W_0.

D'altra parte

$$|x_0 - y_0| = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{2M}{n_k}, \tag{10.12}$$

dove $M = \max_{x\in W_0} |f(x)|$. Quindi $x_0 \equiv y_0$.

Per ipotesi si può trovare un intorno $B(x_0)$ di x_0 tale $f|B(x_0)$ ha costante di Lipschitz Λ. Inoltre esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_k}, y_{n_k} \in B(x_0)$ per ogni $k > N$. Quindi per $k > N$

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \Lambda\,|x_{n_k} - y_{n_k}|\,, \tag{10.13}$$

che è in contraddizione con la (10.11) non appena $n_k > \Lambda$. ■

10.18. LEMMA. *Se una funzione* $f\colon W \to E$ *è di classe* C^1*, allora* f *è localmente lipschitziana.*

10.19. *Dimostrazione del lemma 10.18.* Sia f una funzione di classe C^1 da W in E. Sia $Df(x)$ l'operatore lineare che associa a un vettore $u \in E$ il vettore

$$Df(x)\,u \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x + \varepsilon u) - f(x)}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}; \tag{10.14}$$

data una base in cui x abbia coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$, l'operatore $Df(x)$ è rappresentato dalla matrice di elementi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, \ldots, x_n), \tag{10.15}$$

che sono funzioni continue sotto l'ipotesi che f sia di classe C^1. Quindi è ben definita la norma

$$\|Df(x)\| = \max_{|u|\le 1} |Df(x)\,u| \tag{10.16}$$

e abbiamo $\forall u \in E$

$$|Df(x)\,u| \le \|Df(x)\|\,|u|\,. \tag{10.17}$$

Sia ora $x_0 \in W$ e $B_b(x_0)$ l'intorno di raggio b e centro x_0 (con b abbastanza piccolo in modo che $B_b(x_0)$ sia contenuto all'interno di W); poniamo

$$W_0 = \overline{B_b(x_0)} = \{x \in E \ : \ |x - x_0| \le b\}. \tag{10.18}$$

Poiché $Df(x)$ è continua e W_0 è compatto, esiste (per il teorema di Weierstrass)

$$L = \max_{x\in W_0} \|Df(x)\|. \tag{10.19}$$

Inoltre, per costruzione, W_0 è convesso, *i.e.* per ogni $x, y \in W_0$ il vettore

$$y + su, \qquad s \in [0,1], \qquad u \equiv x - y, \tag{10.20}$$

appartiene ancora a W; scriviamo allora

$$\Phi(s) = f(y + su), \tag{10.21}$$

che definisce un'applicazione $\Phi\colon\ [0,1] \to E$, composizione di un'applicazione $U :$ $[0,1] \to W_0$, $U(s) = y + su$, con la funzione $f|W_0$, *i.e.* $\Phi = f \circ U$. Per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(s)}{\mathrm{d}s} = Df(y + us)\,u \tag{10.22}$$

e quindi

$$f(x) - f(y) = \Phi(1) - \Phi(0) = \int_0^1 \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}\Phi(s)}{\mathrm{d}s} = \int_0^1 \mathrm{d}s\,Df(y + us)\,u, \tag{10.23}$$

così che, per le (10.17) e (10.19),

$$|f(x) - f(y)| \le \int_0^1 \mathrm{d}s\,|Df(y + us)\,u| \le \int_0^1 \mathrm{d}s\|Df(y + us)\|\,|u| \le L\,|x - y|\,, \tag{10.24}$$

che implica la locale lipschitzianità della f nella regione W_0. ■

10.20. DEFINIZIONE (SUCCESSIONE DI FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONVERGENTE). *Siano E uno spazio vettoriale normato e $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso; sia*

$\{u_k\} \equiv \{u_k\}_{k\geq 0}$ *una successione di funzioni* $u_k\colon J \to E$. *Diremo che la successione* $\{u_k\}$ converge uniformemente *in* J *se*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall p, q > N \text{ e } \forall t \in J \quad |u_p(t) - u_q(t)| < \varepsilon. \tag{10.25}$$

10.21. LEMMA (CONTINUITÀ DEL LIMITE). *Sia* $\{u_k\}$ *una successione di funzioni continue* $u_k\colon J \to E$ *che converge uniformemente in* J. *Allora la funzione*

$$u \equiv \lim_{k\to\infty} u_k \tag{10.26}$$

è continua in J.

10.22. *Dimostrazione del lemma 10.21.* Poiché per ogni $t \in J$ la successione $u_k(t)$ è una successione di Cauchy, esiste il limite

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t) \qquad \forall t \in J. \tag{10.27}$$

Quindi, per l'ipotesi di convergenza uniforme, $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che

$$|u_k(t) - u(t)| < \varepsilon \qquad \forall k > N, \tag{10.28}$$

uniformemente in $t \in J$; vogliamo dimostrare che la funzione così definita è continua in J.

Siano $t, s \in J$; si ha

$$\begin{aligned} |u(t) - u(s)| &\leq |u(t) - u_k(t)| + |u_k(t) - u_k(s)| + |u_k(s) - u(s)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + |u_k(t) - u_k(s)| + \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \tag{10.29}$$

purché k sia sufficientemente grande ($k > N_0$, per qualche $N_0 \in \mathbb{N}$). D'altra parte, per la continuità di $u_k(t)$, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta \equiv \delta(k)$ tale che se $|t - s| \leq \delta(k)$ allora

$$|u_k(t) - u_k(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.30}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ possiamo dunque scegliere N_0 tale che per $k > N_0$ e $\delta \equiv \delta(k)$ opportuno si abbia, per $|t - s| < \delta$, unendo le (10.29) e (10.30),

$$|u(t) - u(s)| < \varepsilon, \tag{10.31}$$

che implica quindi la continuità della funzione u. ■

10.23. LEMMA (PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO D'INTEGRALE). *Sia* $\{u_k\}$ *una successione di funzioni* $u_k\colon J \to E$ *che converge uniformemente in* $J = [\alpha, \beta]$. *Allora*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\, u_k(t) = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t \lim_{k\to\infty} u_k(t). \tag{10.32}$$

10.24. *Dimostrazione del lemma 10.23.* Per la convergenza uniforme della successione $\{u_k\}$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > N$ si ha $|u_k(t) - u(t)| < \varepsilon/(\beta - \alpha)$ uniformemente in $t \in J$. Definiamo

$$I_k \equiv \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\, u_k(t), \qquad I \equiv \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\, u(t); \tag{10.33}$$

si ha allora

$$\begin{aligned} |I_k - I| &= \left| \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\, (u_k(t) - u(t)) \right| \\ &\le \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\, |u_k(t) - u(t)| \le \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}\, (\beta - \alpha) = \varepsilon, \end{aligned} \tag{10.34}$$

che implica la convergenza della successione I_k a I:

$$\lim_{k \to \infty} I_k = I, \tag{10.35}$$

i.e. la (10.32). ■

10.25. Lemma. *Una funzione continua u: $J \to W$ è soluzione dell'equazione integrale*

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \mathrm{d}s f(u(s)), \tag{10.36}$$

con f continua, se e solo se u è di classe C^1 e risolve il problema di Cauchy (10.7).

10.26. *Dimostrazione del lemma 10.25.* Supponiamo che u sia continua e risolva la (10.36). Allora $u(t_0) = x_0$. Inoltre la funzione $u(t)$ è derivabile e la sua derivata soddisfa $\dot{u}(t) = f(u(t))$: segue in particolare che $u(t)$ ha derivata continua, *i.e.* è di classe C^1.

Viceversa, supponiamo che u sia di classe C^1 e risolva la (10.7). Integrando $\dot{u} = f(u)$ tra t_0 e t otteniamo la (10.36). Ovviamente essendo di classe C^1 la u è continua. ■

10.27. Teorema (Esistenza della soluzione). *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e f: $W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Sia $x_0 \in W$. Allora esiste $a > 0$ e una soluzione u: $J \to W$, con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$, del problema di Cauchy (10.7).*

10.28. *Dimostrazione del teorema 10.27.* Sia $W_0 = \overline{B_b(x_0)}$ per qualche $b > 0$; definiamo

$$M = \max_{x \in W_0} |f(x)|, \qquad L = \max_{x \in W_0} \|Df(x)\|, \tag{10.37}$$

guido

Sia $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ con $a > 0$ da determinare. Costruiamo una successione di funzioni u_k: $J \to W_0$ nel modo seguente.
(1) Poniamo
$$u_0(t) \equiv x_0. \tag{10.38}$$

(2) Sia quindi
$$u_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(u_0(s)). \tag{10.39}$$

(3) Supponiamo che $u_k(t)$ sia stato definito e che
$$u_k(t) \in W_0 \qquad \forall t \in J; \tag{10.40}$$
definiamo allora
$$u_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(u_k(s)). \tag{10.41}$$
Tale definizione ha senso e può essere iterata poiché, utilizzando le (10.37) e (10.40),
$$|u_{k+1}(t) - x_0| \le \int_{t_0}^{t} |f(u_k(s))| \le M|t - t_0| \le Ma \le b, \tag{10.42}$$
purché
$$a \le \frac{b}{M}. \tag{10.43}$$
Quindi se $u_k \in W_0$ si ha $u_{k+1} \in W_0$, così risulta, per induzione, $u_k(t) \in W_0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall t \in J$.

Sempre per induzione possiamo dimostare che, se definiamo
$$B = \max_{t \in J} |u_1(t) - x_0|\,, \tag{10.44}$$
si ha
$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \le B(La)^{k-1}, \tag{10.45}$$
dove L è la costante di Lipschitz della f nella regione W_0, *i.e.*
$$|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y|\,, \qquad \forall x, y \in W_0, \tag{10.46}$$
(cfr. la (10.37) e il lemma 10.18). Per $k = 1$ la (10.45) è ovvia in virtù della definizione (10.44); se vale la (10.45) per qualche k allora
$$\begin{aligned} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| &\le \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, |f(u_k(s)) - f(u_{k-1}(s))| \\ &\le L \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, |u_k(s) - u_{k-1}(s)| \\ &\le LaB\,(La)^{k-1} \le B(La)^k, \end{aligned} \tag{10.47}$$

da cui segue la (10.45) per $k+1$.

Abbiamo allora che per ogni $p > q > N > 0$

$$\begin{aligned}|u_p(t) - u_q(t)| &= |(u_p(t) - u_{p-1}(t)) + (u_{p-1}(t) - u_{p-2}(t)) + \ldots + (u_{q+1}(t) - u_q(t))| \\ &\leq |u_p(t) - u_{p-1}(t)| + |u_{p-1}(t) - u_{p-2}(t)| + \ldots + |u_{q+1}(t) - u_q(t)| \\ &\leq \sum_{k=q}^{p-1} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \qquad (10.48) \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq B \sum_{k=N}^{\infty} (La)^k,\end{aligned}$$

così che, se

$$a < \frac{1}{L}, \tag{10.49}$$

la serie in (10.48) è sommabile e dà

$$\sum_{k=N}^{\infty} (La)^k = (La)^N \sum_{k=0}^{\infty} (La)^k = \frac{(La)^N}{1 - La} \equiv F_N(La). \tag{10.50}$$

Dato $\varepsilon > 0$ si può scegliere N sufficientemente grande così che $F_N(La) < \varepsilon$, purché valga la (10.49). Ne segue che la successione di funzioni $\{u_k\}$ è uniformemente convergente (cfr. la definizione 10.20); la successione di funzioni $\{f(u_k)\}$ è anch'essa uniformemente convergente, come è immediato verificare utilizzando la continuità di f.

Per il lemma 10.21 la funzione

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t) \tag{10.51}$$

è continua. Si ha quindi

$$\begin{aligned}u(t) = \lim_{k\to\infty} u_{k+1}(t) &= x_0 + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(u_k(s)) \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \lim_{k\to\infty} f(u_k(s)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(u(s)),\end{aligned} \tag{10.52}$$

dove si sono usati il lemma 10.23 per portare il limite sotto il segno d'integrale e la continuità di f per porre

$$\lim_{k\to\infty} f(u_k(s)) = f\big(\lim_{k\to\infty} u_k(s)\big). \tag{10.53}$$

Quindi $u\colon J \to W_0$ è continua e risolve l'equazione integrale (10.36): per il lemma 10.25 è dunque soluzione del problema di Cauchy (10.7).

La dimostrazione del teorema è dunque completa. ■

10.29. *Osservazione.* Come la dimostrazione del teorema 10.27 fa vedere, la costante a che definisce la semiampiezza dell'intervallo J deve verificare le due condizioni (10.43) e (10.49):

$$a < \min \left\{ \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\}, \tag{10.54}$$

dove M è il massimo della f in W_0, definito dalla (10.37), e L è la costante di Lipschitz della f in W_0, definita in (10.46).

10.30. *Osservazione.* Le funzioni u_k introdotte per dimostare l'esistenza della soluzione nel paragrafo §10.28 sono dette *approssimanti di Picard* e il procedimento seguito è noto come *metodo di iterazione di Picard*.

10.31. *Osservazione.* Nel caso di sistemi lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(t_0) = x_0 \ , \end{cases} \tag{10.55}$$

il metodo di iterazione di Picard fornisce una costruzione diretta della soluzione $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$. Infatti è facile dimostrare per induzione (cfr. l'esercizio 5) che, definendo la successione di funzioni $\{u_k\}$ iterativamente come in (10.41), si ha

$$u_k(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} A^n \left(t - t_0\right)^n x_0, \tag{10.56}$$

così che

$$u(t) \equiv \lim_{k\to\infty} u_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \left(t - t_0\right)^n x_0 = e^{A(t-t_0)}x_0. \tag{10.57}$$

Inoltre è facile verificare che in tal caso nessuna condizione è richiesta su a. L'osservazione 10.41 più avanti mostra che la condizione $a < 1/L$ non è necessaria, e si vede facilmente che $L \equiv \|A\|$ è una costante di Lipschitz per la funzione $f(x) = Ax$ su tutto E. Quindi anche la condizione che la soluzione rimanga sempre all'interno di un compatto W_0 non è necessaria perché la costante di Lipschitz è uniforme in tutto E, così che anche la condizione $a \leq b/M$ diventa non necessaria. In conclusione la soluzione è definita per ogni t.

10.32. *Osservazione.* La dimostrazione del teorema 10.27 mostra che è sufficiente assumere che il campo vettoriale sia localmente lipschitziano per dimostrare che la soluzione esiste. Si può in realtà dimostrare che, sotto la sola ipotesi di continuità sulla f, esiste una soluzione al problema di Cauchy (10.7) (cfr. la nota bibliografica); tuttavia l'ipotesi di locale lipschitzianità garantisce anche l'unicità della soluzione (cfr. il teorema 10.36 sotto), che invece non vale nel caso in cui la f sia solo continua.

10.33. *Osservazione.* La funzione u, soluzione del problema di Cauchy (10.7) con f di classe C^1, dipende di fatto in modo C^2 da $t \in J$. Infatti la discussione del paragrafo §10.28 dimostra che u è di classe C^1. D'altra parte, se f è di classe C^1 allora, scrivendo

$$\dot{u}(t) = f(u(t)), \tag{10.58}$$

abbiamo che $\dot{u}$ è di classe C^1, in quanto composizione di due funzioni di classe C^1. Quindi u, primitiva di una funzione di classe C^1, deve essere di classe C^2. Più in generale si dimostra facilmente per induzione il risultato seguente.

10.34. Proposizione. *Se f è di classe C^k in (10.7), allora la soluzione u è di classe C^{k+1} in $t \in J$.*

10.35. *Dimostrazione della proposizione 10.34.* Per $k = 1$ la dimostrazione del teorema 10.27 dà u di classe C^1 e quindi, per l'osservazione 10.33, la proposizione per $k = 1$ è soddisfatta. Supponiamo che la Proposizione valga per qualche k: dimostriamo allora che essa deve valere anche per $k + 1$. Se $f \in C^{k+1}$ allora, in particolare, $f \in C^k$, quindi la soluzione u è di classe C^{k+1} in $t \in J$. Segue allora che la funzione composta $f(u(t))$ è di classe C^{k+1} poiché sia f sia u sono tali: quindi $\dot{u}$ è di classe C^{k+1}, ovvero u è di classe C^{k+2}. ■

10.36. Teorema (Unicità della soluzione). *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $f\colon W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Sia $x_0 \in W$. Allora la soluzione $u\colon J \to W$ del problema di Cauchy (10.7), con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ e $a > 0$, è unica.*

10.37. *Dimostrazione del teorema 10.36.* Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni distinte $x\colon J \to W$ e $y\colon J \to W$ del problema di Cauchy (10.7). Definiamo

$$w(t) \equiv |x(t) - y(t)|\,, \tag{10.59}$$

e poniamo

$$w_0 \equiv \max_{t \in J} w(t); \tag{10.60}$$

sia $t_1 \in J$ un punto in cui la funzione w raggiunge il valore massimo w_0. Si ha allora

$$\begin{aligned} w_0 = |x(t_1) - y(t_1)| &= \left| \left(x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \dot{x}(t) \right) - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \dot{y}(t) \right) \right| \\ &\le \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, |\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, |f(x(t)) - f(y(t))| \\ &\le L \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, |x(t) - y(t)| = L \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t w(t) \le L a w_0. \end{aligned} \tag{10.61}$$

Se assumiamo $a < 1/L$ (cfr. la (10.50)), la (10.49) implica allora $w_0 \le L a w_0 < w_0$, portando così a una contraddizione. ■

10.38. *Osservazione.* Vedremo in §11.8 una diversa dimostrazione del teorema 10.36, che non fa uso della proprietà (10.49) (cfr. anche l'osservazione 10.41 sotto).

10.39. Teorema (Esistenza e unicità della soluzione). *Siano $W \subset E$ un* *sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $f\colon W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Sia $x_0 \in W$. Allora esiste $a > 0$ e un'unica soluzione $u\colon J \to W$, con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$, del problema di Cauchy (10.7).*

10.40. *Dimostrazione del teorema (10.39).* Si combinino semplicemente il teorema 10.27 e il teorema 10.36. ■

10.41. *Osservazione.* In realtà la condizione (10.49) sotto la quale è stata dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione non è necessaria. Infatti, invece della diseguaglianza (10.45), si può dimostrare per induzione (cfr. l'esercizio 6)

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \le B_0 \frac{1}{k!} L^{k-1} |t - t_0|^k, \tag{10.62}$$

con $B_0 = |f(x_0)|$, che implica la convergenza uniforme della successione u_k a una funzione u senza alcuna ulteriore condizione su a: basta tener conto che $|t - t_0| \le a$ per ogni $t \in J$. Si noti inoltre che la (10.62) implica la stima

$$|u_p(t) - u_q(t)| \le \frac{B_0}{L} \sum_{k=N}^{N} \frac{1}{k!} \left(L|t - t_0|\right)^k \le \frac{B_0}{L} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(L|t - t_0|\right)^k, \tag{10.63}$$

in luogo della (10.48); di nuovo la (10.63) assicura la convegenza uniforme di $\{u_k\}$, senza imporre alcuna condizione su a.

Poiché anche dalla dimostrazione del teorema 10.36 data al paragrafo successivo (cfr. §11.8) si vedrà che la condizione $a < 1/L$ non è necessaria, possiamo concludere che il teorema di esistenza e unicità vale sotto la sola condizione $a \le b/M$ (cfr. la (10.43)).

10.42. ESEMPIO. Come anticipato nel paragrafo §10.32 l'ipotesi di locale lipschitzianità è essenziale per garantire l'unicità della soluzione. Si consideri per esempio il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{10.64}$$

dove $f(x) = 3x^{2/3}$ non è lipschitziana in $x = 0$. Si vede immediatamente che $x(t) \equiv 0$ è soluzione. D'altra parte anche $x(t) = t^3$ è soluzione. Non solo: in generale, per ogni $t_1 < 0 < t_2$, la funzione

$$x(t) = \begin{cases} (t - t_1)^3, & t < t_1, \\ 0, & t_1 \le t \le t_2, \\ (t - t_2)^3, & t > t_2, \end{cases} \tag{10.65}$$

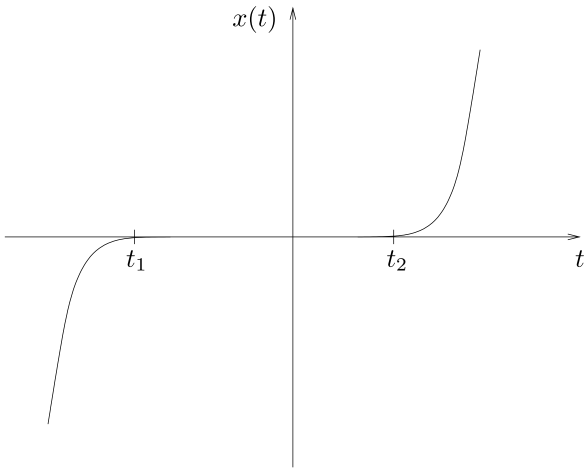

FIGURA 10.1. Grafico della funzione $x(t)$ data dalla (10.65).

è soluzione di (10.64). Infatti $x(0) = 0$, x è di classe C^1 e risolve l'equazione $\dot{x} = 3x^{2/3}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; cfr. la figura 10.1.

10.43. COROLLARIO. *Due soluzioni distinte del sistema dinamico* $\dot{x} = f(x)$ *non*

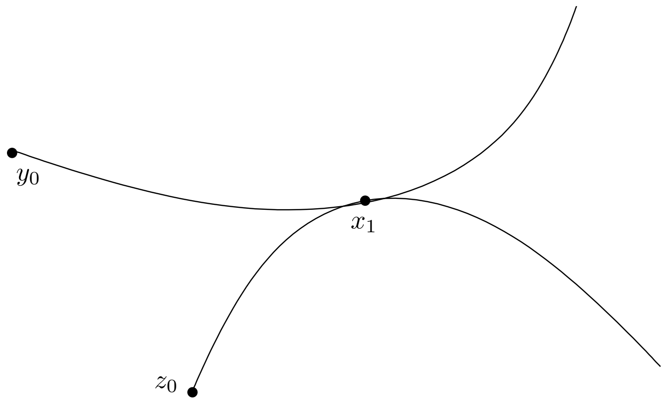

FIGURA 10.2. Due soluzioni $y(t)$ e $z(t)$, con dati iniziali, rispettivamente, y_0 e z_0, che si intersecano nel punto x_1: come mostra il corollario 10.43 tale scenario non può presentarsi.

possono mai intersecarsi.

10.44. *Dimostrazione del corollario 10.43.* Segue dal teorema 10.39. Supponiamo infatti che due soluzioni distinte $y(t)$ e $z(t)$ si intersechino in un punto $x_1 \in E$; cfr. la figura 10.2. Le due soluzioni devono essere soluzioni di due problemi di Cauchy che differiscono per le condizioni iniziali: siano $y(t_0) = y_0$ e $z(t_0) = z_0$ le due condizioni iniziali. Si deve allora avere $x_1 = y(t_1)$ e $x_1 = z(t_2)$ per due valori t_1 e t_2. Ovviamente se $z(t)$ è soluzione con dato iniziale $z(t_0) = z_0$, anche $w(t) = z(t + t_2 - t_1)$ è soluzione con dato iniziale $w(t_0) = z(t_0 + t_1 - t_2)$: inoltre $w(t_1) = z(t_2) = y(t_1) = x_1$, *i.e.* le due soluzioni $y(t)$ e $z(t)$ arrivano in x_1 nello stesso istante t_1. Consideriamo dunque il problema di Cauchy (10.7) con condizioni iniziali $x(t_1) = x_1$. Per il teorema 10.39 la soluzione esiste ed è unica in un intervallo $[t_1 - a, t_1 + a]$: quindi $w(t) \equiv y(t)$ almeno per $t \in [t_1 - a, t_1 + a]$. Quindi le due curve $t \to y(t)$ e $t \to w(t)$ non possono partire da x_1 lungo direzioni diverse; vista la definzione di $w(t)$, le due curve $t \to y(t)$ e $t \to z(t)$ non possono quindi intersecarsi in x_1, senza coincidere in un intorno del punto (t_1, x_1), ovvero non possono essere distinte. ■

10.45. *Osservazione.* Segue in particolare dal corollario 10.43 che una soluzione del sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ non si può autointersecare. Vedremo più avanti una dimostrazione alternativa del corollario 10.43 (cfr. il lemma 12.5).

11. Dipendenza dai dati iniziali

11.1. Introduzione. Nel presente paragrafo dimostreremo preliminarmente un importante risultato, al quale si farà riferimento più volte nel seguito, che prende il nome di lemma di Gronwall. Utilizzeremo quindi tale risultato per dimostrare il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali e per dare una dimostrazione alternativa del teorema di unicità.

11.2. LEMMA (GRONWALL). *Siano $J = [\alpha, \beta]$ un intervallo dell'asse reale e $u: J \to \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa. Se esistono due costanti $C \geq 0$ e $\kappa \geq 0$ tali che*

$$u(t) \leq C + \kappa \int_{\alpha}^{t} \mathrm{d}s\, u(s), \tag{11.1}$$

per ogni $t \in J$, allora

$$u(t) \leq C e^{\kappa(t-\alpha)}, \tag{11.2}$$

per ogni $t \in J$.

11.3. *Prima dimostrazione del lemma 11.2.* Consideriamo prima il caso $C > 0$. Possiamo scrivere la (11.1) nella forma

$$u(t) \leq U(t), \tag{11.3}$$

se definiamo

$$U(t) = C + \kappa \int_{\alpha}^{t} \mathrm{d}s\, u(s) > 0; \tag{11.4}$$

si ha inoltre

$$U(\alpha) = C, \tag{11.5}$$

e

$$\dot{U}(t) = \kappa u(t). \tag{11.6}$$

Utilizzando le (11.3) e (11.6) si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log U(t) = \frac{\dot{U}(t)}{U(t)} = \frac{\kappa u(t)}{U(t)} \leq \kappa \tag{11.7}$$

e integrando tra α e t si ha

$$\log U(t) \leq \log U(\alpha) + \kappa\,(t - \alpha)\,, \tag{11.8}$$

dove $U(\alpha) = C$ per la (11.5). Esponenziando entrambi i membri troviamo allora

$$U(t) \leq C\, e^{\kappa(t-\alpha)}, \tag{11.9}$$

che, unita alla (11.3), implica la (11.2) nel caso $C > 0$.

Se $C = 0$, consideriamo una successione di numeri $C_k > 0$ che tendono a 0 per $k \to \infty$. Per ogni C_k si può applicare l'argomento sopra: prendendo il limite $k \to \infty$ si ottiene la (11.2) per $C = 0$. ■

11.4. *Seconda dimostrazione del lemma 11.2.* Definiamo

$$w(t) \equiv \int_\alpha^t \mathrm{d}s\, u(s) \tag{11.10}$$

così che la (11.1) si può riscrivere

$$u(t) \le C + \kappa w(t) \tag{11.11}$$

che espressa in termini della sola $w(t)$ dà

$$\dot{w}(t) \le C + \kappa w(t). \tag{11.12}$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri della diseguaglianza (11.12) per $e^{-\kappa t}$ e portiamo $\kappa w(t)\, e^{-\kappa t}$ a primo membro, otteniamo

$$(\dot{w}(t) - \kappa w(t))\, e^{-\kappa t} \le C e^{-\kappa t}, \tag{11.13}$$

che dà

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{-\kappa t} w(t) \right) \le C e^{-\kappa t}. \tag{11.14}$$

Integrando tra α e t abbiamo quindi

$$e^{-\kappa t} w(t) - e^{-\kappa \alpha} w(\alpha) \le \frac{C}{\kappa} \left(e^{-\kappa\alpha} - e^{-\kappa t} \right), \tag{11.15}$$

dove $w(\alpha) = 0$ (cfr. la definizione (11.10)). Quindi

$$w(t) \le \frac{C}{\kappa} \left(e^{\kappa(t-\alpha)} - 1 \right), \tag{11.16}$$

che, per la (11.11), implica per la $u(t)$ la diseguaglianza (11.2). ■

11.5. *Osservazione.* Si noti che se $C = 0$ il Lemma 11.2 implica $u(t) \equiv 0$ per ogni $t \in J$. Infatti, per ogni $t \in J$, la (11.2) dà $u(t) \le 0$ e, per ipotesi, risulta $u(t) \ge 0$.

11.6. TEOREMA (DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI INIZIALI. *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $f\colon W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Siano $x\colon J \to W$ e $y\colon J \to W$ due soluzioni di (10.6) nell'intervallo chiuso $J = [t_1, t_2] \ni t_0$. Allora esiste una costante L tale che*

$$|x(t) - y(t)| \le |x(t_0) - y(t_0)|\, e^{L|t-t_0|}, \tag{11.17}$$

per ogni $t \in J$.

11.7. *Dimostrazione del teorema 11.6.* Definiamo

$$w(t) = |x(t) - y(t)| . \tag{11.18}$$

Poiché $x(t)$ e $y(t)$ sono entrambe soluzioni, con dati iniziali, rispettivamente, $x(t_0)$ e $y(t_0)$, esiste un insieme compatto $W_0 \subset W$ tale che $x(t), y(t) \in W_0$ $\forall t \in J$, e si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(x(s)), \\ y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(y(s)), \end{aligned} \tag{11.19}$$

per ogni $t \in J$. Quindi

$$x(t) - y(t) = x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \left[f(x(s)) - f(y(s)) \right], \tag{11.20}$$

da cui segue che, per $t \geq t_0$,

$$w(t) \leq w(t_0) + L \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, w(s), \tag{11.21}$$

dove L è la costante di Lipschitz di f in W_0 (cfr. il lemma 10.18). Poiché $w(t_0) \geq 0$ e $L > 0$, possiamo applicare il lemma 11.2: otteniamo quindi

$$w(t) \leq w(t_0) e^{L(t-t_0)}, \qquad t \geq t_0. \tag{11.22}$$

Se $t < t_0$, invece della (11.21) abbiamo

$$w(t) \leq w(t_0) + L \int_{t}^{t_0} \mathrm{d}s\, w(s), \tag{11.23}$$

e possiamo quindi riapplicare il lemma 11.2, trovando

$$w(t) \leq w(t_0) e^{L(t_0-t)}, \qquad t \leq t_0. \tag{11.24}$$

Unendo le (11.22) e (11.24), segue la (11.17). ■

11.8. *Osservazione.* Il teorema 11.6 ha due conseguenze. La prima è appunto la dipendenza continua dai dati iniziali. Infatti, per ogni $t \in J = [t_1, t_2]$, ponendo $\varphi(t, x_0) = x(t)$ e $\varphi(t, y_0) = y(t)$, così che $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$, possiamo riscrivere la (11.17)

$$|\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)| \leq |x_0 - y_0|\, e^{L|t-t_0|} \leq |x_0 - y_0|\, e^{L|t_1-t_2|}, \tag{11.25}$$

così che, per ogni $t \in J$,

$$\lim_{x_0 \to y_0} |\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)| = 0, \tag{11.26}$$

che implica che la soluzione $\varphi(t, x_0)$ è continua nel dato iniziale x_0.

La seconda conseguenza è una dimostrazione alternativa del Teorema 10.36. In altre parole il teorema 11.6 implica, come corollario, l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (10.7). Infatti se i dati iniziali coincidono, $x(t_0) = y(t_0)$, allora si ha $x(t) \equiv y(t)$ per ogni $t \in J$. Si noti che, come anticipato in §10.38 e §10.41, la dimostrazione basata sul teorema 11.6 non fa uso della condizione $a < 1/L$.

11.9. Il teorema 11.7 assume che sia noto *a priori* che esistono due soluzioni definite nello stesso intervallo di tempo. Sarebbe più naturale (e fisicamente più interessante) porre il problema nel seguente modo: data una soluzione $\varphi(t, x_0)$ definita nell'intervallo $J = [t_1, t_2]$, è possibile affermare che ogni dato iniziale y_0 sufficientemente vicino a x_0 genera una traiettoria definita in J e dare una stima quantitativa della distanza $|\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)|$ per ogni $t \in J$? A tale domanda si può dare risposta affermativa: cfr. il teorema 12.26 più avanti.

11.10. Si può in realtà dimostrare che la dipendenza dai dati iniziali della soluzione $\varphi(t, x)$ è di classe C^1. Vale infatti il seguente risultato.

11.11. TEOREMA (DIPENDENZA DIFFERENZIABILE DAI DATI INIZIALI). *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $f \colon W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Sia $x_0 \in W$. Allora la soluzione $\varphi(t, x_0)$ del problema di Cauchy (10.7) è di classe C^1 in $(t, x_0) \in J \times W$.*

11.12. *Osservazione.* Daremo la dimostrazione del teorema (11.17) in §2.6. Ovviamente la dipendenza differenziabile da t è già stata dimostrata ed è un requisito della definizione stessa di soluzione (cfr. la definizione 10.7). Dimostriamo adesso il seguente risultato, conseguenza immediata del teorema 11.11.

11.13. COROLLARIO. *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $f \colon W \to E$ un'applicazione di classe C^k. Sia $x_0 \in W$. Allora la soluzione $\varphi(t, x_0)$ del problema di Cauchy (10.7) è di classe C^k in $(t, x_0) \in J \times W$.*

11.14. *Dimostrazione del corollario 11.13.* La dimostrazione si può fare per induzione. Infatti per $k = 1$ l'enunciato si riduce al teorema 11.11 e quindi è soddisfatto. Assumiamo quindi che il risultato valga per qualche k e mostriamo che allora esso deve valere anche per $k + 1$.

Introduciamo una variabile ausiliaria $u \in E$ e definiamo $z = (x, u) \in W \times E$; scelto un sistema di coordinate in E, si avrà allora $z = (x, u) = (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n)$.

Consideriamo allora il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{z} = F(z), \\ z(t_0) = z_0, \end{cases} \tag{11.27}$$

dove la funzione $F\colon W \times E \to E$ è definita come

$$F(z) = (f(x), Df(x)u), \tag{11.28}$$

così che, nel sistema di coordinate scelto, essa avrà componenti

$$F(z) = \left(f_1(x), \ldots, f_n(x), \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x)\, u_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x)\, u_j \right), \tag{11.29}$$

mentre

$$z_0 = (x_0, u_0), \tag{11.30}$$

con $u_0 \in E$ arbitrario, rappresenta il dato iniziale. Si noti che se $f \in C^{k+1}$, allora F è di classe C^k: quindi per l'ipotesi induttiva la soluzione di (11.27) è di classe C^k. Ma la soluzione di (11.27), che possiamo indicare con $\Phi(t, z_0)$, si può esprimere in funzione della soluzione $\varphi(t, x_0)$ del sistema (10.7). Risulta infatti

$$\Phi(t, z_0) = (\varphi(t, x_0), D_0\varphi(t, x_0)u_0)\,, \tag{11.31}$$

dove $[D_0\varphi(t, x_0)]_{ij} = \partial\varphi_i(t, x_0)/\partial x_{0j}$. Infatti, per derivazione esplicita della (11.31), si vede che la (11.31) risolve $\dot{z} = F(z)$, tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{dt} D_0\varphi(t, x_0)u_0 &= D_0 \frac{\mathrm{d}}{dt}\varphi(t, x_0)u_0 = D_0\dot{\varphi}(t, x_0)\, u_0 \\ &= D_0 f(\varphi(t, x_0))u_0 = Df(\varphi(t, x_0))\, D_0\varphi(t, x_0)\, u_0, \end{aligned} \tag{11.32}$$

dal momento che, essendo, per l'ipotesi induttiva, la funzione φ di classe $k \geq 1$ in ciascuno dei suoi argomenti, l'ordine dei due operatori di derivazione $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ e D_0 si può scambiare, per il teorema di Schwarz dell'inversione dell'ordine di derivazione (cfr. la nota bibliografica).

Si può anche vedere esplicitamente che le condizioni iniziali sono verificate notando che

$$D_0\varphi(t, x_0)\, u_0|_{t=t_0} = \mathbb{1}u_0 = u_0, \tag{11.33}$$

poiché

$$[D_0\varphi(t, x_0)]_{ij}|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f_i(\varphi(s, x_0)) \right)\Bigg|_{t=t_0} = \delta_{ij} \tag{11.34}$$

così che la (11.31) è effettivamente una soluzione del problema di Cauchy (11.27).

In conclusione la (11.31) è di classe C^k: segue che $\varphi(t, x_0)$ deve essere di classe C^{k+1} in x_0 (poiché $D\varphi(t, x_0)$ è di classe C^k in x_0). Per la proposizione 10.34 la soluzione $\varphi(t, x_0)$ è di classe C^{k+1} in t. Quindi $\varphi(t, x_0)$ è di classe C^{k+1} in entrambi i suoi argomenti. ∎

11.15. *Osservazione.* Senza ricorrere al teorema 11.11 e utilizzando invece il (più debole) Teorema 11.6, che assicura la sola dipendenza continua, non differenziabile, dai dati iniziali, si può dimostrare, esattamente come in §11.14, che se f è di classe C^k allora la soluzione $\varphi(t, x_0)$ del sistema $\dot{x} = f(x)$, con condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$, dipende in modo C^{k-1} dal dato iniziale x_0. Basta tener conto che per $k = 1$, l'asserto è equivalente al teorema 11.6: la dimostrazione procede quindi esattamente come in §11.14 con la sola differenza che l'ipotesi induttiva consiste nel supporre che per qualche k si ha $\varphi(t, x_0)$ di classe C^{k-1} in x_0 se f è di classe C^k.

12. Prolungamento delle soluzioni

12.1. Introduzione. Il teorema 10.39 dimostra l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale, *i.e.* di una soluzione definita in un intervallo di tempo finito di semiampiezza a, dove a deve soddisfare la condizione (10.54).

Si è visto (cfr. l'osservazione 10.41) che in realtà la condizione $a < 1/L$ non è necessaria. È allora naturale chiedersi se non sia eliminabile anche la condizione $a \leq b/M$ e se non sia possibile estendere arbitrariamente l'intervallo di definizione delle soluzioni (*i.e.* dimostrare l'esistenza di soluzioni *globali*).

In generale questo non è possibile, come è facile convincersi attraverso qualche semplice esempio (cfr. l'esempio 12.2 più avanti).

Ci si può chiedere in ogni caso quale sia l'intervallo più grande in cui sia possibile definire una soluzione del problema di Cauchy (10.7). Più in particolare ci si può porre il problema di studiare, data una soluzione definita in qualche intervallo $I \subset \mathbb{R}$, cosa succede quando ci si avvicina agli estremi di I, *i.e.* se è possibile o no estendere la soluzione al di fuori dell'intervallo I.

12.2. Esempio. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2, \\ x(0) = 0; \end{cases} \tag{12.1}$$

si vede immediatamente che $x(t) = \tan t$ è soluzione. La condizione (10.43) impone $a \leq b/(1+b^2)$, poiché $M = 1 + b^2$ (si ricordi la definizione (10.37)). Si può quindi cercare di scegliere la regione W_0 in modo tale da ottimizzare la condizione (10.43) su a; poiché il massimo della funzione $b/(1+b^2)$ è assunto a $b = 1$ e corrisponde a $M = 2$, troviamo $a \leq 1/2$. Tale condizione non è in realtà ottimale. Infatti $\tan t$ è definita per $|t| < \pi/2$: quindi la soluzione del problema di Cauchy (12.1) può essere definita in ogni intervallo $[-a, a]$, con $a < \pi/2$.

L'esempio mostra però nel contempo che, nel caso (12.1), non è possibile, per verifica diretta, costruire una soluzione globale, *i.e.* definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

12.3. Definizione (Prolungamento). *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $f\colon W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Siano u_1 e u_2 due soluzioni del problema di Cauchy (10.7) definite negli intervalli $I_1 = (\alpha_1, \beta_1)$*

e $I_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ *rispettivamente. Diremo che* u_2 *è un* prolungamento *di* u_1 *se* $I_1 \subset I_2$ *e* $u_1(t) = u_2(t)$ $\forall t \in I_1$.

12.4. DEFINIZIONE (SOLUZIONE MASSIMALE). *Siano* $W \subset E$ *un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato* E *e* $f \colon W \to E$ *un'applicazione di classe* C^1. *Una soluzione di (10.7) si dirà* massimale *se non ammette alcun prolungamento.*

12.5. LEMMA. *Siano* u_1 *e* u_2 *due soluzioni di* $\dot{x} = f(x)$ *nell'intervallo* $I = (\alpha, \beta)$. *Se esiste un tempo* $t_0 \in I$ *tale che* $u_1(t_0) = u_2(t_0)$*, allora* $u_1(t) = u_2(t)$ *per ogni* $t \in (\alpha, \beta)$.

12.6. *Dimostrazione del lemma 12.5.* Definiamo

$$E = \{t \in (t_0, \beta) \ : \ u_1(t) \neq u_2(t)\}. \tag{12.2}$$

Supponiamo per assurdo che E sia non vuoto. Esiste allora

$$\tau = \inf E \in [t_0, \beta) \tag{12.3}$$

e si deve avere $u_1(\tau) = u_2(\tau)$; se $\tau = t_0$ questo è ovvio per ipotesi, altrimenti segue dalla continuità delle soluzioni u_1 e u_2. Se allora consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(\tau) = u_1(\tau) \ , \end{cases} \tag{12.4}$$

per il teorema 10.39 deve esistere $a > 0$ tale che la soluzione è unica nell'intervallo $[\tau - a, \tau + a]$. Questo contraddice la definizione di τ in (12.3): quindi deve essere $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \in [t_0, \beta)$.

Analogamente, definendo

$$E' = \{t \in (\alpha, t_0) \ : \ u_1(t) \neq u_2(t)\} \tag{12.5}$$

e, sotto l'ipotesi per assurdo che esso sia non vuoto, *i.e.* che esista

$$\tau' = \sup E' \in (\alpha, t_0], \tag{12.6}$$

si dimostra che le due soluzioni non possono essere distinte neppure nel sottointervallo (α, t_0). ■

12.7. COROLLARIO. *Siano* u_1 *e* u_2 *due soluzioni del problema di Cauchy (10.7) negli intervalli* I_1 *e* I_2 *rispettivamente, con* $t_0 \in I_1 \cap I_2$. *Se* $I_1 \subset I_2$ *allora* u_2 *è un prolungamento di* u_1.

12.8. *Dimostrazione del corollario 12.7.* Consideriamo la restrizione di u_2 a I_1, $u_2|I_1$. Poiché $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, per il lemma 12.5 le due soluzioni devono coincidere in I_1; per la definizione 12.3 la soluzione u_2 deve essere allora un prolungamento di u_1. ■

12.9. TEOREMA (ESISTENZA DI UN PROLUNGAMENTO MASSIMALE). *Siano* $W \subset E$ *un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato* E *e* $f \colon W \to E$ *un'applica-*

zione di classe C^1. Ogni soluzione u: $I \to W$ di (10.7), con I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, ammette un prolungamento massimale $\bar{u}$.

12.10. *Dimostrazione del teorema 12.9.* Sia $\mathcal{U}$ l'insieme di tutti i prolungamenti di u. Per $v \in \mathcal{U}$ chiamiamo $I_v = (\alpha_v, \beta_v)$ l'intervallo di definizione di v. Per costruzione $I \subset I_v$ e $v(t) = u(t)$ per ogni $t \in I$.

Definiamo

$$\alpha = \inf_{v \in \mathcal{U}} \alpha_v, \qquad \beta = \sup_{v \in \mathcal{U}} \beta_v. \tag{12.7}$$

Definiamo una funzione $\bar{u}$: $(\alpha, \beta) \to W$ nel modo seguente. Per ogni $t \in (\alpha, \beta)$ esiste $v \in \mathcal{U}$ tale che $t \in I_v$; si ponga allora

$$\bar{u}(t) = v(t). \tag{12.8}$$

La (12.8) identifica univocamente la funzione $\bar{u}$: infatti, se esistono $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$ tali che $t \in I_{v_1} \cap I_{v_2}$, si ha $v_1(t) = v_2(t)$ $\forall t \in I$ per definizione di prolungamento e quindi $v_1(t) = v_2(t)$ $\forall t \in I_{v_1} \cap I_{v_2}$ per il lemma 12.5, così che si vede che il valore $\bar{u}(t)$ non dipende dalla particolare $v \in \mathcal{U}$ scelta in (12.8).

La funzione $\bar{u}$ è un prolungamento della u poiché, per costruzione, per ogni $t \in I$ esiste $v \in \mathcal{U}$ tale che $\bar{u}(t) = v(t)$, dove v risolve l'equazione $\dot{x} = f(x)$, quindi $\bar{u}$ risolve $\dot{x} = f(x)$, e (i) $I \subset (\alpha, \beta)$ e (ii) $\bar{u}(t) = u(t)$ per ogni $t \in I$. Inoltre è massimale perché per ogni $v \in \mathcal{U}$ si ha $I_v \subset (\alpha, \beta)$, per la definizione di α e di β data in (12.7). ■

12.11. TEOREMA (VALOR MEDIO O LAGRANGE). *Sia u: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[\alpha, \beta]$. Si ha allora*

$$u(\beta) - u(\alpha) = \dot{u}(t_1)\,(\beta - \alpha)\,, \tag{12.9}$$

per qualche $t_1 \in (\alpha, \beta)$.

12.12. *Dimostrazione del teorema 12.11.* Definiamo

$$g(t) = u(t) - (t - \alpha)\,\frac{u(\beta) - u(\alpha)}{\beta - \alpha}, \tag{12.10}$$

così che $g(\beta) = g(\alpha) = u(\alpha)$. La funzione g: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ha massimo e minimo in $[\alpha, \beta]$. Se entrambi cadono agli estremi si deve avere $g(t) = g(\alpha) = g(\beta)$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$, poiché in tal caso massimo e minimo devono coincidere. Quindi la funzione g deve essere costante: in particolare $\dot{g}(t) = 0$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$. In caso contrario almeno uno dei due punti di massimo o di minimo deve essere interno a (α, β); se indichiamo tale punto con t_1, si deve avere $\dot{g}(t_1) = 0$. In entrambi i casi esiste quindi almeno un punto $t_1 \in (\alpha, \beta)$ tale che $\dot{g}(t_1) = 0$ (tale risultato è noto come teorema di Rolle; cfr. la nota bibliografica).

In termini della funzione u si ha quindi:

$$0 = \dot{g}(t_1) = \dot{u}(t_1) - \frac{u(\beta) - u(\alpha)}{\beta - \alpha}, \tag{12.11}$$

da cui segue la (12.9). ■

12.13. LEMMA. *Dati un intervallo (α, β) contenente il punto t_0 e uno spazio vettoriale E, sia u: $(\alpha, \beta) \to E$ una funzione continua in (α, β) e derivabile in $(\alpha, \beta) \setminus \{t_0\}$. Se esiste finito il limite*

$$\lim_{t \to t_0} \dot{u}(t) = \lambda, \tag{12.12}$$

allora u è derivabile in t_0 e $\dot{u}(t_0) = \lambda$.

12.14. *Dimostrazione del lemma 12.13.* Introduciamo un sistema di coordinate in cui $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Per il teorema 12.11

$$\frac{u_j(t) - u_j(t_0)}{t - t_0} = \dot{u}_j(t_j), \tag{12.13}$$

per qualche $t_j \in (t_0, t)$ se $t > t_0$ e per qualche $t_j \in (t, t_0)$ se $t < t_0$; inoltre $t_j \to t_0$ per $t \to t_0$. Nel limite $t \to t_0$ otteniamo

$$\lim_{t \to t_0} \frac{u_j(t) - u_j(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \dot{u}_j(t_j) = \lambda_j, \tag{12.14}$$

che dimostra che $\dot{u}(t_0)$ è ben definito e coincide con λ. ■

12.15. LEMMA. *Sia u: $(\alpha, \beta) \to W$ una funzione continua in (α, β) e sia $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Se u è soluzione di $\dot{x} = f(x)$, con f: $W \to E$, negli intervalli aperti (α, t_0) e (t_0, β), allora essa è soluzione in (α, β).*

12.16. *Dimostrazione del lemma 12.15.* Poiché u e f sono continue nei loro argomenti, la funzione $f \circ u$ è continua in t: quindi

$$\lim_{t \to t_0} f(u(t)) = f(u(t_0)). \tag{12.15}$$

D'altra parte $\dot{u}(t) = f(u(t))$ per ogni $t \in (\alpha, \beta) \setminus \{t_0\}$, per ipotesi. Quindi

$$\lim_{t \to t_0} \dot{u}(t) = f(u(t_0)), \tag{12.16}$$

così che possiamo applicare il lemma 12.13 per concludere che u è derivabile in t_0 e

$$\dot{u}(t_0) = f(u(t_0)). \tag{12.17}$$

In conclusione u: $(\alpha, \beta) \to E$ è di classe C^1 e soddisfa $\dot{u}(t) = f(u(t))$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$: quindi è una soluzione di $\dot{x} = f(x)$ in (α, β) (cfr. la definizione 10.7). ■

12.17. COROLLARIO. *Sia u una soluzione di $\dot{x} = f(x)$, con f: $W \to E$, nell'intervallo (α, β). Se esiste finito il limite*

$$\lim_{t \to \beta^-} u(t) = u_\beta \in W, \tag{12.18}$$

esiste $a > 0$ tale che la soluzione u è prolungabile in $(\alpha, \beta + a)$. Analogamente se esiste finito il limite

$$\lim_{t \to \alpha^+} u(t) = u_\alpha \in W, \tag{12.19}$$

esiste $a' > 0$ tale che la soluzione u è prolungabile in $(\alpha - a', \beta)$.

12.18. *Dimostrazione del corollario 12.17.* Sotto le ipotesi fatte, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(\beta) = u_\beta. \end{cases} \tag{12.20}$$

Per il teorema 10.39 esiste $a > 0$ tale che esiste ed è unica la soluzione v di (12.20) in un intervallo $[\beta - a, \beta + a]$. La funzione

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & t \in (\alpha, \beta), \\ v(t), & t \in [\beta, \beta + a), \end{cases} \tag{12.21}$$

è continua (infatti u e v sono continue nei rispettivi intervalli di definizione e in $t = \beta$ la continuità è garantita dalla (12.18) e dalla condizione iniziale $v(\beta) = u_\beta$). Poiché $(\beta, \beta + a) \subset [\beta, \beta + a)$, per il lemma 12.15, la (12.21) è soluzione di $\dot{x} = f(x)$ nell'intervallo $(\alpha, \beta + a)$. Analogamente si dimostra che, sotto la condizione (12.19), la soluzione risulta prolungabile a sinistra. ■

12.19. LEMMA. *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $f\colon W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Sia $u\colon (\alpha, \beta) \to W$ una soluzione di $\dot{x} = f(x)$. Se esiste una successione crescente $\{t_k\}$ convergente a β tale che*

$$\lim_{k \to \infty} u(t_k) = u_\beta \in W, \tag{12.22}$$

allora la soluzione u risulta prolungabile a destra. Analogamente se esiste una successione decrescente $\{s_k\}$ convergente ad α tale che

$$\lim_{k \to \infty} u(s_k) = u_\alpha \in W, \tag{12.23}$$

allora la soluzione u risulta prolungabile a sinistra.

12.20. *Dimostrazione del lemma 12.19.* Dimostriamo la ♣12.23; la ♣12.25 si potrà dimostrare in modo analogo. Poiché per ipotesi $u_\beta \in W$ e W è aperto, esiste un intorno $B_\varepsilon(u_\beta) \subset W$, con ε sufficientemente piccolo così che si abbia $W_0 = \overline{B_\varepsilon(u_\beta)} \subset W$. Definiamo

$$M = \max_{x \in W_0} |f(x)|. \tag{12.24}$$

Per la (12.22), fissato ε, esiste N tale che per ogni $k > N$ si ha

$$|t_k - \beta| < \frac{\varepsilon}{4M}, \qquad |u(t_k) - u_\beta| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.25}$$

Quindi, per ogni $t \in (\alpha, \beta)$ e per ogni $k > N$,

$$|u(t) - u_\beta| \leq |u(t) - u(t_k)| + |u(t_k) - u_\beta| \leq |u(t) - u(t_k)| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.26}$$

Vogliamo allora dimostrare che

$$|u(t) - u(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall t_k < t < \beta, \tag{12.27}$$

così che dalla (12.26) segua

$$|u(t) - u_\beta| \leq \varepsilon \qquad \forall t_k < t < \beta, \tag{12.28}$$

che implica la (12.18) e quindi, per il corollario 12.17, la prolungabilità a destra della soluzione.

Supponiamo per assurdo che la (12.27) non valga. Questo significa

$$E \equiv \{t \in (t_k, \beta) \ : \ |u(t) - u(t_k)| \geq \varepsilon/2\} \neq \emptyset, \tag{12.29}$$

così che esiste $\tau \equiv \inf E$, con $\tau \in (t_k, \beta)$. Poiché u è continua (e quindi $\lim_{t \to t_k} u(t) = u(t_k)$, così che $u(t) - u(t_k)$ può essere reso arbitrariamente piccolo purché si scelga t sufficientemente vicino a t_k), si ha in particolare

$$|u(\tau) - u(t_k)| = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.30}$$

così che

$$|u(\tau) - u(t_k)| \leq \int_{t_k}^{\tau} \mathrm{d}s \, |\dot{u}(s)| = \int_{t_k}^{\tau} \mathrm{d}s \, |f(u(s))| \leq M \, |\tau - t_k| \, , \tag{12.31}$$

dove si è tenuto conto che per $s \in (t_k, \tau)$ si ha

$$|u(s) - u_\beta| \leq |u(s) - u(t_k)| + |u(t_k) - u_\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{12.32}$$

poiché $s \in (t_k, \beta) \setminus E$ (così che $|u(s) - u(t_k)| < \varepsilon/2$) e $|u(t_k) - u_\beta| < \varepsilon/2$ per la (12.25), così che $u(s) \in B_\varepsilon(u_\beta)$ e si può perciò applicare la stima (12.24) a $f(u(s))$.

Unendo le (12.25), (12.30) e (12.31) troviamo

$$\frac{\varepsilon}{2} = |u(\tau) - u(t_k)| \leq M \, |\tau - t_k| \leq M \, |\beta - t_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.33}$$

che è assurdo. ■

12.21. TEOREMA (PROLUNGAMENTO). *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $f \colon W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Sia*

$u\colon (\alpha,\beta) \to W$ una soluzione massimale di $\dot{x} = f(x)$. Allora per ogni insieme compatto $K \subset W$, esiste $\delta > 0$ tale che $\forall t \notin (\alpha+\delta, \beta-\delta)$ si ha $u(t) \notin K$.

12.22. *Dimostrazione del teorema 12.21.* Supponiamo per assurdo che per ogni $\delta > 0$ esista $t \in [\beta-\delta, \beta)$ tale che $u(t) \in K$. In tal caso sarebbe allora possibile trovare una successione $t_k \to \beta^-$ tale che $u(t_k) \in K$ (basterebbe prendere per esempio $\delta = 1/k$). Poiché K è compatto si potrebbe allora estrarre una sottosuccessione t_{k_j} tale che $u(t_{k_j})$ converga a un punto $u_\beta \in K$. Per il lemma 12.19 la soluzione u sarebbe allora prolungabile, contro l'ipotesi che fosse massimale. Analogamente si discute la possibilità che esistano punti arbitrariamente vicini all'estremo α: questo completa quindi la dimostrazione. ■

12.23. COROLLARIO. *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $f\colon W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Sia $K \subset W$ un insieme compatto e $x_0 \in K$. Supponiamo che sia noto che ogni soluzione u: $[t_0, t_1] \to W$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \, , \end{cases} \tag{12.34}$$

sia contenuta interamente in K. Allora esiste un prolungamento massimale esteso a $[t_0, \infty)$ contenuto in K.

12.24. *Dimostrazione del corollario 12.23.* Per il teorema 12.9 esiste una soluzione massimale $\bar{u}$. Supponiamo per assurdo che $\bar{u}$ sia definita in (α,β), con $t_0 \in (\alpha,\beta)$ e $\beta < \infty$. Per il teorema 12.21 dovrebbe esistere $t_1 < \beta$ tale che $\bar{u}(t_1) \notin K$: quindi la soluzione $\bar{u}|[t_0, t_1]$, *i.e.* la restrizione di $\bar{u}$ all'intervallo $[t_0, t_1]$, non sarebbe contenuta interamente in K. ■

12.25. Il teorema 11.6 sulla dipendenza continua dai dati iniziali assumeva che le due soluzioni fossero definite in uno stesso intervallo $[t_0 - a, t_0 + a]$. Una formulazione più naturale sarebbe la seguente (cfr. anche il paragrafo §11.9): presi comunque due punti vicini, le soluzioni che si originano da essi saranno definite sullo stesso intervallo e rimarranno vicine in tale intervallo (tanto più vicine quanto più lo sono i punti).

12.26. TEOREMA (DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI INIZIALI). *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e f: $W \to E$ un'applicazione di classe C^1. Sia u: $[t_0, t_1] \to W$ una soluzione del problema di Cauchy (10.7). Allora esistono un intorno $B(x_0)$ e una costante positiva κ, tali che per ogni $z_0 \in B(x_0)$ esiste un'unica soluzione $z(t)$ che*
(1) è definita in $[t_0, t_1]$,
(2) verifica le condizioni iniziali $z(t_0) = z_0$,
(3) è tale che

$$|u(t) - z(t)| \le |x_0 - z_0| \, e^{\kappa |t-t_0|}, \tag{12.35}$$

per ogni $t \in [t_0, t_1]$.

12.27. *Dimostrazione del teorema 12.26.* Poiché $[t_0, t_1]$ è compatto esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $t \in [t_0, t_1]$ si ha

$$\overline{B_\varepsilon(u(t))} = \{x \in E \ : \ |x - u(t)| \le \varepsilon\} \subset W, \tag{12.36}$$

come si può facilmente verificare ragionando per assurdo (cfr. l'esercizio 10). Quindi l'insieme

$$K = \bigcup_{t_0 \le t \le t_1} \overline{B_\varepsilon(u(t))} \tag{12.37}$$

è un sottoinsieme compatto di W e la restrizione di f a K, $f|K$, è lipschitziana (cfr. il lemma 10.16): sia L la sua costante di Lipschitz.

Si scelga $\delta > 0$, tale che

$$\delta \le e^{-L|t_1 - t_0|}\varepsilon, \tag{12.38}$$

e si consideri l'intorno $B(x_0) \equiv B_\delta(x_0)$.

Vogliamo dimostrare che comunque si scelga $z_0 \in B(x_0)$ la soluzione $z(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = z_0 \ , \end{cases} \tag{12.39}$$

verifica le proprietà (1)÷(3) del teorema.

Notiamo subito che la proprietà (2) è soddisfatta per costruzione.

Poiché $z_0 \in B(x_0) \subset W$, la soluzione di (12.39) ammette un prolungamento massimale definito in (α, β), dove $\alpha < t_0 < \beta$.

Dimostriamo ragionando per assurdo che $\beta > t_1$. Supponiamo infatti che sia $\beta \le t_1$: allora si avrebbe per ogni $t \in [t_0, \beta)$, per il teorema 11.6 e per la (12.38),

$$|z(t) - u(t)| \le |x_0 - z_0|\, e^{L|t-t_0|} \le \delta\, e^{L|t-t_0|} \le \delta\, e^{L|t_1-t_0|} \le \varepsilon, \tag{12.40}$$

ovvero $z(t) \in K$ per ogni $t \in [t_0, \beta)$, quindi, per il teorema 12.21, la soluzione $z(t)$ non potrebbe essere massimale.

Segue che $z(t)$ deve essere definita per ogni $t \in [t_0, t_1]$. Questo dimostra la proprietà (1) e implica anche, per il lemma 12.5, l'unicità della soluzione.

La proprietà (3) segue direttamente dalla stima esponenziale (11.17) del teorema 11.6. Ne segue in particolare che in (12.35) si ha $\kappa = L$, se L è la costante di Lipschitz di f in K. ■

13. Sistemi non autonomi di equazioni differenziali

13.1. Introduzione. Finora abbiamo considerato il caso di sistemi di equazioni differenziali autonomi, in cui il campo vettoriale $f(x)$ non dipende da t: è tuttavia facile dimostrare che i risultati dei paragrafi precedenti si estendono al caso di sistemi non autonomi in cui il campo vettoriale dipende esplicitamente dal tempo, *i.e.* sistemi della forma $\dot{x} = f(t, x)$. Come applicazione di tali sistemi vedremo un caso semplice di sistemi (in $\mathbb{R}$) in cui è possibile ottenere analiticamente la soluzione mediante una semplice integrazione: i cosiddetti sistemi a variabili separabili.

13.2. Se invece del problema di Cauchy (10.7) consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{13.1}$$

con $f \colon I \times W \to E$, possiamo porci ugualmente il problema di esistenza e unicità della soluzione.

In questo caso abbiamo dunque un sistema non autonomo: è facile però verificare che vale lo stesso risultato trovato nel caso autonomo (cfr. il teorema 10.39). Più precisamente vale il seguente risultato.

13.3. DEFINIZIONE (LIPSCHITZIANITÀ IN x). *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto dello spazio vettoriale normato E e sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo in $\mathbb{R}$. Diremo che la funzione $f \colon I \times W \to E$ è* localmente lipschitziana in x *se per ogni compatto $W_0 \subset W$ esiste una costante $L = L(W_0)$ tale che*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \tag{13.2}$$

per ogni $x, y \in W_0$ e per ogni $t \in I$. La costante L prende il nome di costante di Lipschitz di f nella regione W_0.

13.4. TEOREMA (ESISTENZA E UNICITÀ PER SISTEMI NON AUTONOMI). *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e I un intervallo dell'asse reale. Sia $f \colon I \times W \to E$ un'applicazione localmente lipschitziana in x. Sia infine $(t_0, x_0) \in I \times W$. Allora esiste $a > 0$ e un'unica soluzione $u \colon J \to W$, con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$, del problema di Cauchy (13.1).*

13.5. *Dimostrazione del teorema 13.4.* La dimostrazione è assolutamente identica a quella data del teorema 10.39 in §2.1, *i.e.* del teorema 10.27 e del teorema 10.36; si ricordi in particolare che per dimostrare il teorema 10.39 è sufficiente che la funzione f sia localmente lipschitziana. L'unica accortezza è che, oltre alla condizione (10.54), dovremo imporre anche la condizione che a appartenga all'intervallo I in cui la f è definita. Se $I_0 = [\alpha, \beta] \subset I$, per qualche $\alpha < \beta$, è un intervallo in E e

$$r = \min\{t_0 - \alpha, \beta - t_0\}, \tag{13.3}$$

la condizione su a diventa

$$a < \min\left\{r, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}, \tag{13.4}$$

dove

$$M = \max_{(t,x) \in I_0 \times W_0} |f(t,x)| \,. \tag{13.5}$$

Per il resto la dimostrazione procede inalterata come nel caso autonomo. Di nuovo la condizione $a < 1/L$ non è in realtà necessaria (cfr. l'osservazione 10.41). ■

13.6. Anche i risultati dei paragrafi §2.2 e §2.3 possono esser estesi al caso (13.1). Dal momento che le dimostrazioni procedono allo stesso modo, la loro formulazione si può ricavare direttamente dai paragrafi precedenti.

13.7. Finora si sono discusse proprietà generali delle soluzioni del problema di Cauchy (10.7) nel caso autonomo e del problema di Cauchy (13.1) nel caso non autonomo. In particolare il teorema 13.4, che si riduce al teorema 10.39 nel caso autonomo, garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione, ma non è immediatamente utilizzabile per trovare la soluzione stessa: è vero che il medodo di iterazione di Picard fornisce un procedimento che si può seguire in pratica per costruire soluzioni approssimate, ma in generale non è di aiuto per calcolare analiticamente la soluzione esatta.

In generale la ricerca delle soluzioni per il problema di Cauchy (13.1), anche nel caso autonomo (10.7) in cui $f(t,x) \equiv f(x)$, è un problema difficile se non impossibile.

Ci si può chiedere quindi se esistano casi in cui si possano trovare concretamente le soluzioni. Un caso in cui questo avviene è dato dai sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti, $\dot{x} = Ax$, con $A \in L(E)$, visto al capitolo 2. Il caso in cui $A = A(t)$ è una funzione continua in t è ben più complicato. Se $A(t)$ è una funzione periodica si ha quella che è nota come *teoria di Floquet* (cfr. la nota bibliografica): in tal caso si riescono ancora a caratterizzare le soluzioni. Se $A(t)$ è una funzione continua qualsiasi non esiste alcuna teoria generale.

Un altro caso in cui si riesce a trovare esplicitamente la soluzione (e di gran lunga più semplice del caso di equazioni differenziali lineari, anche se presenta delle sottigliezze di cui dover tener conto) è il seguente.

13.8. DEFINIZIONE (EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI). *Data l'equazione differenziale ordinaria*

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{13.6}$$

con $f \colon I \times W \to \mathbb{R}^2$*,* $I \subset \mathbb{R}$ *e* $W \subset \mathbb{R}$*, diremo che essa è un'*equazione a variabili separabili *se* $f(t,x) = g(t)\,h(x)$*, i.e. se essa è della forma*

$$\dot{x} = g(t)\,h(x), \tag{13.7}$$

con $g \colon I \to \mathbb{R}$ *e* $h \colon W \to E$*.*

13.9. *Osservazione.* Si noti che il caso particolare $g(t) = 1$ corrisponde al caso autonomo in $E = \mathbb{R}$ (cfr. la (10.6)): quindi la discussione in §13.10 sotto mostra che l'equazione (10.6), nel caso $E = \mathbb{R}$, è sempre risolubile per integrazione diretta.

13.10. L'equazione (13.7), con condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$, si può risolvere formalmente nel modo seguente. Se $h(x) \neq 0$ si può dividere per $h(x)$, ottenendo

$$\frac{1}{h(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t); \tag{13.8}$$

integrando tra t_0 e t si ha

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, \frac{1}{h(x(s))} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, g(s), \tag{13.9}$$

così che, se $\mathrm{d}x(s)/\mathrm{d}s \neq 0$ per $s \in [t_0, t]$,

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, g(s). \tag{13.10}$$

Indichiamo con $G(t)$ una primitiva di $g(t)$ e con $W(x)$ una primitiva di $1/h(x)$. Si ha allora

$$W(x(t)) = G(t) + W(x_0) - G(t_0), \tag{13.11}$$

che è un'equazione implicita che lega la soluzione $x(t)$ a t.

Se la funzione W è invertibile possiamo allora scrivere

$$x(t) = W^{-1} \left(G(t) + W(x_0) - G(t_0) \right), \tag{13.12}$$

che esprime la soluzione in maniera esplicita.

Si noti che non tutti i passaggi sono giustificati in generale: infatti la divisione per $h(x)$ e il cambiamento di variabili nel primo integrale in (13.9) non sempre sono possibili. Occorrerà allora vedere caso per caso se i risultati trovati mediante il procedimento formale sopra descritto sono utilizzabili. Una formulazione più precisa (ma in sostanza equivalente) sarà data dalla proposizione 13.13 più avanti.

13.11. Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 2tx, \\ x(0) = x_0 \ , \end{cases} \tag{13.13}$$

al variare dei dati iniziali $x_0 \in \mathbb{R}$. Con le notazioni di §13.9 abbiamo

$$G(t) = t^2, \qquad W(x) = \log |x|, \tag{13.14}$$

così che

$$\log |x(t)| = \log |x_0| + t^2, \tag{13.15}$$

purché sia $x_0 \neq 0$. Quindi

$$|x(t)| = |x_0|\, e^{t^2}, \tag{13.16}$$

D'altra parte $x(0) = x_0$, inserita nella (13.16), implica che possiamo eliminare il modulo, ottenendo quindi

$$x(t) = x_0\, e^{t^2}. \tag{13.17}$$

Se invece $x_0 = 0$ si vede immediatamente che $x(t) \equiv 0$ è soluzione con quel dato iniziale.

Poiché la (13.17) è identicamente nulla per $x_0 = 0$, possiamo concludere che la soluzione è sempre della forma (13.17). Si noti però che la discussione del dato iniziale $x_0 = 0$ va fatta a parte, dal momento che il procedimento descritto nel paragrafo §13.10 non è giustificato in questo caso (cfr. il commento dopo la (13.12)).

13.12. *Osservazione.* Se non è assicurata l'unicità del problema di Cauchy il metodo descritto nel paragrafo §13.9 non consente di trovare tutte le soluzioni.

Se consideriamo il problema di Cauchy dell'esempio 10.42, abbiamo, con le notazioni del paragrafo §13.9,

$$G(t) = t, \qquad W(x) = x^{1/3}, \tag{13.18}$$

così che risulta, tenendo conto delle condizioni iniziali,

$$x(t) = t^3, \tag{13.19}$$

che è tuttavia solo una delle infinite soluzioni possibili (cfr. la discussione del paragrafo §10.42).

13.13. PROPOSIZIONE. *Sia data l'equazione a variabili separabili*

$$\begin{cases} \dot{x} = h(x)\, g(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{13.20}$$

con $g\colon I \to \mathbb{R}$ *continua e* $h\colon W \to E$ *localmente lipschitziana. Se*

$$h(x_0) \neq 0, \tag{13.21}$$

allora esiste un'unica soluzione $x(t)$ *di (13.19), definita implicitamente dall'equazione*

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, g(s), \tag{13.22}$$

definita fin tanto che $h(x(t)) \neq 0$.

13.14. *Dimostrazione della proposizione 13.13.* La dimostrazione è una verifica diretta che la funzione $x(t)$ definita implicitamente dalla (13.22) è soluzione del problema di Cauchy (13.20).

In primo luogo si osservi che il primo integrale in (13.22) è ben definito se $h(x) \neq 0$ per ogni x nell'intervallo di integrazione: verificheremo *a posteriori* che questo accade se $h(x_0) \neq 0$ purché $|t - t_0|$ sia sufficientemente piccolo.

La funzione $x(t)$ soddisfa la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ (dal momento che tale condizione fa annullare il primo integrale in (13.20)).

Inoltre, derivando entrambi i membri della (13.22) rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{1}{h(x(t))}\, \dot{x}(t) = g(t), \tag{13.23}$$

così che $x(t)$ effettivamente risolve l'equazione in (13.20).

Per il teorema 13.4, esiste $a > 0$ tale che la funzione $x(t)$ è soluzione della (13.20), nel senso della definizione 10.7, in un intervallo $J \equiv [t_0 - a, t_0 + a]$. In particolare $x(t)$ è continua: quindi, poiché anche h è continua, se $h(x_0) \neq 0$ si ha $h(x(t)) \neq 0$ $\forall t \in J$, se a è sufficientemente piccolo. Sempre per il teorema 13.4 tale soluzione è unica, viste le ipotesi di regolarità della h.

Infine la soluzione $x(t)$ può essere prolungata in qualsiasi intervallo $(\alpha, \beta) \supset J$ purché $h(x(t)) \neq 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$: infatti in tale intervallo (α, β) il prolungamento è definito dall'equazione (13.22) stessa. ■

14. Sistemi di equazioni differenziali di ordine qualsiasi

14.1. Introduzione. I risultati dei paragrafi precedenti si estendono facilmente al caso di sistemi di equazioni differenziali di ordine qualsiasi: il corrispondente problema di Cauchy ammetterà però una soluzione unica purché si impongano condizioni iniziali non solo sulla funzione x, ma anche sulle sue prime $p-1$ derivate (se p è l'ordine più alto delle derivate che appaiono nelle equazioni). Per semplicità considereremo esplicitamente solo il caso in cui x sia una funzione reale, analogamente a quanto fatto nel caso di sistemi lineari.

14.2. Consideriamo ora il caso di sistemi di equazioni differenziali di ordine qualsiasi; per semplicità ci limiteremo di nuovo al solo caso in cui le equazioni siano scritte in forma normale (cfr. la (10.5) in §2.1).

14.3. Definizione (Problema di Cauchy per equazioni differenziali di ordine qualsiasi). *Il problema della determinazione delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali di ordine p con condizioni iniziali*

$$\begin{cases} x^{(p)} & = f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(p-1)}), \\ x(t_0) & = x_0, \\ x^{(1)}(t_0) & = x_1, \\ & \ldots\ldots \\ x^{(p-1)}(t_0) & = x_{p-1}, \end{cases} \tag{14.1}$$

con $x_0 \in W \subset E$, $x_j \in E$ $\forall j = 1, \ldots, p-1$, $f \colon I \times W \times E \times \ldots \times E \to E$, $I \subset \mathbb{R}$, *prende il nome di* problema di Cauchy *per il sistema considerato.*

14.4. Teorema (Esistenza e unicità per equazioni differenziali di ordine qualsiasi). *Sia* $W \subset E$ *un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato* E, *sia* I *un intervallo di* $\mathbb{R}$ *e sia* $f \colon I \times W \times E \times \ldots \times E \to E$ *un'applicazione continua in* t *e di classe* C^1 *nei suoi restanti argomenti. Siano* $x_0 \in W$ *e* $x_j \in E$ $\forall j = 1, \ldots, p-1$. *Allora esiste* $a > 0$ *e un'unica soluzione* $u \colon J \to W$, *con* $J = [t_0 - a, t_0 + a]$, *del problema di Cauchy (14.1).*

14.5. *Dimostrazione del teorema 14.4.* Ci si riconduce facilmente al caso delle equazioni differenziali del primo ordine, introducendo le variabili

$$\begin{cases} y_1 = x, \\ y_2 = x^{(1)}, \\ \quad \ldots \\ y_p = x^{(p-1)}, \end{cases} \tag{14.2}$$

e definendo

$$\begin{aligned} &y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathcal{W} \equiv W \times E \times \ldots \times E, \\ &f(t, y) \equiv f(t, y_1, \ldots, y_p). \end{aligned} \tag{14.3}$$

Per costruzione si ha quindi

$$\begin{cases} \dot{y}_1 & = \dot{x} \equiv x^{(1)} = y_2, \\ \dot{y}_2 & = \dot{x}^{(1)} \equiv x^{(2)} = y_3, \\ & \ldots\ldots \\ \dot{y}_{p-1} & = \dot{x}^{(p-2)} \equiv x^{(p-1)} = y_p, \\ \dot{y}_p & = \dot{y}^{(p-1)} \equiv x^{(p)} = f(t, y_1, \ldots, y_p), \end{cases} \tag{14.4}$$

così che, definendo la funzione $F \colon \mathcal{W} \to E^p$ come

$$F(t, y) = (y_2, y_3, \ldots, y_p, f(t, y)), \tag{14.5}$$

si ottiene un sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{y} = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{14.6}$$

dove si è posto

$$y_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}). \tag{14.7}$$

Possiamo quindi applicare il teorema 13.4 per concludere la dimostrazione. ■

15. Dipendenza differenziabile dai dati iniziali

15.1. Introduzione. Nel presente paragrafo vedremo la dimostrazione del teorema di dipendenza differenziabile dai dati iniziali (cfr. il teorema 11.11). Si tratta del risultato tecnicamente più complicato del presente capitolo, e, a una prima lettura, può essere omesso.

15.2. TEOREMA (DIPENDENZA CONTINUA DA PARAMETRI). *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto dell'asse reale. Data un'applicazione $f_1\colon I \times W \to E$ localmente lipschitziana in x, sia $f_2\colon I \times W \to E$ un'applicazione localmente lipschitziana tale che*

$$|f_1(t,x) - f_2(t,x)| < \varepsilon \qquad \forall (t,x) \in I \times W. \tag{15.1}$$

Se $u_1(t)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{15.2}$$

e $u_2(t)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f_2(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{15.3}$$

nello stesso intervallo di tempo $J \subset I$, con $t_0 \in J$, allora esiste una costante L tale che

$$|u_1(t) - u_2(t)| \le \frac{\varepsilon}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - 1 \right), \tag{15.4}$$

per ogni $t \in J$.

15.3. *Dimostrazione del teorema 15.2.* Sia W_0 un insieme compatto in W tale che $u_1(t) \in W_0$ $\forall t \in J$; sia L la costante di Lipschitz di f_1 in W_0.

Per ogni $t \in J$, si ha

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, (\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, (f_1(s,u_1(s)) - f_2(s,u_2(s))) \tag{15.5}$$

così che

$$\begin{aligned} |u_1(t) - u_2(t)| \le & \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, |f_1(s,u_1(s)) - f_1(s,u_2(s))| \\ & + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, |f_1(s,u_2(s)) - f_2(s,u_2(s))| \\ \le & \, L \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, |u_1(s) - u_2(s)| + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, \varepsilon. \end{aligned} \tag{15.6}$$

Se definiamo

$$w(t) = |u_1(t) - u_2(t)| + \frac{\varepsilon}{L}, \tag{15.7}$$

abbiamo quindi dalla (15.6)

$$w(t) \leq \frac{\varepsilon}{L} + L \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, w(s); \tag{15.8}$$

segue allora dal lemma 11.2 la diseguaglianza

$$w(t) \leq \frac{\varepsilon}{L} \, e^{L|t-t_0|}, \tag{15.9}$$

che, espressa in termini di $|u_1(t) - u_2(t)|$, implica la (15.4), con L data dalla costante di Lipschitz di f_1 in W_0. ■

15.4. Definizione (Equazione variazionale). *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto dell'asse reale. Data un'applicazione f: $I \times W \to E$ lipschitziana in x con costante di Lipschitz L, sia $\varphi(t, x_0)$ la soluzione del problema di Cauchy (13.1). Defineremo* equazione variazionale *del sistema (13.1) lungo la soluzione $\varphi(t, x_0)$ l'equazione*

$$\begin{cases} \dot{u} = Df(t, \varphi(t, x_0)) \, u, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{15.10}$$

con $u_0 \in E$.

15.5. Lemma. *Sia E uno spazio vettoriale normato e sia I un intervallo in $\mathbb{R}$. Sia $A(t)$ una matrice continua in $t \in I$. Il sistema lineare*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{15.11}$$

ammette una soluzione unica $u(t)$ in E definita per ogni $t \in I$.

15.6. *Dimostrazione del lemma 15.5.* È sufficiente dimostrare che per ogni $I_0 \subset I$ compatto esiste un'unica soluzione $u(t)$ definita in I_0.

Per ogni $I_0 \subset I$ compatto la norma dell'operatore $A(t)$ è limitata da una costante L, data da

$$L = \max_{t \in I_0} \|A(t)\|, \tag{15.12}$$

che rappresenta una costante di Lipschitz (in x) per la funzione $f(t, x) = A(t) \, x$, per $t \in I_0$; si noti che tale costante è uniforme per ogni $x \in E$.

Possiamo allora ripetere la costruzione degli approssimanti di Picard $u_k(t)$ come in §10.28; ora non è però necessario imporre che il moto avvenga in un insieme compatto W_0, in cui la funzione $f(t, x)$ ammetta una costante di Lipschitz uniforme, poiché abbiamo già visto che L è una costante di Lipschitz in x per la funzione $f(t, x)$ in tutto E. Quindi, se indichiamo con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ l'intervallo di definizione (in t) della soluzione $u(t)$ non occorre imporre la condizione (10.43) su a.

D'altra parte si è già visto che la condizione $a < 1/L$ data dalla (10.49) non è necessaria (cfr. l'osservazione 10.41), quindi l'unica condizione che resta su a è che per ogni $t \in J$ si deve avere $t \in I_0$. Ne segue che la soluzione $u(t)$ è definita per ogni $t \in I_0$. ■

15.7. COROLLARIO. *Se $\varphi(t, x_0)$ è definita per $t \in J$, il problema variazionale (15.10) ammette un'unica soluzione $u(t, u_0; x_0)$ definita per ogni $t \in J$.*

15.8. *Dimostrazione del corollario 15.7.* Basta applicare il lemma 15.5, con $A(t) = Df(\varphi(t, x_0))$. ■

15.9. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{15.13}$$

e indichiamone con $\varphi(t, x_0)$ la soluzione. Allo stesso modo indichiamo con $\varphi(t, x_0 + \xi)$ la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 + \xi, \end{cases} \tag{15.14}$$

e con $u(t, \xi; x_0)$ la soluzione dell'equazione variazionale

$$\begin{cases} \dot{u} = Df(t, \varphi(t, x_0))\, u, \\ u(t_0) = \xi. \end{cases} \tag{15.15}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \varphi(t, x_0) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(s, \varphi(s, x_0)), \\ \varphi(t, x_0 + \xi) &= x_0 + \xi + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, f(s, \varphi(s, x_0 + \xi)), \\ u(t, \xi; x_0) &= \xi + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, Df(s, \varphi(s, x_0))\, u(s, \xi; x_0), \end{aligned} \tag{15.16}$$

per ogni t per cui le soluzioni siano definite.

15.10. PROPOSIZIONE. *Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E e $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto dell'asse reale. Sia $f \colon I \times W \to E$ un'applicazione di classe C^1 e sia $\varphi(t, x_0)$ la soluzione del problema di Cauchy (15.13). Sia $J_0 \subset J$ un intervallo compatto contenente t_0: risulta allora*

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{|\varphi(t, x_0 + \xi) - \varphi(t, x_0) - u(t, \xi; x_0)|}{|\xi|} = 0, \qquad \xi \in E, \tag{15.17}$$

uniformemente in $t \in J_0$.

15.11. *Dimostrazione della proposizione 15.10.* Poniamo $J_0 = [t_1, t_2]$. La soluzione $\varphi(t, x_0 + \xi)$ del problema di Cauchy (15.14) e la soluzione $u(t, \xi; x_0)$ del problema di

Cauchy (15.15) sono entrambe definite $\forall t \in J_0$, rispettivamente per il teorema 12.26, purché ξ sia sufficientemente piccolo, e per il corollario 15.7.

Poiché la funzione f è di classe C^1 , per ogni $x, y \in W$ e per ogni $s \in J_0$ si ha

$$\begin{aligned} & f(s,y) - f(s,x) = Df(s,x)\,(y-x) + R(s,x,y-x), \\ & \lim_{x \to y} \frac{R(s,x,y-x)}{|y-x|} = 0, \end{aligned} \tag{15.18}$$

uniformemente in $s \in J_0$ (per il teorema dell'uniforme continuità, poiché J_0 è compatto; cfr. la nota bibliografica).

Utilizzando le formule (15.16) e (15.18) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & |\varphi(t,x_0+\xi) - \varphi(t,x_0) - u(t,\xi;x_0)| \\ & \qquad \le \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi(s,x_0+\xi)) - f(s,\varphi(s,x_0)) - Df(s,\varphi(s,x_0))\,u(s,\xi;x_0)| \\ & \qquad \le \int_{t_0}^{t} |Df(s,\varphi(s,x_0))\,[\varphi(s,x_0+\xi) - \varphi(s,x_0) - u(s,\xi;x_0)]| \\ & \qquad\qquad + \int_{t_0}^{t} |R(s,\varphi(s,x_0),\varphi(s,x_0+\xi) - \varphi(s,x_0))| \, . \end{aligned} \tag{15.19}$$

Poniamo

$$w(t) \equiv |\varphi(t,x_0+\xi) - \varphi(t,x_0) - u(t,\xi;x_0)| \, , \tag{15.20}$$

e definiamo $K \equiv K(x_0)$ come

$$K = \max_{s \in J_0} \{ \| Df(s,\varphi(s,x_0)) \| \}. \tag{15.21}$$

Allora dalla (15.19) otteniamo

$$w(t) \le K \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, w(s) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, |R(s,\varphi(s,x_0),\varphi(s,x_0+\xi) - \varphi(s,x_0))| \, , \tag{15.22}$$

dove, per la (15.18), $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0$ tale che

$$|R(s,\varphi(s,x_0),\varphi(s,x_0+\xi) - \varphi(s,x_0))| \le \varepsilon\, |\varphi(s,x_0+\xi) - \varphi(s,x_0)| \, , \tag{15.23}$$

per ogni $|\varphi(s,x_0+\xi) - \varphi(s,x_0)| < \delta_1$ e per ogni $s \in J_0$. Poiché $\varphi(s,x_0)$ dipende con continuità dal dato iniziale x_0 (cfr. il teorema 12.26 e l'osservazione 11.8) la condizione $|\varphi(s,x_0+\xi) - \varphi(s,x_0)| < \delta_1$ è soddisfatta purché $|\xi| < \delta$ con δ sufficientemente piccolo: più precisamente, per il teorema 12.26 si ha $\forall s \in J_0$

$$|\varphi(s,x_0+\xi) - \varphi(s,x_0)| \le |\xi|\, e^{L|s-t_0|} \le |\xi| e^{L|t_1-t_2|} \equiv \delta_1, \tag{15.24}$$

così che si può scegliere $\delta = \delta_1 e^{-L|t_1-t_0|}$.

La (15.22) diventa quindi, per la (15.24),

$$w(t) \leq K \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, w(s) + \varepsilon \, |\xi| \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, e^{L|s-t_0|} \leq K \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, w(s) + C_1 \varepsilon \, |\xi| \, , \tag{15.25}$$

dove la costante $C_1 \leq e^{L|t_1-t_2|} \, |t_1 - t_2|$ dipende solo da L e dall'ampiezza dell'intervallo J_0. Applicando allora il lemma 11.2 si ottiene

$$w(t) \leq C_1 \varepsilon \, |\xi| \, e^{K|t-t_0|}, \tag{15.26}$$

che, data l'arbitrarietà di ε, implica

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{w(t)}{|\xi|} = 0, \tag{15.27}$$

uniformemente in $t \in J_0$. Questo dimostra la (15.17). ■

15.12. *Dimostrazione del teorema 11.11.* Dobbiamo dimostrare che

$$D_0 \varphi(t, x_0), \qquad D_0 \equiv \partial / \partial x_0, \tag{15.28}$$

è continua in x_0. Per definizione di derivata, introdotto un sistema di coordinate in cui sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$, risulta

$$[D_0 \varphi(t, x_0)]_{ij} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i(t, x) \right|_{x = x_0} = \lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi_i(t, x_0 + \xi) - \varphi_i(t, x_0)}{\xi_j}, \tag{15.29}$$

così che, dalla proposizione 15.10, abbiamo

$$[D \varphi(t, x_0)]_{ij} = \lim_{\xi \to 0} \frac{u_i(t, \xi; x_0)}{\xi_j} \equiv v_{ij}(t, x_0). \tag{15.30}$$

Vogliamo quindi far vedere che $v_{ij}(t, x_0)$ è continua in x_0, *i.e.* che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che se } |x_0 - y_0| < \delta \text{ allora } |v_{ij}(t, x_0) - v_{ij}(t, y_0)| < \varepsilon, \tag{15.31}$$

uniformemente in t contenuto in qualche compatto $J_0 = [t_1, t_2] \ni t_0$. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |v_{ij}(t, x_0) - v_{ij}(t, y_0)| \leq & \left| v_{ij}(t, x_0) - \frac{u_i(t, \xi; x_0)}{\xi_j} \right| \\ & + \left| \frac{u_i(t, \xi; x_0)}{\xi_j} - \frac{u_i(t, \xi; y_0)}{\xi_j} \right| + \left| \frac{u_i(t, \xi; y_0)}{\xi_j} - v_{ij}(t, y_0) \right| , \end{aligned} \tag{15.32}$$

dove, tenendo conto anche della (15.30), risulta

$$\left| v_{ij}(t, x_0) - \frac{u_i(t, \xi; x_0)}{\xi_j} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left| v_{ij}(t, y_0) - \frac{u_i(t, \xi; y_0)}{\xi_j} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{15.33}$$

purché ξ sia sufficientemente piccolo.

Inoltre, per il teorema 12.26 (considerando che $u(t, 0; x_0) \equiv 0$), si ha

$$|u(t, \xi; x_0)| \le |\xi| \, e^{L|t-t_0|} \le |\xi| \, e^{L|t_1-t_2|} \le C_2 \, |\xi| \, , \tag{15.34}$$

dove la costante $C_2 = e^{L|t_1-t_2|}$ dipende solo da L e dall'ampiezza dell'intervallo J_0. Se si fissa $\eta > 0$ in modo che sia $\eta < \varepsilon L e^{-L|t_1-t_2|}/3$ e si sceglie, in corrispondenza, $\delta > 0$ tale che, per $|x_0 - y_0| < \delta$, risulti

$$\| Df(t, \varphi(t, x_0)) - Df(t, \varphi(t, y_0)) \| \le \frac{\eta}{C_2}, \tag{15.35}$$

si ha allora

$$|(Df(t, \varphi(t, x_0)) - Df(t, \varphi(t, y_0))) \, u| \le \eta \, |\xi| \qquad \forall t \in J_0. \tag{15.36}$$

Si può allora applicare il teorema 15.2, per concludere

$$\left| \frac{u_i(t, \xi; x_0)}{\xi_j} - \frac{u_i(t, \xi; y_0)}{\xi_j} \right| \le \frac{\eta}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - 1 \right) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{15.37}$$

$\forall t \in J_0$, così che la (15.31) è dimostrata.

La soluzione $\varphi(t, x_0)$ dipende quindi in modo C^1 da x_0. Poiché la dipendenza C^1 da t era già stata dimostrata (cfr. anche l'osservazione 11.12) la dimostrazione del teorema 11.11 è completa. ■

Nota bibliografica

Nella trattazione del presente capitolo abbiamo seguito [Hirsch-Smale], Capp. 8 e 15, tranne che per il paragrafo §12, per il quale abbiamo seguito essenzialmente [Giusti2], Cap. 3 (a eccezione del teorema 12.26, che è invece di nuovo tratto da [Hirsch-Smale], Cap. 8)

Alcuni paragrafi fanno però riferimento ad altri testi, specialmente [John] per alcune osservazioni, quali quelle discusse nei paragrafi §10.31, §10.41 e §12.2, e [Giusti2] per la descrizione di talune proprietà elementari di analisi richiamate nel testo (cfr. i paragrafi §10.21÷§10.24). Sempre in [John] si può trovare la dimostrazione dell'esistenza della soluzione per il problema di Cauchy sotto la sola ipotesi di continuità sul campo vettoriale (cfr. l'osservazione §10.32).

Le due dimostrazioni date del lemma di Gronwall sono tratte la prima da [Hirsch-Smale] e la seconda da [John].

Per una trattazione introduttiva dei gruppi cfr. *e.g.* [Lang], Cap. 14, o [Kuroš], Cap. XIV. Per il teorema dell'uniforme continuità cfr. *e.g.* [Giusti1], Cap. 3, mentre per il teorema di Rolle e il teorema di Lagrange cfr. *e.g.* [Giusti1], Cap. 4. Per il teorema di Schwarz dell'inversione dell'ordine di derivazione cfr. *e.g.* [Giusti2], Cap. 4. Gli esercizi 3 e 4 sono tratti da [Giusti2], Cap. 1.

Per un'introduzione alla teoria di Floquet cfr. *e.g.* [Ince].

Esercizi

Esercizio 1. Un *gruppo* è un insieme G di elementi ai quali sia stata assegnata una regola $\circ$ (*legge di composizione*) che permetta di associare a ogni coppia di elementi $x, y \in G$ un altro elemento z, che si può indicare con $z = x \circ y$, in modo tale che siano soddisfatte le seguenti proprietà: (1) $\forall x, y \in G$ si ha $x \circ y \in G$; (2) $\forall x, y, z \in G$ vale la *proprietà associativa* $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$; (3) esiste un elemento $e \in G$ (*elemento unità* o *elemento neutro*) tale che $xe = ex = x$ $\forall x \in G$; (4) $\forall x \in G$ esiste un elemento y (*elemento opposto*) tale che $xy = yx = e$. Verificare che l'applicazione $t \to \varphi(t, \cdot)$ della definizione 10.2 definisce un gruppo.

Esercizio 2. Si consideri la successione di funzioni $\{u_k\}$, continue in $[-1, 1]$,

$$u_k(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t \le 0, \\ 1 - tk, & 0 \le t \le 1/k, \\ 0, & 1/k \le t \le 1; \end{cases}$$

cfr. la figura. Se ne calcoli la funzione limite $u(t) = \lim_{k \to \infty} u_k(t)$ e si verifichi che la convergenza non è uniforme. [*Suggerimento.* Risulta $u(t) = 1$ per $-1 \le t \le 0$ e $u(t) = 0$ per $0 < t \le 1$: poiché $\sup_{t \in [-1,1]} |u_k(t) - u(t)| = \sup_{t \in [0,1/k]} |1 - tk| = 1$ la convergenza non può essere uniforme.]

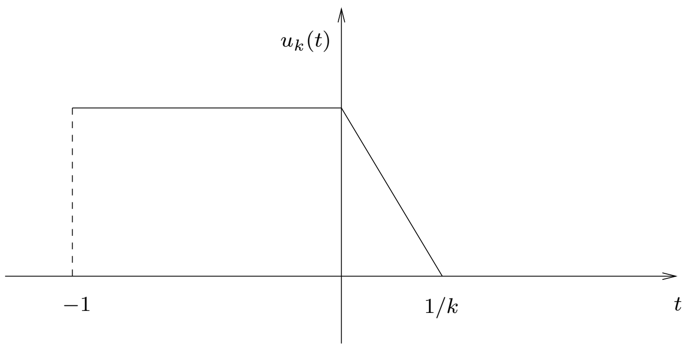

FIGURA. Grafico della funzione $u_k(t)$ dell'esercizio 2.

Esercizio 3. Si consideri la successione di funzioni $\{u_k\}$, continue in $[0, 1]$,

$$u_k(t) = t^k.$$

Se ne calcoli la funzione limite $u(t) = \lim_{k \to \infty} u_k(t)$ e si verifichi che la convergenza non è uniforme. Si verifichi che ciononostante si può passare al limite sotto il segno d'integrale: questo dimostra che la convergenza uniforme è solo condizione sufficiente per poter passare al limite sotto il segno d'integrale.

[*Suggerimento.* Risulta $u(t) = 0$ per $0 \leq t < 1$ e $u(t) = 1$ per $t = 1$: poiché $\sup_{t\in[0,1]} |t^k - u(t)| = 1$ la convergenza non può essere uniforme. D'altra parte $\int_0^1 \mathrm{d}t\, t^k = (k+1)^{-1} \to 0$ per $k \to \infty$.]

Esercizio 4. Si consideri la successione di funzioni $\{u_k\}$, continue in $[0,1]$,

$$u_k(t) = k^p t\, e^{-kt}, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Se ne calcoli la funzione limite $u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t)$ e si discuta quando la convergenza è uniforme al variare di p. Si discuta anche la possibilità di passare al limite sotto il segno d'integrale in rapporto al teorema 10.17. [*Suggerimento.* Risulta $u(t) = 0$ $\forall t \in [0,1]$. D'altra parte $\sup_{t\in[0,1]} |u_k(t) - u(t)|$ $= k^{p-1}e^{-1}$; si ha quindi convergenza uniforme solo per $p < 1$. Inoltre $\int_0^1 \mathrm{d}t\, u_k(t) = k^{p-2}(1-(k+1))\, e^{-k}$, che converge a 0 solo per $p < 2$: ovviamente per valori $p \geq 2$ la successione non converge uniformemente a 0.]

Esercizio 5. Dimostrare che gli approssimanti di Picard del sistema lineare (10.55) sono dati dalla (10.56). [*Soluzione.* La dimostrazione è per induzione. Gli approssimati di Picrad sono definiti da (10.38) per $k = 0$ e da (10.41) per $k \geq 0$. Quindi $u_0(t) = x_0$, che è anche il valore della (10.56) per $k = 0$. Assumendo la (10.56) per k si ha, dalla (10.38),

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, A u_k(s) = x_0 + \sum_{n=0}^{k} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, \frac{1}{k!} A^{k+1} s^k \\ &= x_0 + \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(k+1)!} A^{k+1} t^{k+1} = x_0 + \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{K!} A^k t^k = \sum_{n=0}^{k+1} \frac{1}{K!} A^k t^k, \end{aligned}$$

che è la (10.56) per $k+1$.]

Esercizio 6. Dimostrare per induzione la disuguaglianza (10.62).

Esercizio 7. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} + 2tx = tx^3, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Cosa succede cambiando i dati iniziali? [*Soluzione.* Si ha $\varphi(t,0) \equiv 0$. Se $x_0 = \pm\sqrt{2}$ allora $\varphi(t,x_0) = x_0$. Se $x(0) = x_0 \notin \{0, \pm\sqrt{2}\}$ allora, risolvendo per separazione di variabili, si trova $\varphi(t,x_0) = \operatorname{sign} x_0 \left(1/2 + \exp(2t^2)(1/x_0^2 - 1/2)\right)^{-1/2}$.]

Esercizio 8. Si consideri il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + (x-t)^2, \\ x(0) = -\lambda, \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinare l'intervallo di definizione della soluzione. [*Suggerimento.* Si cerchino soluzioni nella forma $x(t) = t + y(t)$: si trova quindi che $y(t)$ deve risolvere l'equazione autonoma $\dot{y} = y^2$ con condizioni iniziali $y(0) = -\lambda$. Quindi $x(t) = t - \lambda(1+t\lambda)^{-1}$, così che $x(t)$ è definita per $t \in (-1/\lambda, \infty)$ se $\lambda > 0$ e per $t \in (-\infty, -1/\lambda)$ se $\lambda < 0$. Se invece $\lambda = 0$ si ha $x(t) = t$, che è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.]

Esercizio 9. Data l'equazione differenziale in $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0,$$

che descrive il moto di una molla su cui agisce una forza di richiamo non lineare, si dimostri che tutte le soluzioni sono definite globalmente. [*Suggerimento.* Verificare che la quantità $H(x,\dot{x}) = \dot{x}^2/2 + x^2/2 + x^4/4$ è costante lungo le traiettorie, *i.e.* $H(\varphi(t,x_0),\dot{\varphi}(t,x_0)) = \text{cost.}$, e utilizzare il corollario 12.23.]

Esercizio 10. Dimostrare che sotto le ipotesi del teorema 12.26 esiste $\varepsilon > 0$ tale che la (12.36) sia soddisfatta per ogni $t \in [t_0,t_1]$. [*Suggerimento.* Si ragiona per assurdo. Se l'asserto è falso, allora per ogni $\varepsilon = 1/k$ deve esistere $t_k \in [t_0,t_1]$ tale che l'intorno $B_{1/k}(u(t_k))$ contenga almeno un punto $z_k \notin W$. Poiché $E \setminus W$ è chiuso, da $\{z_k\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{z_{k_j}\}$ convergente a un punto $z_0 \notin W$. D'alta parte per $j \to \infty$ il raggio $1/k_j$ tende a zero, quindi z_0 deve essere un punto sulla curva $t \to u(t)$, e quindi deve appartenere a W.]

Esercizio 11. Si consideri l'equazione differenziale $\dot{x} = x^2$ in $\mathbb{R}$. Verificare che la soluzione con dato iniziale x_0 è data da $x(t) = x_0/(1 - tx_0)$, che è quindi definita per $|t| < 1/x_0$. Per ogni $y_0 > x_0$ la corrispondente soluzione è definitia per $|t| < 1/y_0 < 1/x_0$. Spiegare perché tale risultato non è in contraddizione con il teorema 12.26.

Esercizio 12. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x\cos t, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Si ha $\varphi(t,0) = x_0 \exp \sin t$.]

Esercizio 13. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2t\left(1 + x^2\right), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Si ha $\varphi(t,0) = \tan t^2$.]

Esercizio 14. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x\left(x^2 - 1\right), \\ x(0) = 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Si ha $\varphi(t,0) = 1/\sqrt{1 + \exp 8t}$.]

Esercizio 15. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2tx^3, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Determinare l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione. [*Soluzione.* Si ha $\varphi(t,0) = x_0/\sqrt{1 - 2t^2x_0^2}$. Se $x_0 \neq 0$, la soluzione è definita per $|t| < T = 1/\sqrt{2x_0^2}$, quindi l'intervallo massimale è $(-T,T)$.]

Esercizio 16. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 4tx + t\sqrt{x}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Esercizio 17. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x(1 + x^2)}{t(1 - x^2)}, \\ x(1) = x_2. \end{cases}$$

Esercizio 18. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{2tx}{t^2 - x^2}, \\ x(1) = 2. \end{cases}$$

[*Soluzione.* Con il cambiamento di variabile $x(t) = ty(t)$ il problema si riconduce al problema di Cauchy dell'esercizio 17.]

Esercizio 19. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+t^2}}, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Esercizio 20. Risolvere il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1+t^2}}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Cosa succede per condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$? [*Soluzione.* Si vede subito che $x(t) = t$ risolve il problema di Cauchy. Per $x(0) = x_0 \neq 0$ la soluzione è $x(t) = \tan(\arctan x_0 + \arctan t)$.]