

## Capitolo 4. Analisi qualitativa del moto e stabilità

### 16. Stabilità secondo Ljapunov

**16.1. Introduzione.** Abbiamo visto che, nello studio di un sistema dinamico, in generale non è possibile determinare analiticamente la soluzione per tutti i dati iniziali. Tuttavia molte proprietà generali di un sistema dinamico possono essere studiate senza determinare esplicitamente l'insieme di tutte le traiettorie: si definisce *analisi qualitativa* lo studio di tali proprietà.

Alcune proprietà sono di carattere locale, interessano cioè il comportamento qualitativo delle soluzioni in una ristretta regione dello spazio in cui si svolge il moto; esempi sono il comportamento nelle vicinanze di un punto d'equilibrio o lontano dai punti d'equilibrio: i due casi porteranno, rispettivamente, alla nozione di stabilità e al teorema della scatola di flusso. In entrambi i casi si caratterizza il moto fin tanto che non ci allontani troppo dai dati iniziali, indipendentemente da cosa possa succedere nel caso che ce ne si allontani.

Altre proprietà sono invece di natura globale, interessano cioè il comportamento del sistema non in un intorno del dato iniziale, ma in una regione estesa. Come esempi vedremo più avanti l'esistenza di traiettorie periodiche o asintotiche e di cicli limite o lo studio delle curve di livello.

**16.2. Notazioni.** Consideriamo un *sistema dinamico*

$$\dot{x} = f(x), \quad (16.1)$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e  $\dot{x} = dx/dt$ . In generale il dominio di definizione di  $f$  può essere un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{R}^n$ ; l'analisi che segue, essendo di carattere locale, può essere estesa al caso in cui  $A$  sia un dominio in  $\mathbb{R}^n$ , sotto analoghe ipotesi di regolarità del campo vettoriale, senza ulteriori difficoltà.

Potremmo considerare anche  $x \in \Sigma$ , dove  $\Sigma$  è una varietà differenziabile, e  $f: \Sigma \rightarrow T\Sigma$ , i.e.  $f(x) \in T_x\Sigma$ , se  $T_x\Sigma$  è lo spazio tangente a  $\Sigma$  in  $x$  e  $T\Sigma$  è il fibrato tangente (cfr. la nota bibliografica). In ogni caso a noi interesseranno prevalentemente proprietà locali, quindi non sarà restrittivo lavorare in  $\mathbb{R}^n$  (possiamo sempre supporre di aver fissato una carta opportuna); di fatto studieremo proprietà globali in dettaglio solo per sistemi definiti in  $\mathbb{R}^n$ .

In generale chiameremo *spazio delle fasi* lo spazio in cui  $x$  è definito. Dato il sistema (16.1), indicheremo con  $\varphi(t, \bar{x})$  la soluzione con dato iniziale  $\bar{x}$ : questo vuol dire che  $\varphi(0, \bar{x}) = \bar{x}$  e la funzione  $\varphi(t, \bar{x})$  risolve l'equazione (16.1). Ricordiamo che l'insieme delle traiettorie  $\varphi(t, x)$ , al variare dei dati iniziali  $x \in A$ , si chiama *flusso* del sistema dinamico (16.1); il flusso gode della proprietà di gruppo  $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ .

Una traiettoria  $\varphi(t, x)$  si dice *periodica* se esiste  $T > 0$  tale che  $\varphi(t+T, x) = \varphi(t, x)$ : il valore minimo di  $T$  per cui questo avviene prende il nome di *periodo*. Ovviamente l'orbita descritta da una traiettoria periodica è chiusa (cfr. l'esercizio 1), e il periodo della traiettoria non dipende dal punto  $x$  scelto come dato iniziale: questo vuol dire che se  $y = \varphi(t_0, x)$  allora  $\varphi(t+T, y) = \varphi(t, y)$  (cfr. l'esercizio 2), e quindi possiamo parlare di periodo di una traiettoria.

Sia  $x \in \mathbb{R}^n$  tale che  $f(x) \neq 0$ . Una *sezione locale* di  $f$  in  $x$  è un insieme aperto  $S$  contenuto nell'iperpiano di codimensione 1 contenente  $x$  e trasverso a  $f$ : questo significa che  $\dim(S) = n-1$  e che, per ogni  $z \in S$ ,  $f(z)$  non è contenuto in  $S$  (in altri termini il campo vettoriale in tutti i punti della sezione è diretto sempre verso destra o sempre verso sinistra, rispetto alla sezione).

Un insieme  $A \in \mathbb{R}^n$  si dice *invariante* (rispetto al flusso  $\varphi(t, \cdot)$ ) se, per ogni  $x \in A$ ,  $\varphi(t, x) \in A \forall t \in \mathbb{R}$ ; un insieme  $P \in \mathbb{R}^n$  si dice *positivamente invariante* (rispetto al flusso  $\varphi(t, \cdot)$ ) se, per ogni  $x \in P$ , si ha  $\varphi(t, x) \in P \forall t \geq 0$ ; un insieme  $N \in \mathbb{R}^n$  si dice *negativamente invariante* (rispetto al flusso  $\varphi(t, \cdot)$ ) se, per ogni  $x \in N$ , si ha  $\varphi(t, x) \in N \forall t \leq 0$ .

Dati due punti  $x, y \in \mathbb{R}^n$  indicheremo con  $|x-y|$  la distanza tra i due punti, essendo  $|\cdot|$  la norma indotta da un opportuno prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  in  $\mathbb{R}^n$ ; cfr. il paragrafo §2.1. Tipicamente il prodotto scalare sarà definito come

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (16.2)$$

e la norma sarà quindi la norma euclidea:

$$|x| = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (16.3)$$

Due norme  $|\cdot|_1$  e  $|\cdot|_2$  in uno spazio vettoriale  $E$  si dicono *equivalenti* se esistono due costanti strettamente positive  $c_1$  e  $c_2$  tali che  $c_1^{-1}|x|_1 < |x|_2 < c_1|x|_1$  e  $c_2^{-1}|x|_2 < |x|_1 < c_2|x|_2$  per ogni  $x \in E$ . Ricordiamo che se  $E = \mathbb{R}^n$  tutte le norme sono equivalenti (cfr. l'esercizio 4).

Indicheremo con  $B(x)$  un intorno del punto  $x$ ; se vogliamo precisare che l'intorno ha raggio  $\varepsilon > 0$  scriveremo  $B_\varepsilon(x)$ ; quindi  $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < \varepsilon\}$ .

Definiremo anche l'operatore gradiente come

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \quad (16.4)$$

Data una funzione  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , consideriamo i valori che la funzione  $W$  assume lungo una traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$ ; definiamo la *derivata sostanziale* (o derivata rispetto al tempo) di  $W$  come la funzione

$$\begin{aligned} \dot{W}(\varphi(t, \bar{x})) &\equiv \frac{d}{dt}W(\varphi(t, \bar{x})) = \langle \nabla W(\varphi(t, \bar{x})), f(\varphi(t, \bar{x})) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial W(\varphi(t, \bar{x}))}{\partial x_j} f_j(\varphi(t, \bar{x})). \end{aligned} \tag{16.5}$$

Poniamo anche

$$\dot{W}(x) \equiv \left. \frac{d}{dt}W(\varphi(t, x)) \right|_{t=0}. \tag{16.6}$$

Se  $\dot{W}(\varphi(t, x)) = 0$  per ogni traiettoria  $\varphi(t, x)$  diremo che  $W$  è una *costante del moto* (o *integrale primo*). Se  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una costante del moto per il sistema (16.1), le superfici descritte dall'equazione  $H(x) = c$ , al variare di  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\Sigma_c = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = c\}, \tag{16.7}$$

prendono il nome di *superfici di livello*. Le superfici di livello sono delle superfici regolari (di classe  $C^k$  se  $H$  è di classe  $C^k$ ) di codimensione 1; in particolare in  $\mathbb{R}^2$  parleremo di *curve di livello*.

**16.3. DEFINIZIONE (EQUILIBRIO).** *Chiameremo punto d'equilibrio (o punto critico) del sistema (16.1) un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tale che  $f(x_0) = 0$ .*

**16.4. Osservazione.** Se  $x_0$  è un punto d'equilibrio per il sistema (16.1), allora  $\varphi(t, x_0) \equiv x_0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Infatti  $\varphi(t, x_0) = x_0$  è soluzione di (16.1) con dato iniziale  $x_0$  e, per il teorema 10.36 (teorema di unicità), è anche l'unica soluzione possibile.

**16.5. DEFINIZIONE (STABILITÀ SECONDO LJAPUNOV).** *Dato un punto d'equilibrio  $x_0$  per il sistema (16.1), diremo che*

(1)  $x_0$  è un punto d'equilibrio stabile secondo Ljapunov (o stabile *tout court*) se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che se  $|\bar{x} - x_0| < \delta$  allora  $|\varphi(t, \bar{x}) - x_0| < \varepsilon$  per ogni  $t \geq 0$ ;

(2)  $x_0$  è instabile se non è stabile, cioè se esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\delta > 0$  esiste  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$  e  $t_1 > 0$  tali che  $|\varphi(t_1, \bar{x}) - x_0| > \varepsilon$ ;

(3)  $x_0$  è attrattivo se esiste un intorno  $B(x_0)$  tale che, per ogni  $\bar{x} \in B(x_0)$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, \bar{x}) - x_0| = 0; \tag{16.8}$$

(4)  $x_0$  è asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo.

*Infine, dato un punto d'equilibrio attrattivo  $x_0$ , chiameremo bacino d'attrazione di  $x_0$  l'insieme aperto massimale dei punti  $\bar{x}$  per i quali la (16.8) sia soddisfatta.*

**16.6. Osservazione.** Si noti che un punto può essere attrattivo senza essere asintoticamente stabile: è sufficiente che non sia stabile. Un controesempio è il seguente.

Consideriamo il sistema  $\dot{\theta} = \cos \theta - 1$ , con  $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (cioè definito modulo  $2\pi$ ). L'equazione del moto si integra immediatamente: la soluzione del sistema dinamico con dato iniziale  $\bar{\theta} \in (0, /2\pi)$  è data da  $\varphi(t, \bar{\theta}) = 2\operatorname{arccot}[t + \cot(\bar{\theta}/2)]$  (cfr. l'esercizio 5), che è graficata nella figura 16.1: quindi si vede che, comunque venga scelto  $\bar{\theta}$ , si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \bar{\theta}) = 0$ , quindi  $\theta = 0$  è attrattivo (e il suo bacino d'attrazione è  $\mathbb{T}$ ). Tuttavia si vede anche che comunque sia scelto  $\varepsilon > 0$  è possibile trovare  $\delta > 0$  tale che, se  $\bar{\theta} \in (-\delta, 0) \subset B_\delta(0)$ , allora esiste un tempo finito  $t_1$  tale che  $\varphi(t_1, \bar{\theta}) \notin B_\varepsilon(0)$ .

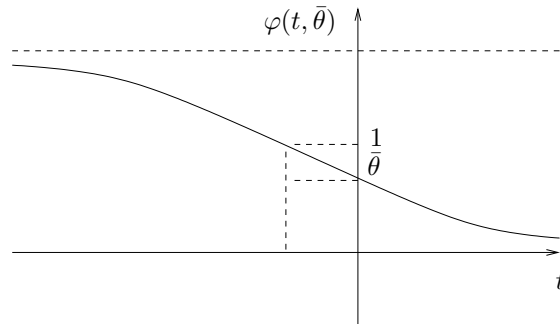


FIGURA 16.1. Grafico della funzione  $\varphi(t, \bar{\theta}) = 2\operatorname{arccot}[t + \cot(\bar{\theta}/2)]$ .

**16.7. DEFINIZIONE (INSIEME LIMITE).** Dato  $x \in \mathbb{R}^n$ , definiremo l'insieme  $\omega$ -limite di  $x$  come l'insieme

$$L_\omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \rightarrow \infty \text{ tale che } \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(t_k, x) - y| = 0\}, \tag{16.9}$$

dove  $\{t_k\}$  è una successione monotona di tempi che tende a  $+\infty$ . Analogamente definiremo l'insieme  $\alpha$ -limite di  $x$  come l'insieme

$$L_\alpha(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_k \rightarrow -\infty \text{ tale che } \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(t_k, x) - y| = 0\}, \tag{16.10}$$

dove  $\{t_k\}$  è una successione monotona di tempi che tende a  $-\infty$ .

**16.8. ESEMPLI.** Esempi di insiemi limite per sistemi dinamici (16.1) sono i punti d'equilibrio asintoticamente stabili definiti nel paragrafo §16.2 e i cicli limite che saranno definiti nel paragrafo §20.12. Se la traiettoria che parte da un punto  $x$  è periodica, ogni punto lungo la traiettoria, e quindi l'orbita stessa contenente  $x$ , appartiene all'insieme  $\omega$ -limite e all'insieme  $\alpha$ -limite di  $x$ .

**16.9.** Ricordiamo ora alcuni risultati elementari di Analisi che saranno utilizzati nel

seguito (cfr. la nota bibliografica). Indichiamo con  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  la retta estesa.

**16.10.** LEMMA. *Se una successione reale  $\{t_k\}$  ha limite  $t_0 \in \mathbb{R}^*$ , allora ogni successione estratta da  $\{t_k\}$  ha ancora limite  $t_0$ .*

**16.11.** *Dimostrazione del lemma 16.10.* Consideriamo separatamente i due casi  $|t_0| < \infty$  e  $|t_0| = \infty$ .

Se  $|t_0| < \infty$ , per definizione di limite:  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $|t_k - t_0| < \varepsilon$ . Se  $\{t_{k_n}\}$  è una successione estratta da  $\{t_k\}$ , esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $k_n > k_0$  per ogni  $n > n_0$ , così che per tali  $k_n$  si ha  $|t_{k_n} - t_0| < \varepsilon$ : quindi  $t_{k_n} \rightarrow t_0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Se  $t_0 = \infty$ , per definizione di limite:  $\forall M > 0$  esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $t_k > M$ . Se  $\{t_{k_n}\}$  è una successione estratta da  $\{t_k\}$ , esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $k_n > k_0$  per ogni  $n > n_0$ , così che per tali  $k_n$  si ha  $t_{k_n} > M$ : quindi  $t_{k_n} \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$ . Analogamente si discute il caso  $t_0 = -\infty$ . ■

**16.12.** LEMMA. *Date due successioni reali  $\{t_k\}$  e  $\{a_k\}$ , la prima monotona divergente, esiste sempre una sottosuccessione  $\{t_{k_j}\}$  di  $\{t_k\}$ , monotona divergente e tale che  $|t_{k_{j+1}} - t_{k_j}| > a_j \forall j \in \mathbb{N}$ .*

**16.13.** *Dimostrazione del lemma 16.12.* È sufficiente definire la sottosuccessione  $\{\tau_j\} \equiv \{t_{k_j}\}$  induttivamente nel modo seguente. Si fissa  $\tau_1 \in \{t_k\}$  arbitrariamente. Dato  $\tau_j, j \geq 1$ , si pone

$$\tau_{j+1} = \min_{k \in \mathbb{N}} \{t_k : t_k > \tau_j + a_j\}. \quad (16.11)$$

Tale definizione ha senso poiché, per definizione di limite, per ogni  $M > 0$  esiste  $k_0$  tale che  $\forall k > k_0$  si ha  $t_k > M$ : fissato  $j$  basta quindi scegliere  $M = \tau_j + a_j$ . Infine per il lemma 16.10 la sottosuccessione  $\{\tau_j\}$  è divergente. ■

**16.14.** COROLLARIO. *Data una successione reale  $\{t_k\}$  monotona divergente, per ogni  $a > 0$  esiste una sottosuccessione  $\{t_{k_j}\}$  monotona divergente tale che  $|t_{k_{j+1}} - t_{k_j}| > a \forall j \in \mathbb{N}$ .*

**16.15.** *Dimostrazione del corollario 16.14.* Si scelga  $a_k = a \forall k$  nel lemma 16.12. ■

**16.16.** LEMMA. *Date due successioni reali divergenti  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$ , esistono sempre due sottosuccessioni  $\{s_{k_j}\}$  e  $\{t_{k_j}\}$  tali che  $t_{k_j} < s_{k_j} < t_{k_{j+1}} \forall j \in \mathbb{N}$ .*

**16.17.** *Dimostrazione del lemma 16.16.* Definiamo induttivamente le due sottosuccessioni  $\{\tau_j\} = \{t_{k_j}\}$  e  $\{\sigma_j\} = \{s_{k_j}\}$  nel modo seguente. Si fissa  $\tau_1$  arbitrariamente. Dato  $\tau_j, j \geq 1$ , si definiscono

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \min_{k \in \mathbb{N}} \{s_k : s_k > \tau_j\}, \\ \tau_{j+1} &= \min_{k \in \mathbb{N}} \{t_k : t_k > \sigma_j\}, \end{aligned} \quad (16.12)$$

che hanno senso poiché e due successioni  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$  divergono. Per il lemma 16.10 le sottosuccessioni  $\{\tau_j\}$  e  $\{\sigma_j\}$  sono divergenti. ■

**16.18.** Gli insiemi limite godono di alcune semplici proprietà, che saranno utili nel seguito. Le enunceremo (e dimostreremo) nel caso degli insiemi  $\omega$ -limite; i risultati valgono in ogni caso anche per gli insiemi  $\alpha$ -limite (e le dimostrazioni sono del tutto analoghe).

**16.19. Proprietà degli insiemi  $\omega$ -limite.** Dato  $x \in \mathbb{R}^n$ , se l'insieme  $L_\omega(x)$  è non vuoto allora

- (1)  $L_\omega(x)$  è chiuso;
- (2)  $L_\omega(x)$  è invariante;
- (3) se  $L_\omega(x)$  è compatto, allora  $L_\omega(x)$  è connesso;
- (4) se  $y \in L_\omega(x)$  e  $y_1 \in L_\omega(y)$ , allora  $y_1 \in L_\omega(x)$ ;
- (5) se  $y \in L_\omega(x)$  ed esiste una funzione  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che  $W(x) \geq 0$  e  $\dot{W}(x) \leq 0$  per ogni  $x$  appartenente a un aperto contenente  $y$  in cui si svolga il moto, allora  $\dot{W}(y) = 0$ .

**16.20. Dimostrazione della proprietà (1) di §16.19.** Dobbiamo dimostrare che se  $\{y_n\}$  è una successione di punti  $y_n \in L_\omega(x)$  che converge a un punto  $y$ , allora  $y \in L_\omega(x)$ .

Per definizione di limite: per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0$  tale che, per ogni  $n > n_0$ ,  $|y_n - y| < \varepsilon$ .

Per ogni  $n$ , per definizione di insieme  $\omega$ -limite: per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $k_0(n)$  tale che, per ogni  $k > k_0(n)$ ,  $|\varphi(t_k^{(n)}, x) - y_n| < \varepsilon$ .

Quindi, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0$  tale che, per ogni  $n > n_0$  e per ogni  $k > k_0(n)$ , si ha

$$|\varphi(t_k^{(n)}, x) - y| \leq |\varphi(t_k^{(n)}, x) - y_n| + |y_n - y| < 2\varepsilon. \quad (16.13)$$

Poiché il valore di  $k$  dipende da  $n$ , la successione  $\{\tau_n\} \equiv \{t_k^{(n)}\}$  definisce una successione divergente; prendendo eventualmente una sottosuccessione di  $\tau_n$  otteniamo una successione crescente che tende all'infinito e quindi segue l'asserto. ■

**16.21. Dimostrazione della proprietà (2) di §16.19.** Sia  $y \in L_\omega(x)$  e sia  $\{t_k\}$  la successione di tempi tali che  $|\varphi(t_k, x) - y| \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ . Consideriamo la successione  $\varphi(t_k + t, x)$ : si ha  $\varphi(t_k + t, x) = \varphi(t, \varphi(t_k, x))$ , che implica, per il teorema 11.6 (teorema della dipendenza continua dai dati iniziali),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(t_k + t, x) - \varphi(t, y)| = 0, \quad (16.14)$$

così che esiste una successione  $\{\tau_k\} = \{t_k + t\}$  tale che  $|\varphi(\tau_k, x) - \varphi(t, y)| \rightarrow 0$ , e quindi  $\varphi(t, y) \in L_\omega(x)$ . ■

**16.22. Dimostrazione della proprietà (3) di §16.19.** Dimostriamo preliminarmente che se  $L_\omega(x)$  è compatto il moto  $\varphi(t, x)$  si mantiene in una regione limitata, *i.e.* esiste un compatto  $B$  tale che  $\varphi(t, x) \in B \forall t > 0$ .

La dimostrazione si farà per assurdo assumendo che ciò non accada. Fissiamo innanzitutto  $y \in L_\omega(x)$ . Sia  $A(r)$  la chiusura dell'intorno  $B_r(y)$  di raggio  $r$  e centro in  $y$ : scegliamo  $R$  tale che  $L_\omega(x) \subset A(R)$  (questo è possibile poiché  $L_\omega$  è compatto e quindi limitato). Consideriamo anche gli insiemi  $A(R + \varepsilon)$  e  $A(R + 2\varepsilon)$  e poniamo  $\Delta A_\varepsilon = A(R + 2\varepsilon) - A(R + \varepsilon)$ .

Per l'assunzione fatta per assurdo, dovrebbe esistere, comunque si fissi un compatto  $B$ , un tempo  $t$  tale che  $\varphi(t, x) \notin B$ . Non solo: poiché, dato  $y \in L_\omega(x)$ , esiste una successione  $t_k$  tale che  $\varphi(t_k, x) \rightarrow y$ , allora per ogni  $t_k$  dovrebbe esistere un tempo  $\Delta t_k$  tale che  $\varphi(t_k + \Delta t_k, x) \in \Delta A_\varepsilon$ . Infatti, se così non fosse, allora esisterebbe un tempo  $t_{\bar{k}}$  tale che  $\varphi(t_{\bar{k}} + t, \varepsilon) \in A(R + \varepsilon)$  per ogni  $t \geq 0$ : ma allora, poiché  $[0, t_{\bar{k}}]$  è compatto (in  $\mathbb{R}$ ), esisterebbe

$$M = \max_{t \in [0, t_{\bar{k}}]} |\varphi(t, x) - y|, \quad (16.15)$$

così che  $\varphi(t, x) \in A(M)$  per  $t \in [0, t_{\bar{k}}]$  e, poiché  $\varphi(t, x) \in A(R + \varepsilon)$  per ogni  $t \geq t_{\bar{k}}$ , seguirebbe che  $\varphi(t, x) \in A(\rho)$ , con  $\rho = \max\{M, R + \varepsilon\}$ , per ogni  $t > 0$ . Quindi se  $B = A(\rho)$  si avrebbe  $\varphi(t, x) \in B \forall t > 0$ , contro l'assunzione fatta.

Consideriamo dunque la successione  $\varphi(t_k + \Delta t_k, x) \in \Delta A_\varepsilon$ . Poiché la successione  $\{t_k\}$  tende all'infinito, si può considerare la successione  $\{\tau_k\} = \{t_k + \Delta t_k\}$ : passando eventualmente a una sottosuccessione, risulta che  $\{\tau_k\}$  è crescente (per il lemma 16.12) con  $a_k = \Delta t_k$  e tende all'infinito e si ha  $\varphi(\tau_k, x) \in \Delta A_\varepsilon$  per costruzione. Poiché  $\Delta A_\varepsilon \subset A(R + 2\varepsilon)$  esiste una (ulteriore) sottosuccessione di  $\{\tau_k\}$  (che continuiamo a indicare con lo stesso simbolo per semplicità notazionale) tale che esiste

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\tau_k, x) = y_0, \quad (16.16)$$

e quindi deve essere  $y_0 \in L_\omega(x)$  e  $y_0 \in \Delta A_\varepsilon$ , contro l'ipotesi che fosse  $L_\omega(x) \subset A(R)$ . Si è quindi trovato un assurdo: perciò  $\varphi(t, x)$  deve rimanere dentro  $A(R + \varepsilon)$  per ogni  $t$  sufficientemente grande, ovvero esiste un compatto  $B$  tale che  $\varphi(t, x) \in B$  per ogni  $t \geq 0$ .

Dimostriamo ora che se  $L_\omega(x)$  è compatto, allora, per quanto appena visto, segue che  $L_\omega(x)$  è connesso. Ricordiamo che un insieme si dice *connesso* se non può essere diviso in due sottoinsiemi non vuoti tali che ogni sottoinsieme non abbia alcun punto in comune con la chiusura dell'altro.

Dobbiamo dimostrare dunque che non è possibile trovare due aperti disgiunti  $U_1$  e  $U_2$  la cui unione contenga  $L_\omega(x)$ . Supponiamo per assurdo che questo sia possibile. Allora esistono due punti  $y_1, y_2 \in L_\omega(x)$ , tali che  $y_1 \in U_1$  e  $y_2 \in U_2$ . Inoltre esistono due successioni  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$  tali che  $|\varphi(t_k, x) - y_1| \rightarrow 0$  e  $|\varphi(s_k, x) - y_2| \rightarrow 0$ , per  $k \rightarrow \infty$ . Prendendo eventualmente sottosuccessioni possiamo supporre che sia  $t_k < s_k < t_{k+1} \forall k$  (per il lemma 16.16). Consideriamo quindi le curve  $C_k$  descritte dalla traiettoria  $\varphi(t, x)$  per  $t \in [t_k, s_k]$ :

$$C_k \equiv \{\varphi(t, x) : t_k \leq t \leq s_k\}. \quad (16.17)$$

Si può allora determinare una successione di punti  $z_k \in C_k$  tali che  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z \notin U_1 \cup U_2$  (è sufficiente utilizzare il fatto che  $|\varphi(t_k, x) - y_1| \rightarrow 0$  e  $|\varphi(s_k, x) - y_2| \rightarrow 0$  e la continuità delle traiettorie per concludere che si può scegliere una successione  $z_k \notin U_1 \cup U_2$  e la compattezza del dominio  $B$  in cui si svolge il moto  $\varphi(t, x)$  per concludere che ne esiste il limite  $z \notin U_1 \cup U_2$ ). Poiché  $z_k = \varphi(\tau_k, x)$  per qualche successione  $\tau_k$ , ne segue che  $z \in L_\omega(x)$ . ■

**16.23. Osservazione.** L'ipotesi di limitatezza è fondamentale per dimostrare che un insieme limite è connesso. Si possono infatti immaginare situazioni in cui un insieme  $\omega$ -limite sia illimitato e sconnesso. Si consideri per esempio un sistema dinamico definito in una striscia verticale

$$\mathcal{J} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}. \quad (16.18)$$

Si supponga che l'origine  $(0, 0)$  sia una sorgente di traiettorie che si allontanano ruotando intorno all'origine in modo tale da avvicinarsi sempre più a  $x = \pm 1$  per  $y = 0$  e allontanarsi sempre più nella direzione verticale, verso  $y = \pm\infty$ , per  $x = 0$ . Sotto tali condizioni le rette  $x = \pm 1$  costituiscono l'insieme  $\omega$ -limite di ogni punto  $z \in \mathcal{J}$  e quindi  $\forall z \in \mathcal{J}$

$$L_\omega(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y \in \mathbb{R}\} \quad (16.19)$$

è dato dall'unione di due insiemi sconnessi; cfr. la figura 16.2.

**16.24. Dimostrazione della proprietà (4) di §16.19.** la proprietà (4) è una conseguenza delle proprietà (1) e (2). Infatti, poiché  $y_1 \in L_\omega(y)$ , esiste una successione  $\{t_k\}$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(t_k, y) - y_1| = 0$ : per la proprietà (2) si ha  $\varphi(t_k, y) \in L_\omega(x)$ , e per la proprietà (1) deve essere allora  $y_1 \in L_\omega(x)$ . ■

**16.25. Osservazione.** Dato un insieme  $A$  definiamo l'insieme  $\omega$ -limite di  $A$  come l'insieme

$$L_\omega(A) = \bigcup_{x \in A} L_\omega(x). \quad (16.20)$$

Allora possiamo enunciare la proprietà (4) di §16.19 dicendo che si ha  $L_\omega(L_\omega(x)) = L_\omega(x)$ . Un analogo discorso si può fare per gli insiemi  $\alpha$ -limite:  $L_\alpha(L_\alpha(x)) = L_\alpha(x)$ .

**16.26. Dimostrazione della proprietà (5) di §16.19.** Supponiamo per assurdo che  $\dot{W}(y) \neq 0$ ; allora, poiché  $\dot{W} \leq 0$ , deve essere  $\dot{W}(y) = -c$ , con  $c > 0$ . La funzione  $W$  è continua: quindi esiste un intorno  $B_\varepsilon(y)$  tale che  $\dot{W}(z) < -c/2$  per ogni  $z \in B_\varepsilon(y)$ .

Poiché  $y \in L_\omega(x)$ , dalla definizione di insieme  $\omega$ -limite segue che, dato  $\delta > 0$  (con  $\delta < \varepsilon$ ), esiste un  $k_0$  tale che  $\varphi(t_k, x) \in B_\delta(y)$  per ogni  $k > k_0$ ; cfr. la figura 16.3.

Definiamo

$$\beta \equiv \beta(\delta, \varepsilon) = \min_{z \in \partial B_\delta(y)} \{ |t| : \varphi(t, z) \in \partial B_\varepsilon(y) \}. \quad (16.21)$$



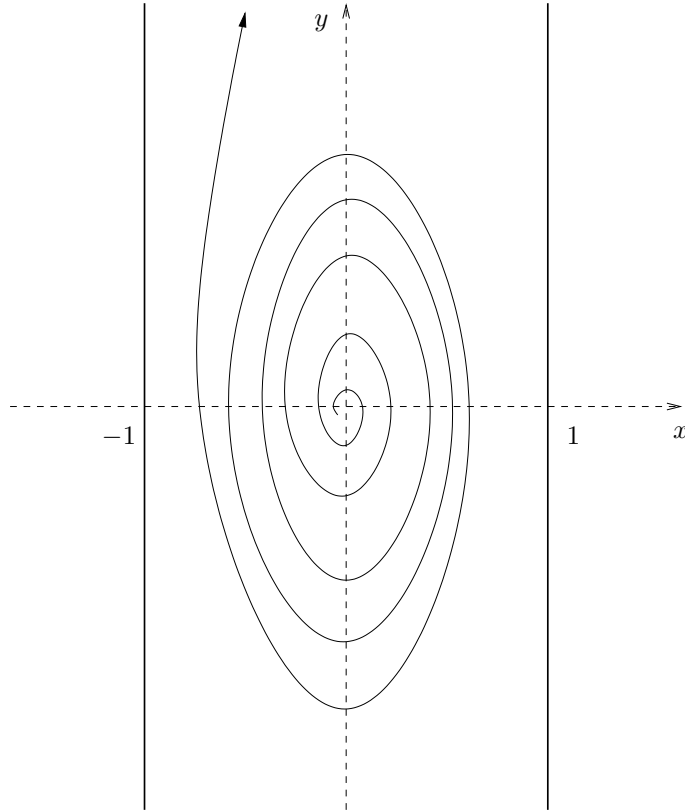


FIGURA 16.2. Insieme  $\omega$ -limite per il sistema discusso nell'osservazione 16.23. Tutte le traiettorie con dato iniziale  $(x, y)$  in  $\mathcal{J} \setminus \{(0, 0)\}$ , con  $-1 < x < 1$ , con  $\mathcal{J}$  dato dalla (16.18), tendono ad avvicinarsi sempre di più alle rette  $x = \pm 1$ , che quindi costituiscono un insieme  $\omega$ -limite sconnesso.

Essendo il campo vettoriale  $f$  regolare, si ha  $\beta > 0$  ( $\beta$  può essere  $\beta$  infinito, se  $\varphi(t, z)$  non raggiunge mai  $\partial B_\varepsilon(y)$ , ma non può essere nullo). Quindi  $\varphi(t_k + \sigma, x) \in B_\varepsilon(y)$  per ogni  $|\sigma| \leq \beta$  (e per ogni  $k > k_0$ ).

Supponiamo che sia  $\beta < \infty$  (altrimenti nella discussione che segue sostituiamo  $\beta$  con 1).

Prendendo eventualmente una sottosuccessione di  $\{t_k\}$  (sfruttando il fatto che  $t_k \rightarrow \infty$  e applicando il corollario 16.14 con  $a > 2\beta$ ), possiamo supporre che gli intervalli  $I_k = [t_k - \beta, t_k + \beta]$  siano disgiunti; definiamo anche  $I = \cup_{k > k_0} I_k$ ; cfr. la figura 16.4.

Consideriamo ora la differenza

$$W(\varphi(T, x)) - W(x), \quad T \rightarrow \infty. \tag{16.22}$$

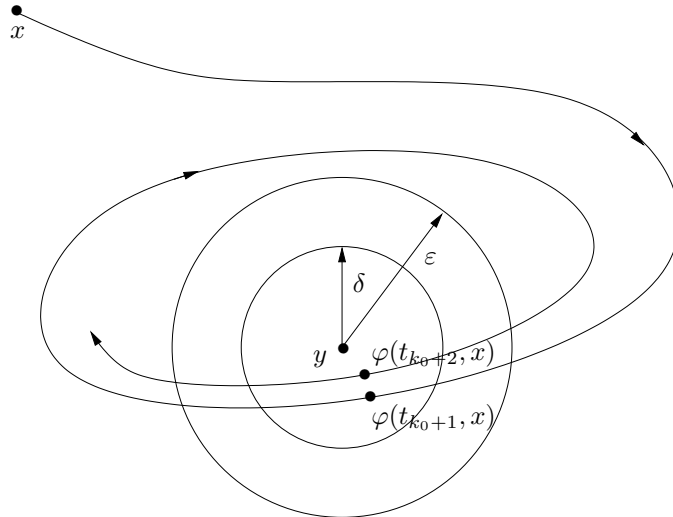


FIGURA 16.3. Scenario previsto nella discussione della proprietà (5) degli insiemi  $\omega$ -limite. I punti  $\varphi(t_k, x)$  sono contenuti all'interno dell'intorno  $B_\delta(y)$  per  $k > k_0$  e si ha  $\dot{W}(z) < -c/2$  per ogni  $z \in B_\varepsilon(y)$ .

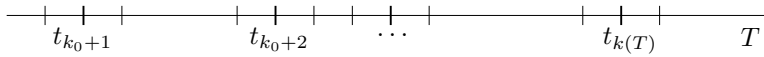


FIGURA 16.4. L'insieme  $I$  dato dall'unione degli intervalli  $I_k$ , con  $k_0 < k \leq k(T)$ .

Poiché  $\dot{W}(x) \leq 0$  nella regione in cui si svolge il moto (per ipotesi), si ha

$$\begin{aligned} W(\varphi(T, x)) - W(x) &= \int_0^T ds \frac{dW(\varphi(s, x))}{ds} \\ &\leq \int_{[0, T] \cap I} ds \frac{dW(\varphi(s, x))}{ds} < -\frac{c}{2} |[0, T] \cap I|, \end{aligned} \tag{16.23}$$

dove  $|[0, T] \cap I|$  indica la misura dell'insieme  $[0, T] \cap I$ , *i.e.*  $|[0, T] \cap I| = 2\beta[K(T) - k_0]$ , se  $K(T)$  è il numero di intervalli  $I_k$  tali che  $t_k < T$ ; quindi  $K(T)$  è l'intero tale che  $t_{K(T)} \leq T < t_{K(T)+1}$  (cfr. la figura 16.4). Per  $T \rightarrow \infty$ ,  $k(T) \rightarrow \infty$ , così che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (W(\varphi(T, x)) - W(x)) = -\infty, \tag{16.24}$$

che è in contraddizione con l'ipotesi che la funzione  $W$  fosse  $W \geq 0$ . ■

**16.27. Osservazione.** L'idea della dimostrazione del paragrafo §16.26 è la seguente. Se (come si suppone per assurdo)  $\dot{W}(y) < 0$ , ogni qual volta la traiettoria passa vicino

a  $y$ , la funzione  $W$  diminuisce con velocità di decrescita maggiore di un valore strettamente positivo  $c/2$ , mentre, quando è lontana, sappiamo che non può aumentare (perché  $\dot{W} \leq 0$  in generale). Poiché la traiettoria passa vicino a  $y$  infinite volte (essendo  $y \in L_\omega(x)$ ) e ogni volta  $W$  diminuisce di una quantità finita e non nulla, ne segue che  $W$  deve diminuire di una quantità infinita, cioè deve tendere a  $-\infty$ , contro l'ipotesi che fosse positiva.

**16.28. Osservazione.** Se  $\beta = \infty$ , invece che nel modo indicato nel paragrafo §16.26, si può più semplicemente procedere nel modo seguente. Se  $\beta = \infty$  allora  $\varphi(t, \bar{x}) \in B_\varepsilon(y) \forall \bar{x} \in B_\delta(y)$ : quindi in luogo della (16.23) abbiamo S

$$W(\varphi(T, x)) - W(x) = \int_0^T ds \frac{dW(\varphi(s, x))}{ds} < -\frac{c}{2}T, \quad (16.25)$$

da cui segue immediatamente la (16.24).

**16.29.** Nel caso di sistemi dinamici non autonomi la (16.1) va sostituita con

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (16.26)$$

dove  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$  dipendente esplicitamente dal tempo.

**16.30. Sistemi meccanici.** Un *sistema meccanico* è descritto dall'equazione

$$A\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t), \quad (16.27)$$

che prende il nome di *equazione di Newton*, dove

- (1)  $q \in \mathbb{R}^\ell$ ,
- (2)  $A$  è una matrice  $\ell \times \ell$  simmetrica invertibile definita positiva (*matrice di massa*) e
- (3)  $F: \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$  (*forza*).

Tale sistema si può rappresentare nella forma (16.26): introducendo la variabile  $y = \dot{q}$ , si ottiene

$$\begin{cases} \dot{q} = A^{-1}y, \\ \dot{y} = F(q, y, t), \end{cases} \quad (16.28)$$

che è appunto della forma (16.26) con  $x = (q, y)$  e  $f(x, \dot{x}, t) = (A^{-1}y, F(q, y, t))$ .

Un *sistema meccanico conservativo* è descritto dall'equazione

$$A\ddot{q} = F(q), \quad F(q) = -\nabla V(q), \quad (16.29)$$

dove

- (1)  $q \in \mathbb{R}^\ell$ ,
- (2)  $V: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^2$  (*energia potenziale*) e  $F$  è la forza corrispondente,

- (3)  $A$  è una matrice  $\ell \times \ell$  simmetrica invertibile definita positiva e  
 (4)  $\nabla \equiv \partial/\partial q = (\partial/\partial q_1, \dots, \partial/\partial q_n)$ .

Tale sistema si può rappresentare come un sistema dinamico della forma (16.1): è sufficiente definire  $x \equiv (q, y) = (q, A\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ , con  $n = 2\ell$ , e  $f = (A^{-1}y, F(q))$ , per ottenere

$$\begin{cases} \dot{q} = A^{-1}y, \\ \dot{y} = F(q), \end{cases} \quad (16.30)$$

che, espressa in termini delle coordinate  $x$ , è appunto della forma (16.1), con  $f(x) = (A^{-1}y, F(q))$ . Si noti che l'energia (o energia totale)

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle + V(q), \quad (16.31)$$

è una costante del moto (cfr. il paragrafo §16.2). Chiameremo *energia cinetica* il primo termine nel membro di destra della (16.31): quindi l'energia (totale), nel caso di un sistema meccanico conservativo, è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

Più in generale definiremo *sistema meccanico conservativo* un sistema meccanico la cui *energia* è della forma

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + V(q), \quad (16.32)$$

dove  $A = A(q)$  è una matrice  $\ell \times \ell$  simmetrica definita positiva invertibile e di classe  $C^2$  nel suo argomento.

È facile verificare che, per il sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = A^{-1}(q)y, \\ \dot{y} = 2^{-1} \langle A^{-1}(q)y, (\nabla A(q)) A^{-1}(q)y \rangle + F(q), \end{cases} \quad (16.33)$$

la (16.32) è una costante del moto.

Infatti, poiché  $A^{-1}(q)A(q) = \mathbb{1}$ , si ha

$$\nabla (A^{-1}(q)A(q)) = (\nabla A^{-1}(q)) A(q) + A^{-1}(q) (\nabla A(q)) = 0, \quad (16.34)$$

così che

$$\nabla A^{-1}(q) = -A^{-1}(q) (\nabla A(q)) A^{-1}(q), \quad (16.35)$$

e, essendo  $A$  simmetrica, anche  $A^{-1}$  è simmetrica e quindi

$$\langle y, A^{-1}(q)B(q)y \rangle = \langle A^{-1}(q)y, B(q)y \rangle, \quad (16.36)$$

per ogni  $B(q) \in L(E)$ ; dalle (16.34) e (16.35) segue che la (16.32) è una costante del moto, come anticipato.

Un punto d'equilibrio per il sistema meccanico conservativo (16.29) (o (16.32)) è dato da  $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$  dove  $q_0$  è un estremo della funzione  $V(q)$ , così che  $F(q_0) = 0$ .

**16.31. Osservazione.** Dato un sistema della forma (16.1), con  $x \in \mathbb{R}^n$ , le traiettorie sono curve (di classe  $C^2$ ) in  $\mathbb{R}^n$ . Il campo vettoriale  $f$  è ovviamente tangente alla traiettoria in ogni suo punto.

Data una funzione  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si possono considerare le superfici di livello  $W(x) = c$ , al variare di  $c \in \mathbb{R}$ ; cfr. la (16.7). In generale le superfici di livello di una generica funzione  $W$  non hanno alcuna relazione con le traiettorie. Tuttavia se  $W$  è una costante del moto, *i.e.* se  $W$  assume valori costanti lungo le traiettorie del sistema (16.1), allora le traiettorie sono contenute nelle superfici di livello (un esempio può essere un sistema meccanico conservativo in cui la funzione  $W$  è l'energia totale; cfr. la (16.31) nel paragrafo §16.30).

## 17. Linearizzazione

**17.1. Introduzione.** In alcuni casi, per studiare il comportamento qualitativo del flusso di un sistema dinamico nelle vicinanze di un punto d'equilibrio, in particolare per discutere la stabilità del punto d'equilibrio stesso, è sufficiente studiare il sistema dinamico che si ottiene linearizzando il campo vettoriale nell'intorno del punto d'equilibrio (cfr. il paragrafo §17.2 per una definizione più precisa).

Vedremo che non sempre questo è possibile: quando lo è, tuttavia, vuol dire che disponiamo di un metodo semplice per determinare se un punto d'equilibrio sia stabile o no, e per descrivere qualitativamente le traiettorie che si originano da dati iniziali sufficientemente vicini al punto d'equilibrio.

**17.2.** Sia  $x_0$  un punto d'equilibrio per il sistema dinamico (16.1). Poiché  $f$  è di classe  $C^1$ , e  $f(x_0) = 0$ , possiamo scrivere

$$\dot{x} = A(x - x_0) + Q(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|Q(x)|}{|x - x_0|} = 0, \quad (17.1)$$

dove  $A$  è la matrice  $n \times n$  di elementi  $A_{ij} = [\partial f_i / \partial x_j](x_0)$  e  $Q(x)$  è un infinitesimo di ordine superiore al primo rispetto a  $|x - x_0|$  (cfr. l'esercizio 6).

Il sistema

$$\dot{x} = A(x - x_0), \quad (17.2)$$

che si ottiene da (17.1) trascurando la correzione  $Q(x)$  alla parte lineare si chiama *sistema linearizzato* del sistema (16.1) nell'intorno del punto d'equilibrio  $x_0$ .

**17.3. LEMMA.** Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione non negativa di classe  $C^1$ . Se

$$\frac{dg}{dt} \leq \kappa g, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17.3)$$

**134** CAPITOLO 4. ANALISI QUALITATIVA DEL MOTO E STABILITÀ

per qualche costante  $\kappa$ , allora

$$g(t) \leq e^{\kappa t} g(0), \quad (17.4)$$

per ogni  $0 \leq t \leq T$ .

**17.4.** *Prima dimostrazione del lemma 17.3.* Se  $g(0) = 0$ , allora  $g(t) = 0$  per ogni  $0 \leq t \leq T$ , poiché  $g$  è non negativa e la sua derivata in  $t = 0$  è nulla. In tal caso quindi la (17.4) è ovviamente soddisfatta.

Se  $g(t) \neq 0$  per ogni  $t \in [0, T]$ , allora, dividendo la (17.3) per  $g$  membro a membro, integrando e quindi esponenziando, otteniamo la (17.4).

Se esiste un valore

$$t_0 = \inf\{t \in [0, T] : g(t_0) = 0\}, \quad (17.5)$$

allora per  $0 \leq t < t_0$  possiamo ragionare come sopra e otteniamo la (17.4) per  $0 \leq t < t_0$ . Per  $t \geq t_0$  possiamo applicare l'argomento dato nel caso  $g(0) = 0$ , semplicemente per  $t \in [t_0, T]$  anziché per  $t \in [0, T]$  e di nuovo si trova  $g(t) = 0$  per ogni  $t \in [t_0, T]$ , così che la (17.4) risulta valida anche per  $t \in [t_0, T]$ . ■

**17.5.** *Seconda dimostrazione del lemma 17.3.* Moltiplicando entrambi i membri della (17.3) per  $e^{-\kappa t}$  otteniamo

$$\frac{d}{dt} (g(t) e^{-\kappa t}) \leq 0, \quad (17.6)$$

che, integrata tra 0 e  $t$ , dà

$$g(t) e^{-\kappa t} - g(0) \leq 0, \quad (17.7)$$

da cui segue immediatamente la (17.4). ■

**17.6.** *Terza dimostrazione del lemma 17.3.* Si noti che, integrando tra 0 e  $t$  la (17.3) si ottiene

$$g(t) \leq g(0) + \kappa \int_0^t ds g(s), \quad (17.8)$$

così che la (17.4) segue dal lemma di Gronwall 11.2. ■

**17.7.** LEMMA. *Dato uno spazio vettoriale  $E$ , sia  $T \in L(E)$ . Se esistono due costanti  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che*

$$\alpha < \operatorname{Re} \lambda < \beta, \quad (17.9)$$

*per ogni autovalore  $\lambda \in \Sigma(T)$ , allora esiste una base in  $E$  tale che nel prodotto scalare corrispondente si ha*

$$\alpha |x|^2 \leq \langle x, Tx \rangle \leq \beta |x|^2, \quad (17.10)$$

*per ogni  $x \in E$ .*

**17.8.** *Dimostrazione del lemma 17.7.* Consideriamo prima il caso in cui  $T$  sia semisemplice. Possiamo allora scrivere  $E$  come somma diretta

$$E = E_{a_1} \oplus \dots \oplus E_{a_r} \oplus E_{b_1} \oplus \dots \oplus E_{b_s}, \quad (17.11)$$

dove  $E_{ai}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , è l'autospazio unidimensionale generato dall'autovettore  $e_i$  di  $T$  associato all'autovalore reale  $\lambda_i$ , mentre  $E_{bj}$ ,  $j = 1, \dots, s$ , è l'autospazio bidimensionale generato dagli autovettori reali  $v_j, u_j$  di  $T$  associati agli autovalori complessi coniugati  $\mu_j = a_j + ib_j$  e  $\bar{\mu}_j = a_j - ib_j$ , in cui  $T|_{E_{bj}}$  ha la forma

$$\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}. \quad (17.12)$$

Per ipotesi si ha

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \lambda_i \leq \beta, & i &= 1, \dots, r, \\ \alpha &\leq a_j \leq \beta, & j &= 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Si scelga in  $E$  la base

$$\{f_1, \dots, f_{r+2s}\} = \{e_1, \dots, e_r, v_1, u_1, \dots, v_s, u_s\} \quad (17.14)$$

e il prodotto scalare definito da

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= \langle v_i, v_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}, \\ \langle e_i, v_j \rangle &= \langle e_i, u_j \rangle = \langle v_i, u_j \rangle = 0, \end{aligned} \quad (17.15)$$

per ogni valore degli indici  $i$  e  $j$  compatibile con la (17.14) (si verifica immediatamente che la (17.15) definisce effettivamente un prodotto scalare; cfr. l'esercizio 7).

Si può anche verificare, per calcolo diretto, che risulta cfr. l'esercizio 8)

$$\begin{aligned} \langle e_i, Te_j \rangle &= \lambda_i \delta_{ij}, \\ \langle v_i, Tv_j \rangle &= \langle u_i, Tu_j \rangle = a_i \delta_{ij}, \\ \langle v_i, Tu_j \rangle &= -\langle u_i, Tv_j \rangle = b_i \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Si ha allora, per ogni  $x \in E$ ,

$$x = \sum_{i=1}^{r+2s} x_i f_i = \sum_{i=1}^r x_i e_i + \sum_{j=1}^s (x_{r+2j-1} v_j + x_{r+2j} u_j), \quad (17.17)$$

così che, utilizzando le (17.16),

$$\langle x, Tx \rangle = \sum_{i,j=1}^{r+2s} x_i x_j \langle f_i, Tf_j \rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + \sum_{j=1}^s a_j (x_{r+2j-1}^2 + x_{r+2j}^2). \quad (17.18)$$

In virtù dell'ipotesi (17.9) si ha quindi

$$\alpha \sum_{i=1}^{r+2s} x_i^2 < \langle x, Tx \rangle < \beta \sum_{i=1}^{r+2s} x_i^2, \quad (17.19)$$

che è appunto la (17.10).

Se  $T$  non è semisemplice, allora esiste una base in cui è in forma canonica reale: in tale base è rappresentato da una matrice costituita da blocchi come nelle formule (4.1), con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e (4.4) del capitolo 1.

Lo spazio vettoriale  $E$  sarà dato dalla somma diretta di autospazi  $E_k$  tali che la restrizione  $T|_{E_k}$  è rappresentato nella base scelta da uno dei blocchi considerati. Basterà quindi dimostrare che per ognuno di tali blocchi il lemma è verificato.

Consideriamo blocchi della forma (4.1); per gli altri si ragiona in modo assolutamente analogo.

Sia quindi  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base di  $E_k$  in cui  $T|_{E_k}$  è rappresentato dalla matrice  $A = S + N$ , con  $S = \lambda_k \mathbf{1} \in M(k)$  e  $N \in M(k)$  data da

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17.20)$$

I vettori  $e_1, \dots, e_n$  sono autovettori di  $S$  (con autovalore  $\lambda_k$ ) e si ha

$$\begin{cases} Ne_1 = e_2, \\ Ne_2 = e_3, \\ \dots\dots\dots \\ Ne_{n-1} = e_n, \\ Ne_n = 0, \end{cases} \quad (17.21)$$

così che, per  $\varepsilon > 0$ ,

$$\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}, \quad \bar{e}_j = \frac{e_j}{\varepsilon^{j-1}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (17.22)$$

è ancora una base costituita da autovettori di  $S$  e si ha

$$\begin{cases} N\bar{e}_1 = \varepsilon\bar{e}_2, \\ N\bar{e}_2 = \varepsilon\bar{e}_3, \\ \dots\dots\dots \\ N\bar{e}_{n-1} = \varepsilon\bar{e}_n, \\ N\bar{e}_n = 0, \end{cases} \quad (17.23)$$

Quindi nella base  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  l'operatore  $T|_{E_k}$  è rappresentato da una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon & \lambda_k \end{pmatrix}. \quad (17.24)$$

Se  $\langle x, y \rangle_\varepsilon$  indica il prodotto scalare nella base  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ , si ha per continuità

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle x, T|_{E_k} x \rangle_\varepsilon = \langle x, Sx \rangle, \quad (17.25)$$



se  $S$  è la matrice diagonale  $S = \lambda_k \mathbb{1}$  e  $\langle x, y \rangle$  indica il prodotto scalare nella base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Si può quindi scegliere  $\varepsilon$  così piccolo che nella base  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  la disuguaglianza

$$\alpha |x|_\varepsilon^2 \leq \langle x, T|E_k x \rangle_\varepsilon \leq \beta |x|_\varepsilon^2, \quad (17.26)$$

con  $|x|_\varepsilon^2 = \langle c, x \rangle_\varepsilon$ , sia soddisfatta per ogni  $x \in E_k$ . ■

**17.9. TEOREMA.** *Sia (17.2) il sistema linearizzato del sistema dinamico (16.1) nell'intorno del punto d'equilibrio  $x_0$ . Se  $\operatorname{Re} \lambda < -c$ , con  $c > 0$ , per ogni autovalore  $\lambda$  della matrice  $A$ , allora esiste un intorno  $B(x_0)$  tale che*

- (1) per ogni  $\bar{x} \in B(x_0)$ ,  $\varphi(t, \bar{x})$  è definito e in  $B(x_0)$  per ogni  $t \geq 0$ ;
- (2) esiste una costante  $C_0$  tale che

$$|\varphi(t, \bar{x}) - x_0| \leq C_0 e^{-ct/2} |\bar{x} - x_0|, \quad \forall t \geq 0, \forall \bar{x} \in B(x_0), \quad (17.27)$$

dove  $|\cdot|$  denota la norma euclidea. Quindi in particolare  $x_0$  è asintoticamente stabile.

**17.10. Dimostrazione del teorema 17.9.** Supponiamo che sia  $x_0 = 0$  (questo non è restrittivo: in caso contrario basta definire un cambio di variabili  $x \rightarrow x - x_0$ ). Se  $\operatorname{Re} \lambda < -c$  per ogni autovalore  $\lambda$  di  $A$ , allora per il lemma 17.7 è possibile scegliere una base tale che, nel corrispondente prodotto scalare, si abbia

$$\langle x, Ax \rangle \leq -c|x|^2, \quad (17.28)$$

dove  $|x|^2 = \langle x, x \rangle$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  si può scegliere  $\delta > 0$  tale che per  $|x| < \delta$  si ha  $|Q(x)| < \varepsilon|x|$  (cfr. la (17.1)). In particolare si può scegliere  $\varepsilon < c/2$ , così che, prendendo il prodotto scalare di entrambi i membri della (17.1) con  $x$ , utilizzando la (17.28) e stimando  $\langle x, Q(x) \rangle$  tramite la disuguaglianza di Schwarz (cfr. la nota bibliografica),  $|\langle x, Q(x) \rangle| \leq |x| |Q(x)|$ , si ottiene

$$\langle x, \dot{x} \rangle \leq -c|x|^2 + \varepsilon|x|^2 \leq -\frac{c}{2}|x|^2. \quad (17.29)$$

Se indichiamo al solito con  $\varphi(t, \bar{x})$  la soluzione di (16.1) con dato iniziale  $\bar{x}$ , tenendo conto che  $2 \langle x, \dot{x} \rangle = d|x|^2/dt$  e utilizzando il lemma 17.3 con  $g(t) = |\varphi(t, \bar{x})|^2$ , otteniamo dalla (17.29)

$$|\varphi(t, \bar{x})| \leq e^{-ct/2} |\bar{x}|, \quad (17.30)$$

per ogni  $t$  per cui  $\varphi(t, \bar{x})$  è definita. Quindi in particolare  $|\varphi(t, \bar{x})| \leq |\bar{x}|$ , così che  $\varphi(t, \bar{x}) \in B(x_0)$  se  $\bar{x} \in B(x_0)$ . Inoltre  $\varphi(t, \bar{x})$  deve essere sempre all'interno dell'insieme compatto  $\overline{B(x_0)}$  e quindi è definita per ogni  $t \geq 0$ , per il corollario 12.23 (corollario al teorema del prolungamento). Da qui segue che si ha

$$|\varphi(t, \bar{x}) - x_0| \leq e^{-ct/2} |\bar{x} - x_0|, \quad \forall t \geq 0, \forall \bar{x} \in B(x_0), \quad (17.31)$$

e, per l'equivalenza delle norme in  $\mathbb{R}^n$  (cfr. l'esercizio 4) esiste una costante  $C_0$  tale che valga la (17.27), dove ora  $|\cdot|$  è la norma euclidea. ■

**17.11. LEMMA.** *Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione positiva di classe  $C^1$ . Se*

$$\frac{dg}{dt} \geq \kappa g, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17.32)$$

per qualche costante  $\kappa$ , allora

$$g(t) \geq e^{\kappa t} g(0), \quad (17.33)$$

per ogni  $0 \leq t \leq T$ .

**17.12. Dimostrazione del lemma 17.11.** Si ragiona in modo simile a quanto fatto nel paragrafo §17.4 o nel paragrafo §17.5 per dimostrare il lemma 17.3. ■

**17.13. TEOREMA.** *Sia (17.2) il sistema linearizzato del sistema dinamico (16.1) nell'intorno del punto d'equilibrio  $x_0$ . Se  $\operatorname{Re}\lambda > 0$  per qualche autovalore  $\lambda$  della matrice  $A$ , allora  $x_0$  è un punto d'equilibrio instabile.*

**17.14. Dimostrazione del teorema 17.13.** Supponiamo che sia  $x_0 = 0$  (questo non è restrittivo: in caso contrario basta definire un cambio di variabili  $x \rightarrow x - x_0$ ). È possibile scrivere  $\mathbb{R}^n$  come somma diretta di due spazi invarianti  $E_1$  ed  $E_2$ ,

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2, \quad (17.34)$$

tali che la restrizione di  $A$  a  $E_1$ ,  $A|_{E_1}$ , abbia tutti autovalori con parte reale strettamente positiva, mentre la restrizione di  $A$  a  $E_2$ ,  $A|_{E_2}$ , abbia autovalori con parte reale negativa o nulla. Poniamo  $A_1 = A|_{E_1}$  e  $A_2 = A|_{E_2}$ . È allora possibile scegliere, per il lemma 17.7, una base tale che, nel corrispondente prodotto scalare, si abbia

$$\langle x_1, A_1 x_1 \rangle \geq a|x_1|^2, \quad \forall x_1 \in E_1, \quad (17.35)$$

per qualche costante  $a > 0$ , e

$$0 \geq \langle x_2, A_2 x_2 \rangle \geq -b|x_2|^2, \quad \forall x_2 \in E_2, \quad (17.36)$$

per qualche costante  $b \geq 0$ . Prendiamo come prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$  la somma dei prodotti scalari in  $E_1$  e in  $E_2$ : se  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ , con  $x_1 \in E_1$  e  $x_2 \in E_2$ , sarà allora  $|x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2$ .

Poiché  $f(x) \in \mathbb{R}^n$ , possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv f(x_1, x_2) = (A_1 x_1 + Q_1(x_1, x_2), A_2 x_2 + Q_2(x_1, x_2)) \\ &\equiv (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)), \end{aligned} \quad (17.37)$$

che rappresenta la decomposizione di  $f(x)$  nei due sottospazi  $E_1$  ed  $E_2$ .

Ora, per ogni  $\varepsilon > 0$ , possiamo trovare  $\delta > 0$  tale che se  $|x| \leq \delta$  allora  $|Q(x)| < \varepsilon|x|$  (cfr. la (17.1)).

Definiamo il cono

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : a|x_1|^2 - 2b|x_2|^2 \geq 0\}. \quad (17.38)$$

È facile allora dimostrare che esiste un intorno  $B_\delta(0)$  tale che per ogni  $x \in B_\delta(0) \cap C$  si ha

$$a \langle x_1, f_1(x) \rangle - 2b \langle x_2, f_2(x) \rangle > 0, \quad \text{se } x_1 \neq 0, \quad (17.39)$$

ed esiste  $\alpha > 0$  tale che

$$\langle x, f(x) \rangle \geq \alpha|x|^2. \quad (17.40)$$

Per la dimostrazione delle (17.39) e (17.40) rimandiamo al paragrafo §17.15. La situazione è rappresentata nella figura 17.1.

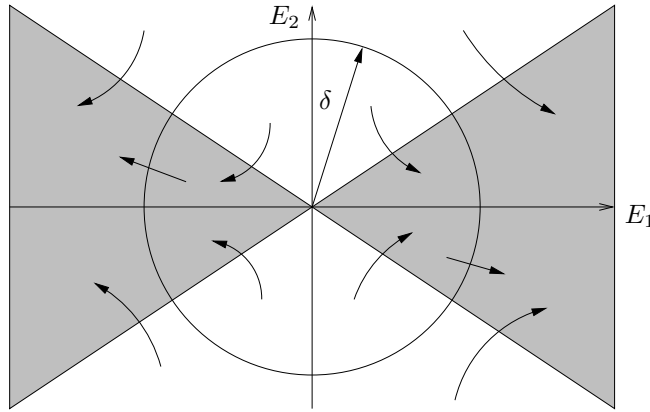


FIGURA 17.1. Rappresentazione schematica del cono  $C$  e dell'intorno  $B_\delta(0)$ . Gli assi coordinati rappresentano i due sottospazi invarianti  $E_1$  (asse delle ascisse) ed  $E_2$  (asse delle ordinate). Il cono è dato dalla regione ombreggiata.

Definiamo allora la funzione  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g(x) = (a|x_1|^2 - 2b|x_2|^2)$ ; quindi  $g(x) = 0$  per  $x \in \partial C$ ,  $g(x) > 0$  per  $x \in C \setminus \partial C$  e  $g(x) < 0$  per  $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ .

La derivata sostanziale (cfr. la (16.5)) di  $g$  è data da

$$\begin{aligned} \dot{g}(x) &= \langle \nabla g(x), f(x) \rangle = 2a \langle x_1, f_1(x) \rangle - 4b \langle x_2, f_2(x) \rangle \\ &= 2(a \langle x_1, f_1(x) \rangle - 2b \langle x_2, f_2(x) \rangle), \end{aligned} \quad (17.41)$$

così che risulta, come conseguenza della (17.39),

$$\dot{g}(z) = \langle \nabla g(z), f(z) \rangle > 0 \quad \forall z \in (\partial C \cap B_\delta(0)) \setminus \{0\} : \quad (17.42)$$

questo vuol dire che le traiettorie attraverseranno  $\partial C \cap B_\delta(0)$  verso i punti in cui la funzione  $g$  cresce, cioè verso l'interno. Quindi, all'interno dell'intorno  $B_\delta(0)$ , il campo vettoriale sulla frontiera del cono è diretto verso l'interno del cono e ha componente radiale all'interno del cono sempre diretta verso l'esterno di  $B_\delta(0)$  (per la (17.40)). Sempre dalla (17.40) e dal lemma 17.11 segue che

$$|\varphi(t, \bar{x})| \geq e^{\alpha t} |\bar{x}|, \quad \forall \bar{x} \in C \cap B_\delta(0). \quad (17.43)$$

Quindi, se  $\varphi(t, \bar{x})$ , per  $\bar{x} \in B_\delta(0) \cap C$ , non è definita per ogni  $t$ , deve uscire da  $B_\delta(0)$ , altrimenti sarebbe violato il teorema del prolungamento. Se invece  $\varphi(t, \bar{x})$  è definita per ogni  $t \geq 0$ , allora deve esistere un tempo  $t_1$  tale che  $e^{\alpha t_1} |\bar{x}| = \delta$ : quindi  $\varphi(t, \bar{x})$  esce da  $B_\delta(0)$  in un tempo finito. In entrambi i casi, dunque, la traiettoria che parte da  $\bar{x} \in B_\delta(0) \cap C$  deve lasciare  $B_\delta(0)$  in un tempo finito. Da qui segue che 0 è un punto d'equilibrio instabile (cfr. la definizione 16.5, (2), di instabilità). ■

**17.15.** *Dimostrazione delle disuguaglianze (17.39) e (17.40).* Dimostriamo la (17.40). Possiamo scrivere

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle x_1, A_1 x_1 \rangle + \langle x_2, A_2 x_2 \rangle + \langle x, Q(x) \rangle, \quad (17.44)$$

dove

$$|\langle x, Q(x) \rangle| = |\langle x_1, Q_1(x) \rangle + \langle x_2, Q_2(x) \rangle| \leq \varepsilon |x|^2, \quad (17.45)$$

per  $x \in B_\delta(0)$ . Quindi, utilizzando le (17.35) e (17.36), otteniamo, per  $x \in B_\delta(0)$ ,

$$\langle x, f(x) \rangle \geq a|x_1|^2 - b|x_2|^2 - \varepsilon|x|^2. \quad (17.46)$$

Se inoltre  $x \in C \cap B_\delta(0)$ , si ha  $|x_2| \leq a|x_1|^2/(2b)$ , così che

$$|x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq \left(1 + \frac{a}{2b}\right) |x_1|^2, \quad (17.47)$$

da cui segue

$$|x_1|^2 \geq d|x|^2, \quad (17.48)$$

con  $1/d = 1 + a/2b$ . Quindi la (17.46) dà

$$\begin{aligned} \langle x, f(x) \rangle &\geq \frac{1}{2}a|x_1|^2 + \frac{1}{2}(a|x_1|^2 - 2b|x_2|^2) - \varepsilon|x|^2 \geq \frac{1}{2}a|x_1|^2 - \varepsilon|x|^2 \\ &\geq \left(\frac{ad}{2} - \varepsilon\right) |x|^2, \end{aligned} \quad (17.49)$$

così che, se  $\varepsilon \leq ad/4$ , si ha la (17.40) con  $\alpha = ad/4$ .

Analogamente si dimostra la (17.39) (cfr. l'esercizio 9): scegliendo  $\varepsilon \leq a^2d/[2(a + 2b)]$ , segue la (17.39). ■

**17.16.** *Osservazione.* Non sempre dal sistema linearizzato (17.1) è possibile trarre informazioni per il sistema dinamico (16.1). Per esempio si consideri il sistema

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon x|x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17.50)$$

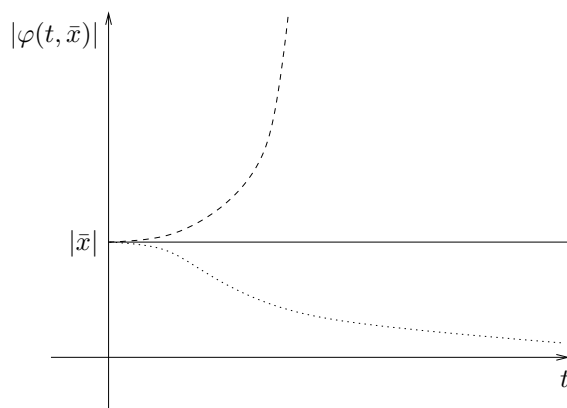


FIGURA 17.2. Andamento della distanza dall'origine  $|\varphi(t, \bar{x})|$  al variare di  $\varepsilon$ : i tre andamenti riportati in figura corrispondono ai tre casi  $\varepsilon = 0$  (linea continua),  $\varepsilon > 0$  (linea tratteggiata) e  $\varepsilon < 0$  (linea punteggiata).

e studiamo come si comporta la soluzione al variare del parametro  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

Per il sistema linearizzato ( $\varepsilon = 0$ ) si ha che  $x_0 = 0$  è un centro, e quindi  $|\varphi(t, \bar{x})| = |\bar{x}|$  per ogni dato iniziale  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ; cfr. la figura 17.2.

Al contrario, per il sistema completo ( $\varepsilon \neq 0$ ), facendo il prodotto scalare di entrambi i membri di (17.50) con  $x$  e utilizzando il fatto che la matrice  $A$  è antisimmetrica, si trova

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 \equiv \langle x, \dot{x} \rangle = \varepsilon |x|^4, \quad (17.51)$$

che ammette soluzione (cfr. l'esercizio 11)

$$|\varphi(t, \bar{x})|^2 = \frac{|\bar{x}|^2}{(1 - 2\varepsilon t |\bar{x}|^2)}. \quad (17.52)$$

Quindi, se  $\varepsilon > 0$ , esiste  $t_1 > 0$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow t_1} |\varphi(t, \bar{x})| = \infty, \quad (17.53)$$

comunque sia scelto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ : quindi  $x_0 = 0$  è un punto d'equilibrio instabile; cfr. la figura 17.2.

Se  $\varepsilon < 0$  concludiamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, \bar{x})| = 0, \quad (17.54)$$

comunque sia scelto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ : quindi  $x_0 = 0$  è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile; cfr. la figura 17.2.

In conclusione in entrambi i casi il sistema completo si comporta in maniera diversa rispetto al sistema linearizzato. Più in generale nulla possiamo concludere per il sistema completo a partire dal sistema linearizzato, nel caso in cui gli autovalori della matrice  $A$  associata al sistema linearizzato abbiano tutti parte reale nulla (caso in cui non possiamo applicare né il teorema 17.9 né il teorema 17.13).

**17.17. Osservazione.** Dalla dimostrazione del teorema 17.9, sostituendo  $t$  con  $-t$ , si ottiene che se  $x_0$  è un punto d'equilibrio per il sistema dinamico (16.1) e  $\operatorname{Re}\lambda > c$ , con  $c > 0$ , per ogni autovalore  $\lambda$  della matrice  $A$  del sistema linearizzato (17.2), allora  $x_0$  è un punto d'equilibrio instabile per (16.1). Si noti però che tale risultato è un caso particolare del teorema 17.13.

## 18. Teoremi di stabilità

**18.1. Introduzione.** Riportiamo nel seguito alcuni teoremi che sono utili per determinare se dei punti d'equilibrio sono stabili (e in caso se sono anche asintoticamente stabili), in particolare nei casi in cui lo studio del sistema linearizzato non permette di trarre alcuna considerazione (cfr. la discussione nel paragrafo §17.1 e nel paragrafo §17.16): i due teoremi di Lyapunov, il teorema di Barbašin-Krasovskij e il teorema di Dirichlet.

In particolare un caso in cui, per determinare la stabilità di un punto d'equilibrio, i risultati visti nel paragrafo §17 non si possono utilizzare e in cui, al contrario, possiamo applicare il teorema di Lyapunov si presenta quando si studiano sistemi che ammettono una costante del moto (cfr. il paragrafo §17.2). Si veda a questo riguardo anche il teorema di Dirichlet sui sistemi meccanici conservativi (definiti nel paragrafo §16.30).

Nel caso di sistemi che si ottengono da sistemi che ammettono una costante del moto  $H(x)$  (per esempio sistemi meccanici conservativi) modificando il campo vettoriale tramite l'aggiunta di un termine di attrito, così che  $H(x)$  diminuisce, invece di conservarsi, lungo le traiettorie, risulta utile il teorema di Barbašin-Krasovskij per determinare se un punto d'equilibrio è asintoticamente stabile.

Iniziamo con il considerare alcuni risultati elementari (cfr. la nota bibliografica per i risultati di Analisi), richiamando prima, brevemente, le nozioni di massimo limite e di minimo limite.

Diremo che un numero reale  $M$  è un *maggiorante definitivo* per la successione reale  $\{t_k\}$  se esiste un numero  $k_0$  tale che  $t_k \leq M \forall k > k_0$ ; diremo che un numero reale  $m$  è un *minorante definitivo* se esiste un numero  $k_0$  tale che  $t_k \geq m \forall k > k_0$ . Definiremo allora *massimo limite* della successione  $\{t_k\}$  l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi per  $\{t_k\}$  e *minimo limite* della successione  $\{t_k\}$  l'estremo superiore dei minoranti definitivi per  $\{t_k\}$ .

Ricordiamo anche che con  $\mathbb{R}^*$  si intende la retta reale ampliata:  $\mathbb{R}^* = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

**18.2. LEMMA.** *Dato il sistema dinamico (16.1), se esiste un insieme compatto  $K$  tale che  $\varphi(t, x) \in K \forall t \geq 0$  allora  $L_\omega(x) \neq \emptyset$  e  $L_\omega(x) \subset K$ .*

**18.3. Dimostrazione del lemma 18.2.** Se  $K$  è compatto e  $\varphi(t, x) \in K$  per ogni  $t \geq 0$ , data una successione di tempi  $\{t_k\}$  monotona divergente, si ha  $\varphi(t_k, x) \in K \forall x \in K$  e  $\forall k \in \mathbb{N}$ : quindi è possibile trovare una sottosuccessione  $\{t_{k_n}\}$  tale che, per ogni  $x \in K$ , la successione  $\varphi(t_{k_n}, x)$  converge a un punto in  $K$ , che chiameremo  $y$ . Quindi  $y \in K$ , per la compattezza di  $K$ , e  $y \in L_\omega(x)$  per la definizione 16.7 di insieme  $\omega$ -limite. ■

**18.4. LEMMA.** *Da ogni successione reale  $\{t_k\}$  si possono estrarre due successioni  $\{t_{k_n}\}$  e  $\{t_{k_j}\}$  tali che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k_n} = \limsup_{k \rightarrow \infty} t_k, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} t_{k_j} = \liminf_{k \rightarrow \infty} t_k, \quad (18.1)$$

*i.e. che convergono, rispettivamente, al massimo e minimo limite della successione.*

**18.5. Dimostrazione del lemma 18.4.** Definiamo

$$L = \limsup_{k \rightarrow \infty} t_k, \quad \ell = \liminf_{k \rightarrow \infty} t_k, \quad (18.2)$$

e supponiamo preliminarmente che sia  $L$  sia  $\ell$  siano finiti.

Per definizione di massimo limite (cfr. l'esercizio 12) risulta allora:  $\forall \varepsilon > 0$  (1) esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $t_k < L + \varepsilon$  e (2) per infiniti  $k$  si ha  $t_k > L - \varepsilon$ . Quindi per infiniti  $k \in \mathbb{N}$  si ha  $L - \varepsilon < t_k < L + \varepsilon$ . In particolare per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si può trovare  $k = k_n$  tale che

$$L - \frac{1}{n} < t_{k_n} < L + \frac{1}{n}; \quad (18.3)$$

quindi esiste una sottosuccessione  $\{t_{k_n}\}$  tale che  $t_{k_n} \rightarrow L$ .

Analogamente si discute il caso del minimo limite, tenendo conto che in tal caso, per definizione di minimo limite (cfr. l'esercizio 13), si deve avere:  $\forall \varepsilon > 0$  (1) esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $t_k > \ell - \varepsilon$  e (2) per infiniti  $k$  si ha  $t_k < \ell + \varepsilon$ . Quindi per infiniti  $k \in \mathbb{N}$  si ha  $\ell - \varepsilon < t_k < \ell + \varepsilon$ . Procedendo come prima si trova quindi che esiste una sottosuccessione  $t_{k_j}$  che converge a  $\ell$ .

I casi  $|L| = \infty$  e  $|\ell| = \infty$  si trattano analogamente. Per esempio se  $L = \infty$ , allora la successione  $\{t_k\}$  non è limitata superiormente, quindi  $\forall M > 0 \exists k \in \mathbb{N}$  tale che  $t_k > M$ . Pertanto  $\forall n \in \mathbb{N}$  si può prendere  $k = k_n$  tale che  $t_{k_n} > k$ ; per costruzione  $t_{k_n} \rightarrow \infty$ , i.e.  $t_{k_n} \rightarrow L$ , per  $n \rightarrow \infty$ . Allo stesso modo si discutono i casi restanti. ■

**18.6. LEMMA.** *Una successione reale  $\{t_k\}$  ha limite  $t_0 \in \mathbb{R}^*$  se e solo se*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} t_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0, \quad (18.4)$$

*i.e. se e solo se massimo e minimo limite coincidono.*

**18.7. Dimostrazione del lemma 18.6.** Consideriamo prima il caso in cui  $t_0$  sia finito.

Se  $t_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k$  allora:  $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $|t_k - t_0| < \varepsilon$ . Quindi si vede che  $t_0$  soddisfa entrambe le definizioni di massimo e minimo limite (cfr. il paragrafo §18.5): quindi vale la (18.4).

Viceversa, se vale la (18.4) per qualche  $t_0$  si deve avere, contemporaneamente: (1)  $\forall \varepsilon > 0 \exists k_1 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_1$  si ha  $t_k < t_0 + \varepsilon$ , e (2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists k_2 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_2$  si ha  $t_k > t_0 - \varepsilon$ . Quindi per ogni  $k > k_0 = \max\{k_1, k_2\}$  si ha  $t_0 - \varepsilon < t_k < t_0 + \varepsilon$ , *i.e.*  $t_k$  converge a  $t_0$ .

Se invece  $t_0 = \infty$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$ , allora:  $\forall M > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $t_k > M$ . Quindi la successione  $\{t_k\}$  non è superiormente limitata, così che  $\limsup_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ . D'altra parte il minimo limite è l'estremo superiore dell'insieme dei minoranti definitivi (cfr. il paragrafo §18.1), quindi, poiché tale estremo superiore è  $+\infty$ , si ha anche  $\liminf_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ .

Viceversa, se vale la (18.4) con  $t_0 = \infty$ , poiché  $\liminf_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ , allora:  $\forall M > 0$  esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $t_k > M$  (altrimenti l'estremo superiore dell'insieme dei minoranti definitivi non sarebbe  $+\infty$ ). Ma questo implica  $t_k \rightarrow \infty$  per  $k \rightarrow \infty$ .

Il caso  $t = -\infty$  si discute analogamente. ■

**18.8. LEMMA.** *Sia  $\{x_k\}$  una successione a valori in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Se ogni sottosuccessione convergente  $\{x_{k_j}\}$  di  $\{x_k\}$  converge a  $x_0$ , allora anche*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0, \quad (18.5)$$

*i.e. la stessa successione  $\{x_n\}$  è convergente e il suo limite è  $x_0$ .*

**18.9. Dimostrazione del lemma 18.8.** Senza perdita di generalità possiamo limitarci al caso  $n = 1$ , *i.e.* al caso in cui la successione  $\{x_k\}$  sia a valori in  $\mathbb{R}$ . Se  $n > 1$ , fissato un sistema di coordinate in  $\mathbb{R}^n$ , si possono considerare le  $n$  successioni reali  $\{x_{1k}\}, \dots, \{x_{nk}\}$ , e ripetere l'argomento per ciascuna di esse.

Per il lemma 18.4 esistono due sottosuccessioni  $\{y_k\}$  e  $\{z_k\}$  per le quali si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k \equiv L, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} x_k \equiv \ell. \quad (18.6)$$

Per ipotesi tutte le sottosuccessioni convergenti hanno come limite  $x_0$ , quindi  $L = \ell = x_0$ . Possiamo quindi applicare il lemma 18.6 e concludere che vale la (18.5). ■

**18.10. LEMMA.** *Sia  $\{x_n\}$  una successione a valori in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Se ogni sottosuccessione convergente  $\{x_{k_j}\}$  di  $\{x_k\}$  converge allo stesso limite  $x_0$ , allora*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0, \quad (18.7)$$



i.e. il la successione  $\{x_n\}$  è convergente e il suo limite è  $x_0$ .

**18.11.** *Dimostrazione del lemma 18.10.* Come per il lemma 18.8 ci limitiamo al caso  $n = 1$ .

Per il lemma 18.4 esistono due sottosuccessioni  $\{y_k\}$  e  $\{z_k\}$  per le quali si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k \equiv L, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} x_k \equiv \ell. \quad (18.8)$$

Per ipotesi tutte le sottosuccessioni convergenti ammettono lo stesso limite  $x_0$ : quindi si deve avere  $x_0 = L = \ell$ , così che possiamo applicare il lemma 18.6 e concludere che vale la (18.5). ■

**18.12.** LEMMA. *Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  e sia  $W$  un insieme aperto dello spazio vettoriale  $E$ ; sia  $t_0 \in \mathbb{R}^*$ . Data una funzione  $u: I \rightarrow W$ , si ha*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u_0, \quad (18.9)$$

se e solo se, per ogni successione  $\{t_k\}$  a valori in  $\mathbb{R}$  tale che  $t_k \rightarrow t_0$ , si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k) = u_0. \quad (18.10)$$

**18.13.** *Dimostrazione del lemma 18.12.* Consideriamo separatamente i due casi  $|t_0| < \infty$  e  $|t_0| = \infty$ .

Se  $t_0 < \infty$  e vale la (18.9), risulta:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che per ogni  $t$  con  $|t - t_0| < \delta$  si ha  $|u(t) - u_0| < \varepsilon$ . Consideriamo allora una successione  $\{t_k\}$  convergente a  $t_0$ : allora per ogni  $\delta > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $|t_k - t_0| < \delta$ . In conclusione per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta$  e, corrispondentemente,  $k_0$  tali che per ogni  $k > k_0$  si ha  $|t_k - t_0| < \delta$  e quindi  $|u(t_k) - u_0| < \varepsilon$ : quindi vale la (18.10).

Viceversa supponiamo che valga la (18.10) per ogni successione  $\{t_k\}$  convergente a  $t_0$ : vogliamo far vedere che in tal caso  $u_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t)$ . Supponiamo per assurdo che questo non sia vero: allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $\forall \delta > 0 \exists t$  con  $|t - t_0| < \delta$  tale che  $|u(t) - u_0| \geq \varepsilon$ . Scegliamo  $\delta = 1/k$  e, corrispondentemente,  $t_k$  tale che  $|t_k - t_0| < 1/k$ . Si ha allora una successione  $\{t_k\}$  che converge a  $t_0$  per  $k \rightarrow \infty$  tale che  $|u(t_k) - u_0| \geq \varepsilon$  per ogni  $k$ , in contraddizione con la (18.10).

Se  $t_0 = \infty$  si ragiona nel modo seguente. Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_0$ , risulta:  $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$  tale che per ogni  $t > M$  si ha  $|u(t) - u_0| < \varepsilon$ . Consideriamo allora una successione divergente  $\{t_k\}$ : allora per ogni  $M > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $t_k > M$ . In conclusione per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $M > 0$  e, corrispondentemente,  $k_0$  tali che per ogni  $k > k_0$  si ha  $t_k > M$  e quindi  $|u(t_k) - u_0| < \varepsilon$ : quindi vale la (18.10).

Viceversa supponiamo che valga la (18.10) per ogni successione divergente  $\{t_k\}$ : vogliamo far vedere che in tal caso  $u_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ . Supponiamo per assurdo che

questo non sia vero: allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $\forall M > 0 \exists t > M$  tale che  $|u(t) - u_0| \geq \varepsilon$ . Scegliamo  $M = k$  e, corrispondentemente,  $t_k > k$ . Si ha allora una successione  $\{t_k\}$ , divergente per  $k \rightarrow \infty$ , tale che  $|u(t_k) - u_0| \geq \varepsilon$  per ogni  $k$ , in contraddizione con la (18.9).

Il caso  $t_0 = -\infty$  si discute in modo analogo. ■

**18.14. LEMMA.** *Dato il sistema dinamico (16.1), sia  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $x_0$  è un punto d'equilibrio stabile e  $L_\omega(x) = \{x_0\}$ , allora  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$ .*

**18.15. Dimostrazione del lemma 18.14.** Poiché  $x_0$  è un punto d'equilibrio stabile, fissato un qualsiasi intorno  $B_\varepsilon(x_0)$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni dato iniziale  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$  si ha  $\varphi(t, \bar{x}) \in B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $t \geq 0$ . Poiché  $x_0 = L_\omega(x)$ , per definizione di insieme  $\omega$ -limite esiste una successione divergente  $\{t_k\}$  e un indice  $k_0 \geq 0$  tali che si deve avere  $\varphi(t_k, x) \in B_\delta(x_0)$  per  $t_k > t_{k_0}$ . Quindi in particolare per ogni  $t > t_{k_0}$  si ha  $\varphi(t, x) \in B_\varepsilon(x_0)$ . Ne segue che, comunque si scelga una successione monotona divergente  $\{s_k\}$ , si deve avere  $\varphi(s_k, x) \in B_\varepsilon(x_0)$  per  $s_k > t_{k_0}$ .

Sia  $\{s_{k_n}\}$  una sottosuccessione arbitraria di  $\{s_k\}$ : si ha  $\varphi(s_{k_n}, x) \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}$  per ogni  $s_{k_n} > t_{k_0}$ . Quindi, poiché  $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$  è compatto, dalla successione  $\varphi(s_{k_n}, x)$  si può estrarre una successione convergente  $\varphi(s_{k_{n_j}}, x)$ . Il limite di tale successione soddisfa la definizione 16.7 di insieme  $\omega$ -limite di  $x$  (per la successione di tempi  $\{s_{k_{n_j}}\}$ ), quindi deve essere  $x_0$  poiché per ipotesi  $L_\omega(x) = \{x_0\}$ . Possiamo allora applicare il lemma 18.8 e concludere che la successione  $\varphi(s_k, x)$  converge a  $x_0$ .

L'argomento si applica a qualsiasi successione monotona divergente  $\{s_k\}$ , quindi, per il lemma 18.12, concludiamo che si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$ : questo completa la dimostrazione del lemma. ■

**18.16. Osservazione.** Notiamo che, nella dimostrazione del lemma 18.14, in maniera assolutamente equivalente, si poteva applicare il lemma 18.10, per arrivare alle stesse conclusioni: infatti, data una qualsiasi successione monotona divergente  $\{\sigma_k\}$  (come nel paragrafo §18.15) e scelta comunque una sua sottosuccessione convergente  $\{s_{k_n}\}$ , si deve avere  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_{k_n}, x) = x_0$ , poiché il suo limite soddisfa la definizione di insieme  $\omega$ -limite di  $x$  e  $L_\omega(x)$  contiene solo il punto d'equilibrio  $x_0$ . Quindi possiamo applicare il lemma 18.10 e concludere che si deve avere  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(s_k, x) = x_0$ . A questo punto si procede come nella parte conclusiva del paragrafo §18.15.

**18.17. LEMMA** *Dato il sistema dinamico (16.1), sia  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $L_\omega(x)$  contiene un punto d'equilibrio stabile  $x_0$ , allora  $L_\omega(x) = \{x_0\}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$ .*

**18.18 . Dimostrazione del lemma 18.17.** Dimostriamo per prima cosa che un insieme  $L_\omega(x)$  che contenga un punto d'equilibrio  $x_0$  è necessariamente costituito dal solo punto  $x_0$ . Supponiamo per assurdo che esista  $y \in L_\omega(x)$  tale che  $y \neq x_0$ ; dovrebbe quindi esistere una successione  $\{s_k\}$  monotona divergente tale che  $\varphi(s_k, x) \rightarrow y$  per  $k \rightarrow \infty$ ; cfr. la definizione 16.7.

Dal momento che stiamo supponendo  $y \neq x_0$  dovrebbe allora esistere  $\varepsilon > 0$  tale che

$|y - x_0| = 2\varepsilon$ . Poiché  $x_0$  è stabile, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $z \in B_\delta(x_0)$ , allora  $\varphi(t, z) \in B_\varepsilon(x_0) \forall t \geq 0$ ; cfr. la definizione 16.5, (1).

D'altra parte, sempre per la definizione 16.7 di insieme  $\omega$ -limite, esiste una successione  $\{t_k\}$  monotona divergente e un indice  $k_0$  tali che  $\varphi(t_k, x) \in B_\delta(x_0)$  per  $k \geq k_0$ : per la stabilità di  $x_0$ , questo implica quindi

$$\varphi(t, x) \in B_\varepsilon(x_0) \quad \forall t \geq t_{k_0}. \quad (18.11)$$

Ne segue che non è possibile che esista una successione  $\{s_k\}$  tale che  $\varphi(s_k, x)$  converga a  $y$  per  $k \rightarrow \infty$ : siamo così arrivati a una contraddizione: possiamo perciò concludere che si ha

$$L_\omega(x) \equiv \{x_0\}. \quad (18.12)$$

A questo punto possiamo applicare il lemma 18.14: si ha quindi  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$ .

■

**18.19.** *Osservazione.* Sotto le ipotesi del lemma 18.14, si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$ , ma non necessariamente il punto  $x_0$  è asintoticamente stabile: in altre parole non necessariamente ogni punto in un intorno di  $x_0$  deve tendere a  $x_0$ . Come (facile) controesempio si può considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases} \quad (18.13)$$

Per ogni  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  si ha  $\varphi(t, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}_1, 0)$ ; quindi per ogni  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  risulta  $L_\omega(\bar{x}) = \{(\bar{x}_1, 0)\}$ . D'altra parte la retta  $x_2 = 0$  è costituita da punti d'equilibrio stabili ma non asintoticamente stabili.

**18.20.** TEOREMA (LJAPUNOV). *Sia  $x_0$  un punto d'equilibrio per il sistema (16.1). Supponiamo che esista una funzione  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita in un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  e di classe  $C^1$ , tale che*

(1)  $W(x_0) = 0$ , e  $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ;

(2)  $\dot{W}(x) \leq 0 \forall x \in B(x_0)$ .

Allora  $x_0$  è un punto d'equilibrio stabile.

Se inoltre

(3)  $\dot{W}(x) < 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ,

allora  $x_0$  è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

**18.21.** *Dimostrazione del teorema 18.20.* Consideriamo un intorno  $B_\varepsilon(x_0) \subset B(x_0)$  di raggio  $\varepsilon$  e centro in  $x_0$ , e definiamo

$$\alpha(\varepsilon) = \min_{x \in \partial B_\varepsilon(x_0)} W(x); \quad (18.14)$$

si ha  $\alpha(\varepsilon) > 0$ , e il segno stretto vale in virtù della condizione (1) nell'enunciato del teorema. Definiamo inoltre

$$U = \left\{ x \in B_\varepsilon(x_0) : W(x) < \frac{1}{2}\alpha(\varepsilon) \right\}. \quad (18.15)$$

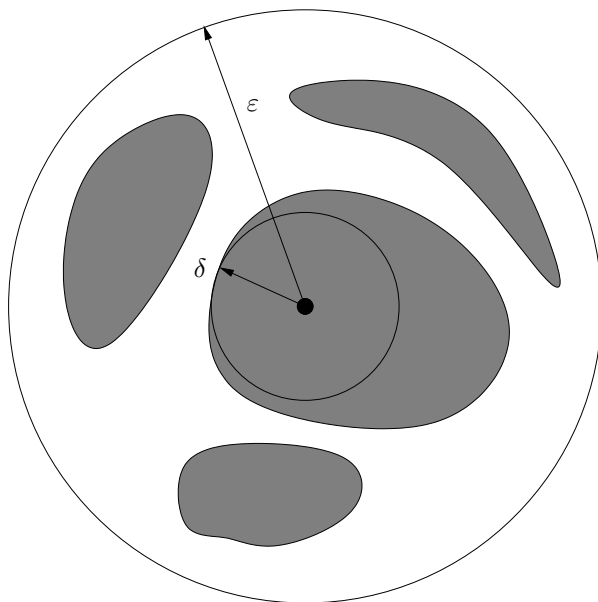


FIGURA 18.1. Scenario previsto nella discussione del teorema di Lyapunov. L'insieme aperto  $U$  è costituito dalla regione ombreggiata: non è necessariamente connesso, ma esiste sempre una sua componente contenente il punto d'equilibrio  $x_0$  e quindi un intorno  $B_\delta(x_0)$ .

Poiché  $W$  è una funzione regolare, l'insieme  $U$  è aperto (cfr. l'esercizio 14): quindi esiste un intorno  $B_\delta(x_0) \subset U$ , con  $\delta < \varepsilon$ . Cfr. la figura 18.1.

Per dimostrare che  $x_0$  è un punto d'equilibrio stabile, è sufficiente far vedere che, sotto le ipotesi (1) e (2) del teorema, comunque si scelga un dato iniziale  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ , la traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$  si mantiene all'interno dell'intorno  $B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $t \geq 0$  (cfr. la definizione di stabilità nel paragrafo §16.5).

Per assurdo, supponiamo che esista un tempo finito  $t_1$  tale che, per  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ , si abbia  $\varphi(t_1, \bar{x}) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ . Allora si avrebbe

$$0 < \frac{\alpha(\varepsilon)}{2} < W(\varphi(t_1, \bar{x})) - W(\bar{x}) = \int_0^{t_1} ds \frac{dW(\varphi(s, \bar{x}))}{ds} \leq 0, \quad (18.16)$$

che è ovviamente impossibile. ■

Supponiamo ora che valga anche la condizione (3) del teorema. Consideriamo l'intorno  $B_\varepsilon(x_0)$ : poiché  $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$  è compatto e  $\varphi(t, \bar{x}) \in B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$  (per l'appena dimostrata stabilità di  $x_0$ ), possiamo applicare il lemma 18.2 e concludere che, per ogni  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$  si ha  $L_\omega(\bar{x}) \neq \emptyset$ .

Sia  $y \in L_\omega(\bar{x})$ . Per la proprietà (5) degli insiemi  $\omega$ -limite (cfr. il paragrafo §16.19), poiché  $W(x) \geq 0$  e  $\dot{W}(x) \leq 0$  per  $x \in B_\varepsilon(x_0)$ , si deve avere  $\dot{W}(y) = 0$ . Ma  $\dot{W}(x) < 0$

$\forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ , i.e.  $\dot{W}(x) = 0$  solo per  $x = x_0$ , quindi  $y = x_0$ . Questo implica che comunque sia presa una successione  $\{\varphi(t_k, \bar{x})\}$  qualsiasi sua sottosuccessione convergente  $\{\varphi(t_{k_j}, \bar{x})\}$  deve convergere a  $x_0$ . Per il Lemma 18.25 allora la successione stessa  $\{\varphi(t_k, \bar{x})\}$  deve convergere a  $x_0$ . D'altra parte questo risultato non dipende dalla particolare successione di tempi  $\{t_k\}$ . Possiamo quindi concludere che per qualsiasi successione di tempi  $\{t_k\}$  il limite della successione  $\{\varphi(t_k, \bar{x})\}$  è  $x_0$ . Allora per il lemma 18.12 si deve avere  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \bar{x}) = x_0$ . Questo mostra che il punto  $x_0$  è attrattivo. Poiché abbiamo già dimostrato che è stabile segue che è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile. ■

**18.22. Osservazione.** Nel paragrafo §18.21, nella dimostrazione della stabilità asintotica del punto d'equilibrio  $x_0$ , una volta ottenuto  $y = x_0$  per ogni  $y \in L_\omega(\bar{x})$  si poteva direttamente applicare il lemma 18.14 per trovare  $L_\omega(\bar{x}) = \{x_0\}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \bar{x}) = x_0$ . A questo punto, poiché tale risultato vale per ogni  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$  possiamo quindi concludere che  $x_0$  è asintoticamente stabile.

**18.23. Osservazione.** Nel caso in cui valga anche la proprietà (3) nel teorema 18.20, l'intorno  $B_\varepsilon(x_0)$  è, per costruzione contenuto nel bacino d'attrazione di  $x_0$  (cfr. la definizione 16.5 di bacino d'attrazione). Questo fornisce un metodo per stimare il bacino d'attrazione di  $x_0$ : si cerca il massimo valore di  $\varepsilon$  per cui l'argomento dato nel paragrafo §18.21 funziona, e si trova quindi un intorno sferico massimale contenuto nel bacino d'attrazione.

**18.24. Osservazione.** Si noti che, se vale anche la condizione (3), deve essere necessariamente  $\dot{W}(x_0) = 0$  per la proprietà (5) in §16.9, quindi non è necessario specificare il valore di  $\dot{W}(x_0)$  nell'enunciato del teorema 18.20 perché ovvio.

**18.25. Osservazione.** L'idea della dimostrazione del paragrafo §18.21 è la seguente. La condizione (2) del teorema 18.20 implica che le traiettorie che partono da punti vicini a  $x_0$  non portano verso punti in cui  $W$  assume valori più grandi (in modo che  $W$  non cresca), e quindi rimangono vicino a  $x_0$  (stante la condizione (1)). Se inoltre vale la condizione (3), le traiettorie devono portare verso punti in cui  $W$  assume valori più piccoli (in modo che  $W$  diminuisca strettamente), e quindi verso  $x_0$ .

**18.26. DEFINIZIONE (FUNZIONE DI LJAPUNOV).** *Chiameremo funzione di Ljapunov una funzione che verifichi le proprietà (1) e (2) del teorema 18.20.*

**18.27. TEOREMA (LJAPUNOV).** *Sia  $x_0$  un punto d'equilibrio per il sistema (16.1). Supponiamo che esista una funzione  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita in un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  e di classe  $C^1$ , tale che*

- (1)  $W(x_0) = 0$ , e  $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ;
- (2)  $\dot{W}(x) \geq 0 \forall x \in B(x_0)$ , e  $\dot{W}(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ,

allora  $x_0$  è un punto d'equilibrio instabile.

**18.28.** *Dimostrazione del teorema 18.27.* La dimostrazione segue dalla dimostrazione del teorema 18.20. Infatti se si considera il sistema dinamico che si ottiene da (16.1) invertendo il segno del tempo, abbiamo che per l'evoluzione inversa  $t \rightarrow \varphi(-t, \bar{x})$ ,  $x_0$  è asintoticamente stabile. ■

**18.29.** TEOREMA (BARBAŠIN-KRASOVSKIJ). *Sia  $x_0$  un punto d'equilibrio per il sistema (16.1). Supponiamo che esista una funzione  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita in un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  e di classe  $C^1$ , tale che*

(1)  $W(x_0) = 0$ , e  $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ;

(2)  $\dot{W}(x) \leq 0 \forall x \in B(x_0)$ .

(3) *Supponiamo anche che esista un insieme compatto  $P$ , chiusura di un aperto, tale che: (3.1)  $x_0 \in P$ , (3.2)  $P$  è positivamente invariante, e (3.3) non esistono in  $P \setminus \{x_0\}$  traiettorie costituite unicamente da punti  $z$  in cui  $\dot{W}(z) = 0$ .*

*Allora  $x_0$  è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e  $P$  è contenuto nel suo bacino d'attrazione.*

**18.30.** *Dimostrazione del teorema 18.29.* Poiché  $P$  è compatto e positivamente invariante, per ogni  $x \in P$ ,  $L_\omega(x) \neq \emptyset$  (cfr. il lemma 18.2). Sempre per il fatto che  $P$  è positivamente invariante, si ha  $L_\omega(x) \subset P$ . Sia  $y \in L_\omega(x)$ . Supponiamo per assurdo che sia  $y \neq x_0$ . Per l'unicità della soluzione dell'equazione (16.1) e poiché  $\varphi(t, x_0) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$ , deve essere  $\varphi(t, y) \neq x_0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Ma  $\varphi(t, y) \in L_\omega(x)$  per la proprietà (2) degli insiemi  $\omega$ -limite (cfr. §16.19): quindi esisterebbe una traiettoria  $\varphi(t, y) \in P \setminus \{x_0\}$  tale che  $\dot{W} = 0$  (per la proprietà (5) di §16.19): questo contraddice l'ipotesi (3.3) nell'enunciato del teorema. Quindi  $y = x_0$ . A questo punto possiamo procedere come alla fine della dimostrazione del teorema 18.20 (cfr. il paragrafo §18.21), e concludere che  $x_0$  è asintoticamente stabile. Alternativamente si può ragionare come indicato nell'osservazione 18.22 e applicare il lemma 18.14 per ottenere  $L_\omega(x) = \{x_0\}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$ , e quindi utilizzare il fatto che tale risultato vale per ogni  $x \in P$  per concludere che  $x_0$  è asintoticamente stabile. Infine, ricordando la definizione 16.5, otteniamo anche che  $P$  deve essere contenuto nel bacino d'attrazione di  $x_0$ . ■

**18.31.** *Osservazione.* Tenendo presente l'osservazione 18.23 possiamo concludere quanto segue. Dato un sistema dinamico, si possono utilizzare i teoremi 18.20 e 18.29 non solo per dimostrare se un dato punto d'equilibrio è asintoticamente stabile, ma anche, eventualmente, per dare una stima del suo bacino d'attrazione.

**18.32.** TEOREMA (DIRICHLET). *In un sistema meccanico conservativo i punti di minimo isolati dell'energia potenziale corrispondono a punti d'equilibrio stabili.*

**18.33.** *Dimostrazione del teorema 18.32.* In un sistema meccanico conservativo, se indichiamo con  $x = (q, \dot{q})$  i punti dello spazio delle fasi (cfr. il paragrafo §16.30),

l'energia

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + V(q), \quad (18.17)$$

è una costante del moto. Se  $q_0$  è un punto di minimo isolato per l'energia potenziale  $V(q)$ , possiamo allora definire la funzione di Ljapunov  $W(q, \dot{q}) = H(q, \dot{q}) - V(q_0)$  in un intorno del punto  $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$  e applicare il teorema 18.20 per concludere che il punto  $(q_0, 0)$  è un punto d'equilibrio stabile per il sistema meccanico con energia (18.17). ■

**18.34. Osservazione.** Si noti che la condizione che un punto d'equilibrio stabile sia un punto di minimo per l'energia potenziale è una condizione sufficiente ma non necessaria. Come controesempio si può considerare la funzione

$$V(q) = q^5 \sin \frac{1}{q}, \quad (18.18)$$

per la quale si può verificare che  $q = 0$  è un punto d'equilibrio stabile (cfr. l'esercizio 16) nonostante che non sia (manifestamente) un punto di minimo. Cfr. la figura 18.2.

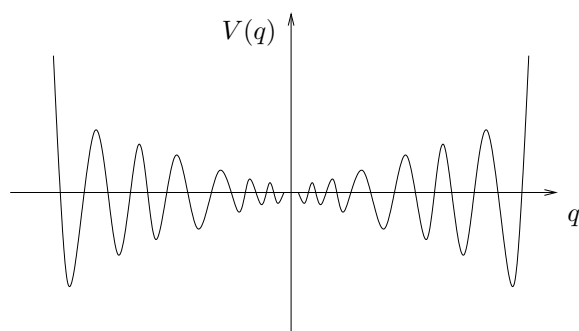


FIGURA 18.2. Grafico (approssimativo) della funzione  $V(q)$  data dalla (18.18).

**18.35. Osservazione.** Il teorema 18.20 permette di concludere che, per il sistema discusso nel paragrafo 17.16, l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile per  $\varepsilon < 0$  (cfr. l'esercizio 21).

## 19. Teorema della scatola di flusso

**19.1. Introduzione.** I teoremi visti nelle sezioni precedenti trattano il comportamento di sistemi dinamici vicino a punti d'equilibrio. La situazione è completamente

diversa se siamo interessati al comportamento di un sistema lontano dai punti d'equilibrio. Il seguente teorema, che prende il nome di *teorema della scatola di flusso* (chiamato anche *teorema dell'intorno tubolare* o *teorema di rettificazione*), mostra che, qualitativamente, ogni sistema dinamico si comporta allo stesso modo lontano dai punti d'equilibrio: è infatti sempre possibile trovare un sistema di coordinate in cui l'evoluzione appare, localmente, un moto rettilineo uniforme, *i.e.* un moto con velocità costante (in modulo e verso).

Il teorema della scatola di flusso è di notevole rilevanza, da un punto di vista teorico: se interessano proprietà qualitative di un sistema dinamico lontano dai punti d'equilibrio si può sempre supporre che il moto sia un moto rettilineo uniforme, e quindi un moto particolarmente facile da studiare.

Ricordiamo che, dati due insiemi  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , un'applicazione  $f: A \rightarrow B$  si definisce *diffeomorfismo* se è differenziabile e ha inversa differenziabile. Diremo che  $f$  è un diffeomorfismo di classe  $C^k$  se  $f$  e la sua inversa sono di classe  $C^k$ .

**19.2. TEOREMA.** *Sia dato il sistema dinamico (16.1), e sia  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tale che  $f(x_0) \neq 0$ . Esiste allora un intorno  $B(x_0)$  e un diffeomorfismo  $\psi: B(x_0) \rightarrow B(0)$ , da  $B(x_0)$  a un intorno dell'origine di  $\mathbb{R}^n$ , che trasforma le soluzioni del sistema dinamico (16.1) in  $B(x_0)$  nelle soluzioni del sistema dinamico*

$$\dot{x} = n_0, \quad (19.1)$$

in  $B(0)$ , dove  $n_0$  è un vettore unitario. Se la funzione  $f$  è di classe  $C^k$  allora il diffeomorfismo  $\psi$  è di classe  $C^k$ .

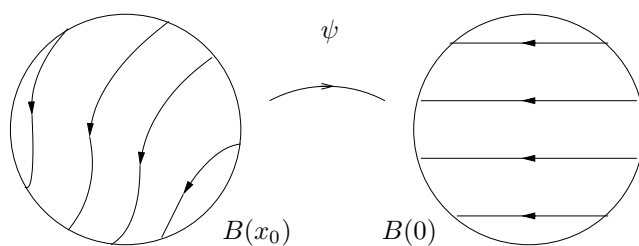


FIGURA 19.1. Rappresentazione schematica del significato del teorema della scatola di flusso: nelle nuove coordinate il flusso è lineare.

**19.3. Dimostrazione del teorema 19.2.** Poiché  $f(x_0) \neq 0$ , esisterà una sezione locale  $S$  passante per  $x_0$  e perpendicolare a  $f(x_0)$ ; scegliendo un opportuno sistema di coordinate possiamo supporre che sia  $x_0 = 0$  e porre  $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ ; quindi  $S \subset \pi$ . Si ha inoltre  $f_n(x_0) = a \neq 0$ ; possiamo senz'altro supporre che sia  $a > 0$ .

Sia  $B(x_0) = B_\delta(x_0)$  un intorno con raggio  $\delta$  sufficientemente piccolo così che risulti  $f_n(x) > a/2$  per ogni  $x \in B_\delta(x_0)$ ; questo è sicuramente possibile poiché il campo



vettoriale è continuo. Se  $x \in B_\delta(x_0)$ , la soluzione dell'equazione (16.1) con dato iniziale  $x$  si può scrivere

$$\varphi(t, x) = x + \int_0^t ds f(\varphi(s, x)). \quad (19.2)$$

Vogliamo dimostrare che è possibile scegliere l'intorno  $B_\delta(x_0)$  in modo tale che esista un tempo  $\tau(x)$  tale che

$$\varphi_n(\tau(x), x) = 0, \quad |\tau(x)| \leq \sigma, \quad (19.3)$$

per qualche  $\sigma > 0$  e per ogni  $x \in B_\delta(x_0)$ : la (19.3) dice che la componente  $n$ -esima di  $\varphi(t, x)$  si annulla, *i.e.* l'evoluto di  $x$  raggiunge la sezione  $S$ , in un tempo finito  $\tau(x)$ : possiamo quindi chiamare  $\tau(x)$  il *tempo di attraversamento* di  $S$  del punto  $x$ . Cfr. la figura 19.2.

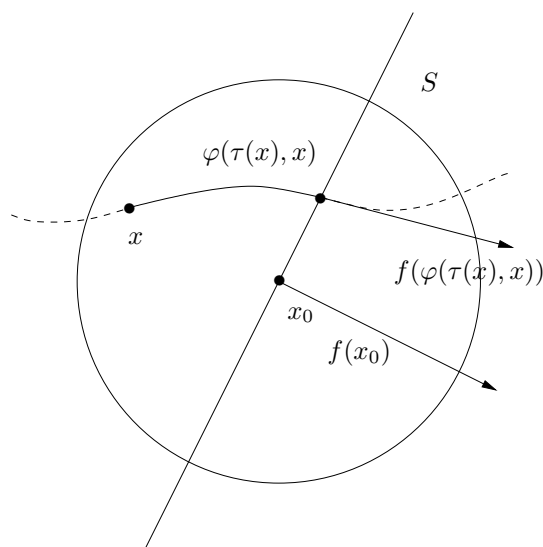


FIGURA 19.2. Scenario previsto nella discussione del teorema della scatola di flusso: per ogni  $x$  appartenente all'intorno  $B(x_0) = B_\delta(x_0)$  esiste un tempo finito in cui la traiettoria con dato iniziale in  $x$  raggiunge la sezione  $S$ .

Definiamo la funzione

$$F(x, \tau) = x_n + \int_0^\tau ds f_n(\varphi(s, x)). \quad (19.4)$$

Per  $x = x_0 \equiv 0$  e  $\tau = 0$  si ha  $F(0, 0) = 0$ ; inoltre  $[\partial F / \partial \tau](0, 0) = f_n(0) \neq 0$  per ipotesi. Quindi, per il teorema della funzione implicita (cfr. la nota bibliografica

e l'esercizio 17), esiste un intorno, che, eventualmente prendendo un raggio  $\delta$  più piccolo, possiamo identificare con  $B_\delta(x_0)$ , tale che, per ogni  $x \in B_\delta(x_0)$ , esiste un valore  $\tau = \tau(x)$  tale che  $F(x, \tau(x)) = 0$ . Tale condizione, data la definizione della funzione (19.4), implica la prima delle (19.3). Si noti inoltre che si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_n} &= 1 + \int_0^\tau ds \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\varphi(s, x_n)), \\ \frac{\partial F}{\partial \tau} &= f_n(\varphi(\tau, x)),\end{aligned}\tag{19.5}$$

così che (cfr. l'esercizio 18)

$$\left. \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_n} \right|_{x=x_0} = - \frac{[\partial F / \partial x_n](x_0, 0)}{[\partial F / \partial \tau](x_0, 0)} = - \frac{1}{f_n(x_0)} \neq 0.\tag{19.6}$$

Inoltre, sempre per il teorema della funzione implicita, segue che  $\tau(x)$  è una funzione di classe  $C^k$  di  $x$ , se  $f$  è di classe  $C^k$  (cfr. l'esercizio 17).

È immediato verificare inoltre che esiste  $\sigma > 0$  tale che  $|\tau(x)| \leq \sigma$  per ogni  $x \in B(x_0)$ , ragionando come segue. Supponiamo per assurdo che questo non sia vero: allora dovrebbe esistere un valore  $\sigma > 0$  e un punto  $z \in B_\delta(x_0)$  tali che  $|\tau(z)| > \sigma$ . Per tale  $z$ , in

$$F(z, \tau(z)) = z_n + \int_0^{\tau(z)} ds f_n(\varphi(s, z)),\tag{19.7}$$

potremmo stimare

$$\begin{aligned}|z_n| &< |z| < \delta, \\ \left| \int_0^{\tau(z)} ds f_n(\varphi(s, z)) \right| &> \left| \int_0^{\tau(z)} ds \frac{a}{2} \right| > \frac{a\sigma}{2},\end{aligned}\tag{19.8}$$

che però implicherebbe  $F(z, \tau(z)) \neq 0$  non appena fosse  $\sigma > 2\delta/a$ , in contraddizione con la definizione di  $\tau(z)$  per  $z \in B_\delta(x_0)$ . In particolare si vede che si deve avere  $\sigma < \sigma_0 \equiv 2\delta/a$ .

Consideriamo dunque il cambiamento di coordinate  $\psi: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$  definito da

$$\begin{cases} y_i = \psi_i(x) = \varphi_i(\tau(x), x), & i = 1, \dots, n-1, \\ y_n = \psi_n(x) = \tau(x), \end{cases}\tag{19.9}$$

per  $x \in B(x_0)$ ; geometricamente  $y_i$ , per  $i \leq n-1$ , è la coordinata  $i$ -esima su  $S$  del punto in cui  $\varphi(t, x)$  attraversa il piano. Per il teorema 11.11 (teorema della dipendenza differenziabile dai dati iniziali), se  $f$  è di classe  $C^k$  allora le funzioni  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , sono di classe  $C^k$ .

Per dimostrare che il cambiamento di coordinate  $\psi$  è invertibile con inversa di classe  $C^k$  (in un intorno di  $x_0$ ) è sufficiente dimostrare che la matrice jacobiana è non singolare (cfr. gli esercizi 19 e 20).

Per  $i \leq n - 1$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x_0) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i(\tau(x), x) \Big|_{x=x_0} = \delta_{ij} + \int_0^{\tau(x)} ds \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\varphi(s, x)) \Big|_{x=x_0} \\ &+ f_i(\varphi(\tau(x), x)) \frac{\partial}{\partial x_j} \tau(x) \Big|_{x=x_0} = \delta_{ij} + 0 + 0, \end{aligned} \quad (19.10)$$

poiché  $\psi_i$  è la  $i$ -esima componente di (19.2),  $\tau(x_0) = 0$  e  $f_i(x_0) = 0$  per  $i < n$ .

Quindi le (19.6) e (19.10) implicano che la matrice jacobiana  $J_{ij} = [\partial \psi_i / \partial x_j](x_0)$  associata al cambiamento di variabili (19.6) ha la forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{n1} & J_{n2} & J_{n3} & \dots & J_{n(n-1)} & -[f_n(x_0)]^{-1} \end{pmatrix} \quad (19.11)$$

dove gli elementi indicati con  $J_{nj}$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ , non sono esplicitati perché è inutile calcolarli: infatti, quale che sia la loro forma, segue immediatamente dalla (19.11) che  $\det J = -[f_n(x_0)]^{-1}$  e quindi la matrice jacobiana è non singolare.

Questo, unito ai commenti precedenti, implica che il cambiamento di coordinate (19.9) è invertibile e di classe  $C^k$  se  $f$  è di classe  $C^k$ .

Studiamo quindi la forma che assumono le equazioni (16.1) nelle nuove coordinate (19.6). Per costruzione si ha

$$\begin{cases} \psi_i(\varphi(t, x)) = \varphi_i(\tau(\varphi(t, x)), \varphi(t, x)) = \varphi_i(\tau(x) - t, \varphi(t, x)) \\ \quad = \varphi_i(\tau(x), \varphi(-t + t, x)) = \varphi_i(\tau(x), x) = \psi_i(x), \quad i = 1, \dots, n - 1, \\ \psi_n(\varphi(t, x)) = \tau(\varphi(t, x)) = \tau(x) - t = \psi_n(x) - t, \end{cases} \quad (19.12)$$

e quindi, per  $t$  sufficientemente piccolo (in modo che le soluzioni  $\varphi(t, x)$  di (16.1) con dati iniziali in  $B_\delta(x_0)$  non escano da  $B_\delta(x_0)$ ), si ha

$$\begin{cases} y_i(t) = \psi_i(\varphi(t, x)) = \psi_i(x) = y_i(0), & i = 1, \dots, n - 1, \\ y_n(t) = \psi_n(\varphi(t, x)) = \psi_n(x) - t = y_n(0) - t, \end{cases} \quad (19.13)$$

così che il flusso è della forma (19.2) con  $n_0 = (0, 0, \dots, 0, -1)$ , come è immediato verificare semplicemente derivando le (19.13) rispetto al tempo. ■

### Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati nel presente capitolo abbiamo seguito prevalentemente [Hirsch-Smale], Cap. 9, e [Dell'Antonio], Cap. III. In particolare i paragrafi §16, §18 e §19 seguono da vicino [Dell'Antonio], mentre il paragrafo §17, tranne che per

l'esempio discusso nell'osservazione 17.16, preso da [Dell'Antonio], è più simile alla trattazione svolta in [Hirsch-Smale]

Per i risultati di Analisi (cfr. i paragrafi §16.10÷§16.11 e §18.4÷§18.13), riportati con le relative dimostrazioni solo per completezza, si veda [Giusti1], Capp. 2 e 3; in particolare per le definizioni e le proprietà del massimo e minimo limite cfr. *e.g.* [Giusti1], Cap. 2.

Per il teorema della funzione implicita (il cui enunciato è riportato nel testo dell'esercizio 15) cfr. *e.g.* [Giusti2], Cap. 7. Per la disuguaglianza di Schwarz cfr. *e.g.* [Lang], Cap. 7.

Per le definizioni e proprietà delle varietà differenziali si può consultare qualsiasi testo di Geometria Differenziale; anche i pochi cenni in [Arnol'd2], Cap. IV, sono sufficienti. Per una trattazione più completa cfr. *e.g.* [Sernesi]. Si noti in ogni caso che in tutto il testo non si fa mai esplicitamente riferimento a varietà.

L'esempio 18.34 è preso da [Dell'Antonio], Cap. III. Gli esercizi 3 e 4 sono presi da [Hirsch-Smale], Cap. 5. Gli esercizi 11 e 12 sono ispirati a [Giusti1], Cap. 2.

## Esercizi

**Esercizio 1.** Dimostrare che l'orbita descritta da una traiettoria periodica è una curva chiusa. [*Suggerimento.* Si ricordi la rappresentazione parametrica delle curve.]

**Esercizio 2.** Dimostrare che tutti i punti di una traiettoria periodica hanno lo stesso periodo. [*Suggerimento.* Si usino le proprietà di gruppo della soluzione  $\varphi(t, x)$ ; cfr. l'osservazione 10.3.]

**Esercizio 3.** Dimostrare che se  $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definisce una norma sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ , allora  $E$  è continua. [*Soluzione.* Se  $N(\cdot) = |\cdot|$  è la norma euclidea standard il risultato è ovvio. In generale sia  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base standard in  $E$ . Per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  si ha  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  e quindi  $N(x) \leq |x_1| N(e_1) + \dots + |x_n| N(e_n)$ . Se  $M = \max\{N(e_1), \dots, N(e_n)\}$  e  $X(x) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ , si ha quindi  $N(x) \leq M(|x_1| + \dots + |x_n|) \leq MX(x) \leq M|x|$ , dove  $|\cdot|$  denota la norma euclidea standard. Per la disuguaglianza triangolare  $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ , quindi per  $x \rightarrow y$ , si ha  $N(x) \rightarrow N(y)$ .]

**Esercizio 4.** Dimostrare l'equivalenza delle norme in  $\mathbb{R}^n$ . [*Soluzione.* È sufficiente dimostrare che, comunque sia data una norma  $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , esistono due costanti  $A$  e  $B$  tali che risulti  $A|x| < N(x) < B|x|$ , dove  $|\cdot|$  è la norma euclidea standard. Poiché  $N$  è continua (cfr. l'esercizio 3), raggiungerà un massimo  $B$  e un minimo  $A$  sulla frontiera dell'intorno  $B_1(0)$ , *i.e.* sull'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ . Se  $x = 0$  si ha  $N(x) = 0$  e quindi non c'è nulla da dimostrare. Se  $x \neq 0$  si ha  $\alpha = |x| \neq 0$  e quindi  $N(x) = \alpha N(\alpha^{-1}x)$ , dove  $|\alpha^{-1}x| = 1$ , così che  $A \leq N(\alpha^{-1}x) \leq B$ . In conclusione si è trovato  $A \leq \alpha^{-1}N(x) \leq B$ , da cui segue l'asserto.]

**Esercizio 5.** Dato il sistema dinamico  $\dot{\theta} = \cos \theta - 1$ , con  $\theta \in \mathbb{T}$ , trovare la soluzione con dato iniziale  $\bar{\theta}$ . [*Soluzione.* Tenendo conto che  $1/\sin^2 x$  è la derivata di  $-\cot x$ , per separazione di variabili si trova  $\cot(\theta(t)/2) - \cot(\bar{\theta}/2) = t$ , da cui si ottiene  $\theta(t) = 2\operatorname{arccot}[t + \cot(\bar{\theta}/2)]$ .]

**Esercizio 6.** Dimostrare che, data una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$ , se si definisce

$$Q(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0)(x - x_0),$$

allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|Q(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

**Esercizio 7.** Dimostrare che le (17.15) definiscono un prodotto scalare. [*Suggerimento.* Si usi la definizione di prodotto scalare data nel paragrafo §2.2.]

**Esercizio 8.** Dimostrare le (17.16).

**Esercizio 9.** Dimostrare la (17.39). [*Soluzione.* Tenendo conto delle (17.35) e (17.36) si ha

$$\begin{aligned} a \langle x_1, f_1(x) \rangle - 2b \langle x_2, f_2(x) \rangle &= a \langle x_1, A_1 x_1 \rangle - 2b \langle x_2, A_2 x_2 \rangle + a \langle x_1, Q_1(x) \rangle - 2b \langle x_2, Q_2(x) \rangle \\ &\geq a^2 |x_1|^2 - (a + 2b) \varepsilon |x|^2 \geq [a^2 d - (a + 2b) \varepsilon] |x|^2, \end{aligned}$$

così che se si pone  $\varepsilon \leq a^2 d / [2(a + 2b)]$  si ottiene la (17.39).]

**Esercizio 10.** Dato un sistema dinamico  $\dot{x} = f(x)$  in  $\mathbb{R}^n$  sia  $A$  un insieme compatto connesso di  $\mathbb{R}^n$  tale che il campo vettoriale  $f$ , in ogni punto della frontiera  $\partial A$  di  $A$  è diretto verso l'interno; cfr. la figura. Dimostrare che l'insieme  $A$  è positivamente invariante. [*Suggerimento.* Si usi l'osservazione 10.9 del capitolo 3.]

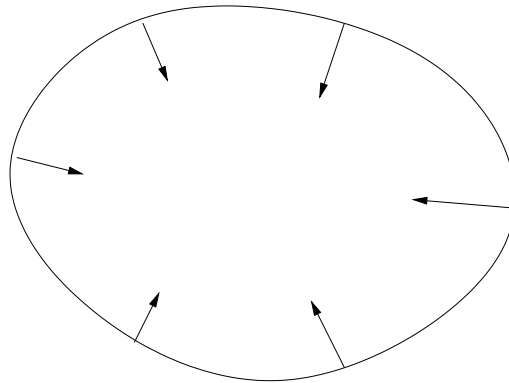


FIGURA. Situazione prevista nella discussione dell'esercizio 10.

**Esercizio 11.** Dimostrare che (17.52) è soluzione di (17.51). [*Suggerimento.* Per separazione di variabili.]

**Esercizio 12.** Dimostrare che un numero  $L$  è il massimo limite di una successione reale  $\{t_k\}$  se e solo se  $\forall \varepsilon > 0$  (1) esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $t_k < L + \varepsilon$  e (2) per infiniti  $k$  si ha  $t_k > L - \varepsilon$ . [*Suggerimento.* La proprietà (1) significa che ogni numero maggiore di  $L$  è un maggiorante definitivo, mentre la proprietà (2) significa che per ogni  $\varepsilon > 0$  il numero  $L - \varepsilon$  non è un maggiorante definitivo.]

**Esercizio 13.** Dimostrare che un numero  $\ell$  è il minimo limite di una successione reale  $\{t_k\}$  se e solo se  $\forall \varepsilon > 0$  (1) esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $t_k > \ell - \varepsilon$  e (2) per infiniti  $k$  si ha  $t_k < \ell + \varepsilon$ . [*Suggerimento.* Ragionare analogamente a quanto fatto per l'esercizio 12.]

**Esercizio 14.** Dimostrare che l'insieme  $U$  definito in (18.15) è aperto. [*Soluzione.* La funzione

158 CAPITOLO 4. ANALISI QUALITATIVA DEL MOTO E STABILITÀ

$W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e l'insieme  $U$  è la controimmagine secondo  $W$  di un insieme aperto (l'intervallo  $(-\infty, \alpha(\varepsilon)/2)$ ): quindi è un insieme aperto.]

**Esercizio 15.** Dato un sistema dinamico  $\dot{x} = f(x)$  in  $\mathbb{R}^n$ , supponiamo che esista una costante del moto  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0$  un punto di minimo o di massimo relativo per  $H$ . Dimostrare che  $x_0$  è un punto d'equilibrio stabile per il sistema. [Suggerimento. Verificare che si può scegliere  $\pm(H(x) - H(x_0))$  come funzione di Ljapunov e quindi applicare il teorema 18.20.]

**Esercizio 16.** Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale con energia potenziale (18.18): si dimostri che  $(q, \dot{q}) = (0, 0)$  è un punto d'equilibrio stabile. [Suggerimento. Si studi il comportamento delle curve di livello per valori di energia vicini a zero.]

**Esercizio 17.** Il teorema della funzione implicita afferma che, dato un insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$  e data una funzione  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  di classe  $C^k$ , se nel punto  $(x_0, y_0) \in A$  si ha  $F(x_0, y_0) = 0$  e  $\det[\partial F/\partial y](x_0, y_0) \neq 0$ , allora si può determinare un intorno  $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $x \in U$  esiste un unico  $y = f(x) \in V$  tale che  $F(x, y) = 0$ . Inoltre  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  è di classe  $C^k$ . Si verifichi che tale teorema si può applicare nello studio della funzione (19.4) nel paragrafo §19.

**Esercizio 18.** Nelle ipotesi del teorema enunciato nell'esercizio 17 dimostrare che risulta  $[\partial f/\partial x](x) = -([\partial F/\partial y](x, f(x))]^{-1} [\partial F/\partial x](x, f(x))$ . [Soluzione. Poiché  $F(x, f(x)) = 0$  per ogni  $x \in U$  la derivata totale rispetto a  $x$  è nulla, quindi  $[\partial F/\partial x](x, f(x)) + ([\partial F/\partial y](x, f(x)))[\partial f/\partial x](x) = 0$ .]

**Esercizio 19.** Dimostrare che se l'applicazione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^1$  allora se la matrice jacobiana è non singolare in  $x_0$  l'applicazione  $f$  è invertibile in un intorno di  $x_0$  e la sua inversa  $f^{-1}$  è di classe  $C^1$  in un intorno di  $y_0 = f(x_0)$ . [Soluzione. Data un'applicazione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la sua inversa  $g = f^{-1}$  è formalmente definita da  $g \circ f = 1$ , ovvero, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  si deve avere  $g(f(x)) = x$ . Derivando si ottiene quindi

$$\frac{\partial g}{\partial y}(f(x)) \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \mathbb{1},$$

dove  $\partial g/\partial y$ ,  $\partial f/\partial x$  e la matrice identità  $\mathbb{1}$  sono matrici  $n \times n$  ( $[\partial g/\partial y](f(x))$  indica che si deve derivare  $g$  rispetto al suo argomento  $y$  e calcolare la derivata in  $y = f(x)$ ). Si deve quindi avere

$$\frac{\partial g}{\partial y}(f(x)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right)^{-1}.$$

Se  $\det([\partial f/\partial x](x_0)) \neq 0$ , esiste un intorno di  $x_0$  in cui la matrice  $[\partial f/\partial x](x)$  è invertibile. Quindi l'applicazione  $g$  è ben definita e regolare, ed è di classe  $C^1$  se  $f$  è di classe  $C^1$ .]

**Esercizio 20.** Dimostrare che se l'applicazione  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^k$  allora se la matrice jacobiana è non singolare in  $x_0$  l'applicazione  $\psi$  è invertibile in un intorno di  $x_0$  e la sua inversa  $f^{-1}$  è di classe  $C^k$  in un intorno di  $y_0 = f(x_0)$ . [Suggerimento. Ragionare come per l'esercizio precedente, definendo formalmente la derivata di ordine  $k$  di  $g = f^{-1}$  e mostrando che è ben definita e di classe  $C^k$  se la matrice jacobiana è invertibile.]

**Esercizio 21.** Si dimostri, utilizzando il teorema di Ljapunov, che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile per il sistema (17.51) con  $\varepsilon < 0$ . [Suggerimento. Si usi come funzione di Ljapunov la funzione  $W(x) = |x|^2$ .]

**Esercizio 22.** Utilizzare il teorema 18.29 per dimostrare che l'origine  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile per l'oscillatore armonico forzato smorzato (9.18).