
Capitolo 9. Vincoli e sistemi rigidi

35. Vincoli

35.1. Introduzione. Nel presente capitolo introdurremo due nozioni fondamentali della Meccanica Classica: quella di vincolo e quella di sistema rigido.

Da un punto di vista concettuale, la definizione di sistema rigido richiede di introdurre preliminarmente il concetto di vincolo olonomo bilatero, e così noi faremo. Notiamo però che, fin tanto che si vogliano studiare solo le proprietà configurazionali o cinematiche dei sistemi rigidi, si potrebbero considerare i vincoli delle semplici “relazioni a priori” sulle coordinate (e eventualmente sulle velocità) dei punti materiali che costituiscono il sistema, quali di fatto essi sono, senza approfondirne ulteriormente l’analisi.

Tuttavia non appena ci si interessi alle proprietà dinamiche dei sistemi rigidi, occorre analizzare le conseguenze che tali relazioni a priori hanno sul moto dei punti. Si può quindi comprendere che, visto che in ogni caso uno studio più “fisico” diventa prima o poi necessario, tanto vale partire dalle definizioni e dalle proprietà dei sistemi vincolati in generale (*i.e.* di sistemi che soddisfino appunto dette relazioni a priori), e quindi procedere allo studio dei sistemi rigidi che costituiscono un caso particolare di sistemi vincolati.

Dopo aver dato nel presente paragrafo la definizione di vincolo, la specificheremo nel prossimo al caso dei sistemi rigidi. Studieremo successivamente quelle proprietà dei sistemi rigidi che discendono direttamente dalle relazioni matematiche che definiscono i vincoli. Chi volesse ignorare qualsiasi accenno alla teoria dei vincoli e studiare solo i sistemi rigidi dovrebbe quindi, per poterne studiare le caratteristiche dinamiche (quali quelle accennate in questo e nel prossimo capitolo), assumere direttamente la validità delle equazioni cardinali della dinamica discusse nel paragrafo §40.

Lo studio dei sistemi vincolati costituisce un aspetto non banale della Meccanica Classica. Noi seguiremo un approccio assiomatico: daremo una definizione astratta di vincolo e faremo vedere che l’introduzione di un nuovo principio in Meccanica Classica (il principio di d’Alembert) consente di estendere i risultati validi per punti materiali non vincolati al caso di sistemi vincolati.

Si potrebbe anche seguire un approccio differente, facendo vedere che i sistemi vincolati si possono ottenere attraverso un procedimento di limite a partire da sistemi non vincolati soggetti a forze particolarmente intense, senza che quindi sia necessario

introdurre nuovi principi o postulati oltre a quelli consueti della Dinamica: per una discussione lungo le linee di un simile approccio rimandiamo ai testi citati nella nota bibliografica.

35.2. Notazioni. Consideriamo un sistema meccanico costituito da N punti materiali nello spazio euclideo tridimensionale e scegliamo un sistema di assi cartesiani in cui i punti siano descritti dalle coordinate $x_j^{(n)}$, con $n = 1, \dots, N$ e $j = 1, 2, 3$. Indichiamo con x la collezione delle $3N$ coordinate $\{x_j^{(n)}\}$ e, analogamente, con \dot{x} la collezione delle $3N$ velocità corrispondenti $\{\dot{x}_j^{(n)}\}$. Con i simboli $\mathbf{x}^{(n)}$ e $\dot{\mathbf{x}}^{(n)}$ indicheremo invece i vettori in \mathbb{R}^3 di componenti, rispettivamente, $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ e $(\dot{x}_1^{(n)}, \dot{x}_2^{(n)}, \dot{x}_3^{(n)})$.

In generale, dati N vettori $\mathbf{f}^{(1)}, \dots, \mathbf{f}^{(N)}$ in \mathbb{R}^3 indicheremo con f la collezione delle $3N$ componenti $f_j^{(n)}$, con $n = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, 3$. Analogamente, data una funzione scalare $F: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$, indicheremo con ∇F il vettore di componenti $\partial F / \partial x_j^{(n)}$, con $n = 1, \dots, N$ e $j = 1, 2, 3$. A volte useremo la stessa notazione anche per vettori appartenenti a sottospazi di \mathbb{R}^{3N} ; per esempio, dato $(G_1, \dots, G_M) \in \mathbb{R}^M$, con $M \leq 3N$, scriveremo $G = (G_1, \dots, G_M)$.

Se due vettori $f, g \in \mathbb{R}^{3N}$ si ottengono, rispettivamente, da N vettori $\mathbf{f}^{(n)} = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)})$ e $\mathbf{g}^{(n)} = (g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, g_3^{(n)})$, con $n = 1, \dots, N$, in \mathbb{R}^3 , scriveremo

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^N \langle \mathbf{f}^{(n)}, \mathbf{g}^{(n)} \rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 f_k^{(n)} g_k^{(n)}, \quad (35.1)$$

dove il secondo prodotto scalare è in \mathbb{R}^3 e il primo, per estensione, indica il prodotto scalare indotto in \mathbb{R}^{3N} . A volte useremo la stessa notazione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ per indicare il prodotto scalare in generale in \mathbb{R}^q , con $q \in \mathbb{N}$: specificheremo sempre il valore di q qualora possa insorgere confusione.

Data un'applicazione Φ da $A \subset \mathbb{R}^{q_1}$ a $B \subset \mathbb{R}^{q_2}$ di classe C^k , con $q_1, q_2, k \in \mathbb{N}$, scriveremo che Φ è in $C^k(A, B)$.

35.3. DEFINIZIONE (VINCOLI). *Dato un sistema meccanico costituito da N punti materiali, chiameremo vincoli delle relazioni a priori della forma*

$$G_m(x, \dot{x}, t) \geq 0, \quad m = 1, \dots, M \leq 3N, \quad (35.2)$$

sulle coordinate e sulle velocità dei punti.

35.4. DEFINIZIONE (VINCOLI BILATERI). *Chiameremo vincoli bilateri quei vincoli in cui*

$$G_m(x, \dot{x}, t) = 0, \quad m = 1, \dots, M \leq 3N, \quad (35.3)$$

i.e. tali che le relazioni (35.1) valgano con il segno uguale.

35.5. DEFINIZIONE (VINCOLI OLONOMI). *Chiameremo vincoli olonomi quei vincoli in cui*

$$G_m(x, t) \geq 0, \quad m = 1, \dots, M \leq 3N, \quad (35.4)$$

i.e. tali che nelle relazioni (35.1) compaiano solo le variabili posizione. Se si ha

$$G_m(x, t) = 0, \quad m = 1, \dots, M \leq 3N, \quad (35.5)$$

diremo che il vincolo è un vincolo olonomo bilatero.

35.6. DEFINIZIONE (VINCOLI ANOLONOMI). *Un vincolo è detto vincolo anolonomo se non è olonomo.*

35.7. ESEMPLI. Un esempio di vincolo bilatero è costituito da un punto materiale vincolato a giacere su un piano prefissato; se invece il punto non può scendere al di sotto del piano ma può muoversi anche al di sopra di esso, abbiamo un esempio di vincolo non bilatero. Un esempio di vincolo anolonomo è dato dal moto di rotolamento senza strisciamento, definito nel paragrafo §35.8 e discusso nel paragrafo §41.

35.8. DEFINIZIONE (ROTOLOAMENTO SENZA STRISCIAMENTO). *La condizione di rotolamento senza strisciamento si ha quando, nel moto di due superfici lisce Σ_1 e Σ_2 , che hanno in ogni istante un solo punto di contatto P , la velocità di P guardato come punto di Σ_1 è uguale alla velocità di P guardato come punto di Σ_2 .*

35.9. DEFINIZIONE (VINCOLI OLONOMI BILATERI REGOLARI E INDIPENDENTI). *Definiremo regolari quei vincoli olonomi bilateri descritti dalle equazioni (35.5), in cui le funzioni G_m , $m = 1, \dots, M$, siano di classe C^2 e $\nabla G_m \neq 0$ nei punti in cui valgono le (35.5). Diremo che tali vincoli sono indipendenti se, nei punti in cui valgono le (35.5), la relazione*

$$\sum_{m=1}^M c_m \nabla G_m = 0 \quad (35.6)$$

è soddisfatta se e solo se $c_m = 0 \forall m = 1, \dots, M$.

35.10. DEFINIZIONE (FORZE VINCOLARI). *In presenza di vincoli olonomi bilateri (35.4), le equazioni di Newton che descrivono la dinamica del sistema considerato saranno scritte nella forma*

$$m_n \ddot{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)} + \mathbf{f}_V^{(n)}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (35.7)$$

dove $\mathbf{f}^{(n)}$ è la forza attiva applicata al punto materiale di coordinate $\mathbf{x}^{(n)}$ e di massa m_n , mentre $\mathbf{f}_V^{(n)}$ rappresenta la forza che viene esercitata su tale punto per effetto dei vincoli, i.e. per fare in modo che le condizioni imposte dai vincoli siano rispettate. Tale forza prende il nome di forza vincolare (o reazione vincolare) che agisce sul punto considerato.

35.11. La schematizzazione dell'effetto dei vincoli tramite la (35.7) deve essere fatta in modo compatibile. In primo luogo i dati iniziali devono soddisfare le condizioni

(35.5). Inoltre le forze vincolari devono essere tali che le traiettorie generate $x(t)$ devono a ogni istante soddisfare ancora i vincoli (35.5). Questo implica che in generale le forze vincolari debbano dipendere non solo dalle posizioni ma anche dalle velocità dei punti. Inoltre le condizioni di compatibilità non determinano univocamente le forze vincolari: infatti le (35.7) e (35.5) costituiscono un sistema di $3N + M$ equazioni nelle $6N$ incognite x e f_V , e quindi non c'è unicità della soluzione. A meno che non sia $M = 3N$, nel qual caso però la compatibilità richiede che gli N punti materiali siano tutti in posizioni che variano con il tempo in modo preassegnato e quindi la dinamica diventa banale: in particolare se i vincoli sono indipendenti dal tempo i punti materiali sono in posizioni fisse. Perché il problema sia ben posto (*i.e.* perché sia possibile che la soluzione esista e sia unica, per ogni dato iniziale compatibile con i vincoli), occorre quindi imporre qualche condizione aggiuntiva: questo sarà fatto attraverso il principio di d'Alembert (cfr. il paragrafo §39).

35.12. Osservazione. Possiamo scrivere le (35.7) in modo più compatto introducendo la *matrice di massa* m , *i.e.* la matrice diagonale in $M(3N, \mathbb{R})$ la cui diagonale principale ha i primi tre elementi uguali a m_1 , i successivi tre uguali a m_2 e così via, e ricordando le notazioni del paragrafo §35.2,

$$m\ddot{x} = f + f_V, \quad x \in \mathbb{R}^{3N}. \quad (35.8)$$

In generale possiamo anche supporre che la matrice m non sia diagonale, purché sia invertibile.

35.13. DEFINIZIONE (SUPERFICIE DI VINCOLO). *Dato un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi bilateri indipendenti, chiameremo superficie di vincolo al tempo t_0 la superficie $\Sigma \equiv \Sigma(t_0)$ di codimensione M in \mathbb{R}^{3N} , individuata dalle M condizioni (35.5) all'istante t_0 .*

35.14. Osservazione. Se i vincoli sono indipendenti e regolari (cfr. la definizione 35.9), la superficie di vincolo è una superficie regolare (come semplice conseguenza del teorema della funzione implicita; cfr. l'esercizio 1). Questo vuol dire che per ogni istante t_0 e per ogni $x_0 \in \Sigma = \Sigma(t_0)$ è possibile trovare un intorno U_0 di x_0 e una trasformazione invertibile Ξ in $C^2(\Omega, U_0)$, dove Ω è un insieme aperto convesso di \mathbb{R}^{3N} contenente l'origine, tali che i punti di U_0 sono dati da $x = \Xi(\beta)$ con $\beta \in \Omega$. Diremo che (U_0, Ξ) è un sistema di coordinate regolari, e chiameremo Ω la *base* del sistema di coordinate.

35.15. DEFINIZIONE (SISTEMA DI COORDINATE ADATTATO). *Se la superficie di vincolo $\Sigma = \Sigma(t_0)$ è regolare, allora in ogni istante t_0 , è sempre possibile scegliere il sistema di coordinate (U_0, Ξ) in modo tale che i punti di $U_0 \cap \Sigma$ siano descritti dalle coordinate $\beta \in \Omega$ con*

$$\beta_1 = \dots = \beta_M = 0, \quad (35.9)$$

se M è la codimensione della superficie: diremo allora che il sistema di coordinate locali regolari (U_0, Ξ) è adattato a Σ .

35.16. Osservazione. Se i vincoli dipendono esplicitamente dal tempo la superficie di vincolo varia nel tempo. Si noti anche che tale superficie è una superficie nello spazio delle configurazioni \mathbb{R}^{3N} e non nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 (a meno che non sia $N = 1$).

35.17. DEFINIZIONE (TRAIETTORIA VIRTUALE PER VINCOLI OLONOMI BILATERI). Dato un sistema meccanico sottoposto a vincoli olonomi bilateri (35.5) e un punto $x(t_0) \in \Sigma(t_0)$, definiremo traiettoria virtuale all'istante t_0 ogni parametrizzazione di classe C^2

$$\alpha \rightarrow x(\alpha; t_0), \quad -1 < \alpha < 1, \quad (35.10)$$

compatibile con le condizioni di vincolo e tale che $x(0; t_0) = x(t_0)$. Questo vuol dire che la parametrizzazione (35.10) deve essere tale che la relazione

$$G_m(x(\alpha; t_0), t_0) = 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (35.11)$$

sia soddisfatta per ogni $|\alpha| < 1$.

35.18. Osservazione. Le traiettorie virtuali al tempo t_0 sono quindi traiettorie compatibili con i vincoli quali essi sono al tempo t_0 . Quindi se i vincoli dipendono dal tempo, esse non corrispondono in generale a traiettorie del sistema. Al contrario se i vincoli sono indipendenti dal tempo si può utilizzare il tempo t come parametro α e la traiettorie virtuali coincidono con i moti (cinematicamente) possibili per il sistema. Si noti in ogni caso che le traiettorie virtuali sono differenti dalle traiettorie che corrispondono ai moti effettivi del sistema anche nel caso indipendente dal tempo: e.g. un punto materiale vincolato a rimanere su un piano e non soggetto ad altre forze si muoverà di moto rettilineo uniforme, laddove le traiettorie virtuali possono essere curve qualsiasi sul piano.

35.19. Osservazione. In luogo di $|\alpha| < 1$ potremmo imporre $\alpha \in I \subset \mathbb{R}$ in (35.10). La condizione $|\alpha| < 1$ non è però restrittiva poiché, se si ha $\alpha \in (a, b)$, è sempre possibile trovare una trasformazione invertibile di classe C^2 che ridefinisce il parametro α come $\alpha' \in (-1, 1)$, con $x(\alpha'; t)$ tale che $x(0; t_0) = x(t_0)$.

35.20. Osservazione. Se invece di un sistema meccanico in \mathbb{R}^3 , consideriamo un sistema in \mathbb{R}^2 nulla cambia nella discussione successiva a meno di cambiare $3N$ con $2N$. Dal punto di vista matematico, un sistema piano si può sempre considerare come un sistema in \mathbb{R}^3 con il vincolo che per ogni punto materiale $\mathbf{x}^{(n)}$ si debba avere $x_3^{(n)} = 0$.

36. Sistemi rigidi

36.1. Introduzione. Ricordiamo che, in generale, dato un sistema a N gradi di libertà, diremo *spazio delle configurazioni* il sottoinsieme di \mathbb{R}^N in cui sono definiti gli N parametri che individuano i possibili stati del sistema (configurazioni); cfr. il paragrafo §6.1.

36.2. DEFINIZIONE (SISTEMA RIGIDO). Per sistema rigido (o corpo rigido o solido) si intende un sistema di punti materiali sottoposti alla condizione che le distanze tra ogni coppia di punti è costante. Quindi, se $\{\mathbf{q}_i\}_{i=1}^N$ è l'insieme delle coordinate dei punti, si ha

$$|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j| = r_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N, \quad (36.1)$$

dove la matrice simmetrica di elementi r_{ij} è costante. Le relazioni (36.1) prendono il nome di vincoli rigidi o vincoli di rigidità.

36.3. Osservazione. Poiché $r_{ii} = 0$ e $r_{ij} = r_{ji}$, le (36.1) costituiscono $N(N-1)/2$ relazioni: esse non sono però indipendenti l'una dell'altra, come implica il seguente risultato.

36.4. TEOREMA. Lo spazio delle configurazioni di un sistema rigido è lo spazio a sei dimensioni $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$, se nel sistema rigido ci sono almeno tre punti non collineari. Se tutti i punti del sistema rigido sono collineari, lo spazio delle configurazioni è lo spazio $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(2)$.

36.5. Dimostrazione del teorema 36.4. Siano $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ e \mathbf{q}_3 tre punti del sistema che non giacciono sulla stessa retta. Sia dato un sistema di riferimento costituito da una terna di versori ortogonali tale che il suo primo versore sia diretto come $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ e il secondo dalla parte dove si trova \mathbf{q}_3 , rispetto a $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$, nel piano contenente i tre punti.

Dalle condizioni (36.1) segue che la posizione di tutti gli altri punti del sistema è determinata in modo univoco dalle posizioni di $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ (l'eventuale ambiguità derivante dalla riflessione rispetto al piano individuato da $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ si risolve tenendo conto che le due configurazioni non sono ottenibili l'una dall'altra mediante una trasformazione rigida). Infatti, consideriamo un punto \mathbf{q}_j , con $j > 3$, e.g. \mathbf{q}_4 . Poiché $|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4| = r_{14}$, il punto \mathbf{q}_4 deve trovarsi sulla superficie della sfera di raggio r_{14} e centro in \mathbf{q}_1 . Analogamente si vede che deve trovarsi sulla superficie della sfera di raggio r_{24} e centro in \mathbf{q}_2 ; l'intersezione delle due superfici sferiche determina una circonferenza \mathcal{C} (eventualmente degenerare in un solo punto). Poiché abbiamo anche il vincolo $|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4| = r_{34}$, il punto \mathbf{q}_4 deve anche trovarsi sulla superficie della sfera di raggio r_{34} e centro in \mathbf{q}_3 : l'ulteriore vincolo determina due punti sulla circonferenza \mathcal{C} (eventualmente coincidenti). Se tali punti sono distinti, le due configurazioni che a essi corrispondono non si possono ottenere l'una dall'altra mediante una trasformazione

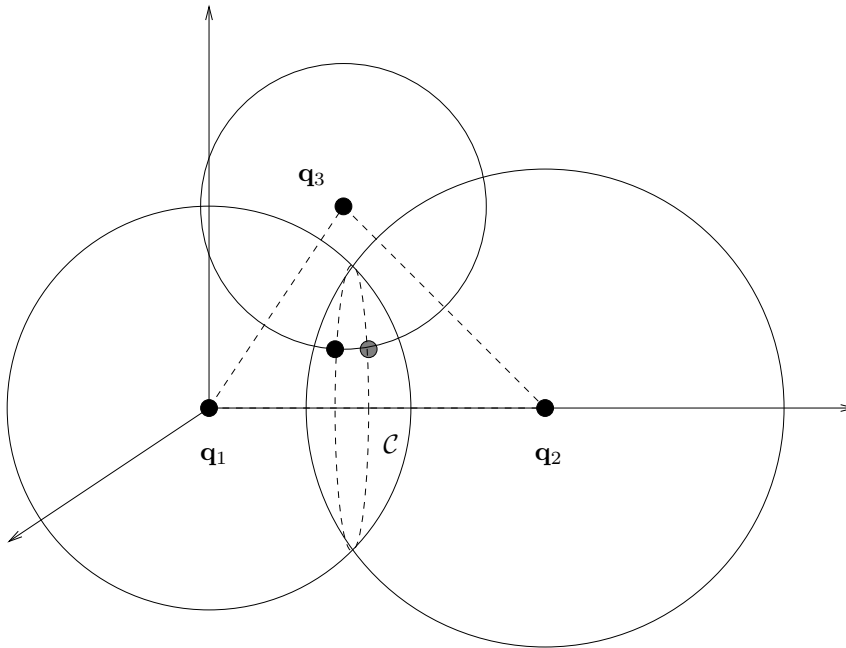


FIGURA 36.1. Discussione del teorema 36.3. Dati i tre punti $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ e \mathbf{q}_3 , risultano geometricamente possibili due configurazioni per \mathbf{q}_4 (una segnata in nero e una segnata in grigio). Poiché esse non si possono ottenere l'una dall'altra attraverso una trasformazione rigida, solo una (e.g. quella segnata in nero) corrisponde a una configurazione possibile per il sistema.

rigida. Cfr. la figura 36.1.

Quindi la configurazione del sistema rigido risulta determinata, poiché $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ individuano una terna di riferimento e ogni terna si ottiene da una terna fissata mediante la composizione di una rotazione con una traslazione: questo implica che lo spazio di tutte le terne di riferimento è isomorfo a $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$.

Se i punti sono tutti collineari, è sufficiente determinare la direzione della retta $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$: tutti gli altri punti giaceranno lungo tale retta, e saranno univocamente determinati dalle condizioni (36.1). Quindi lo spazio delle configurazioni è dato da $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(2)$. ■

36.6. DEFINIZIONE (SISTEMA RIGIDO CON UN PUNTO FISSO). Per sistema rigido con un punto fisso si intende un sistema rigido con il vincolo supplementare che uno dei punti, e.g. \mathbf{q}_1 , abbia coordinate costanti.

36.7. COROLLARIO. Lo spazio delle configurazioni di un sistema rigido con un punto fisso è lo spazio a tre dimensioni $\text{SO}(3)$, se nel sistema rigido ci sono almeno tre

punti non collineari. Se tutti punti del sistema rigido sono collineari, lo spazio delle configurazioni è dato da $SO(2)$.

36.8. *Dimostrazione del corollario 36.7.* Segue dal teorema 36.2, tenuto conto che l'origine della terna di riferimento è fissata dalla condizione che le coordinate \mathbf{q}_1 siano costanti. ■

36.9. DEFINIZIONE (CENTRO D'INERZIA). *Dato un sistema rigido costituito da N punti di coordinate $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$, definiamo centro d'inerzia (o centro di massa) del sistema rigido il punto O di coordinate*

$$\mathbf{q}_O = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i, \quad (36.2)$$

dove m_i è la massa del punto in \mathbf{q}_i e $m = \sum_{i=1}^N m_i$ è la massa del sistema rigido.

36.10. COROLLARIO. *Per individuare la configurazione di un sistema rigido, è sufficiente descrivere il moto di un sistema di riferimento mobile K , solidale con il sistema rigido, rispetto a un sistema di riferimento fisso κ . Se il sistema rigido ha un punto fisso il moto si riduce a una rotazione.*

36.11. *Dimostrazione del corollario 36.10.* Segue dal teorema 36.4 e dal corollario 36.7. ■

36.12. LEMMA. *I sistemi rigidi sono caratterizzati dalla circostanza che, in ogni istante, le velocità di due quali si vogliano punti del sistema hanno la stessa componente lungo la retta congiungente i due punti.*

36.13. *Dimostrazione del lemma 36.12.* Scrivendo la (36.1) nella forma

$$\langle \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j \rangle = r_{ij}^2, \quad (36.3)$$

e derivando rispetto al tempo, otteniamo

$$\left\langle \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j, \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} \right\rangle = \left\langle \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j, \frac{d\mathbf{q}_j}{dt} \right\rangle, \quad (36.4)$$

da cui segue l'asserto; cfr. la figura 36.2. ■

36.14. LEMMA. *Sia O un punto qualsiasi solidale con un sistema rigido e sia \mathbf{v}_O la velocità che esso ha rispetto a un sistema di riferimento fisso. Se indichiamo con \mathbf{v}_P la velocità di un punto P del sistema rigido, si ha*

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O], \quad (36.5)$$

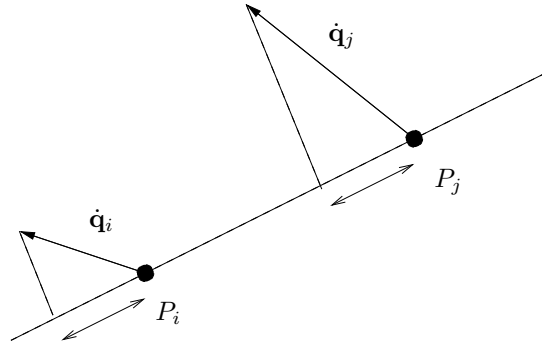


FIGURA 36.2. Situazione prevista nella discussione del lemma 36.12.

dove \mathbf{q}_P e \mathbf{q}_O indicano i vettori posizione dei punti P e O .

36.15. *Dimostrazione del lemma 36.14.* Segue dal teorema 33.39 del capitolo 8, scegliendo il sistema di riferimento solidale con il sistema rigido con l'origine coincidente con O (così che $\mathbf{r} = \mathbf{q}_O$ e $\mathbf{v}_0 \equiv \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_O$) e tenendo conto che nel sistema solidale con il sistema rigido ogni suo punto è in quiete, così che, nella (33.46), si ha $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$. ■

36.16. DEFINIZIONE (ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE E ASSE DI MOTO). *Nel moto di un sistema rigido, in ogni istante in cui il moto non è puramente traslatorio, si definisce asse istantaneo di rotazione rispetto al punto O la retta parallela a $\boldsymbol{\omega}$ passante per il punto O , mentre si definisce asse di moto (o asse di Mozzi) il luogo dei punti la cui velocità è in quell'istante parallela alla determinazione istantanea della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ o nulla.*

36.17. Dalla definizione si vede che che l'asse istantaneo di rotazione e l'asse di moto sono indeterminati in tutti e soli quegli istanti in cui il moto è puramente traslatorio.

L'asse istantaneo di rotazione è il luogo dei punti P di coordinate $\mathbf{q}_P = \mathbf{q}_O + c\boldsymbol{\omega}$, con $c \in \mathbb{R}$, così che $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O$ (cfr. la (36.5)); cfr. la figura 36.3. Si noti che se O è l'origine del sistema di riferimento mobile K solidale con il sistema rigido l'asse istantaneo di rotazione rispetto a O coincide con l'asse istantaneo di rotazione definito nell'osservazione 33.36.

L'asse di moto è invece il luogo dei punti P di coordinate \mathbf{q}_P tali che $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O] = c\boldsymbol{\omega}$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Poiché $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O]$ è ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$, se scomponiamo \mathbf{v}_O in una componente \mathbf{v}_O^{\parallel} parallela a $\boldsymbol{\omega}$ e in una componente perpendicolare \mathbf{v}_O^{\perp} , deve risultare, separatamente

$$\mathbf{v}_O^{\parallel} = c\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{v}_O^{\perp} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O] = \mathbf{0}, \quad (36.6)$$

dove la prima identità individua univocamente il parametro c , i.e. $c = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_O^{\parallel} \rangle / |\boldsymbol{\omega}|^2$, mentre la seconda fissa \mathbf{q}_P a un valore $\mathbf{q}_P = \mathbf{q}_{P^*} + c'\boldsymbol{\omega}$, con $c' \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{q}_{P^*} \perp \boldsymbol{\omega}$.

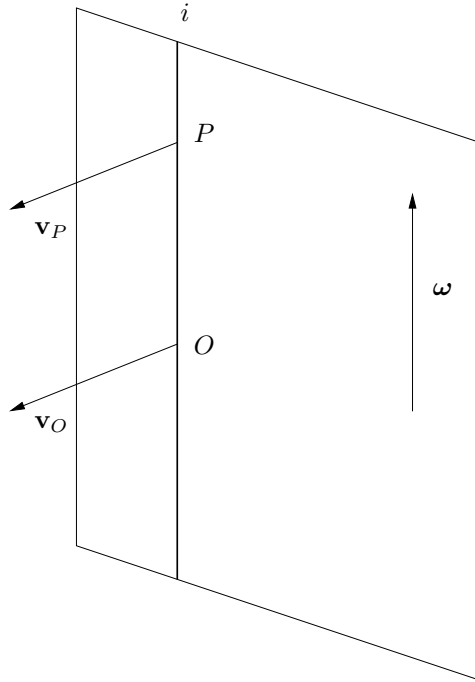


FIGURA 36.3. Rappresentazione dell'asse istantaneo di rotazione i rispetto al punto O . Tutti i punti P di i hanno la stessa velocità di O : $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O$.

ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$ e tale che $|\mathbf{q}_{P^*} - \mathbf{q}_O| = |\mathbf{v}_O^\perp|/|\boldsymbol{\omega}|$. Resta così individuato, in maniera univoca un punto P^* ; cfr. la figura 36.4.

Risulta anche che l'asse istantaneo di rotazione e l'asse di moto coincidono ogni qual volta si scelga come punto O un punto la cui velocità \mathbf{v}_O sia diretta parallelamente al vettore $\boldsymbol{\omega}$ o nulla; cfr. la figura 36.5. In particolare questo è possibile senz'altro quando il sistema è un sistema rigido con un punto fisso O .

36.18. Osservazione. In generale, dei due assi definiti nel paragrafo §36.16, anche se quello che ha la caratterizzazione analitica più semplice è l'asse istantaneo di rotazione, quello di più immediata interpretazione geometrica è invece l'asse di moto. Infatti, mentre l'asse istantaneo di rotazione dipende dalla scelta del punto O , l'asse di moto è invece intrinsecamente definito: comunque si fissi un punto O per applicare la (36.5) la determinazione dell'asse di moto non cambia.

Se O è un punto dell'asse di moto, così che \mathbf{v}_O è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, allora la velocità di ogni punto P ha una componente \mathbf{v}_O lungo la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ e una componente $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O]$ nel piano ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$ a $\mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O$. Istante per istante, la prima si può interpretare come una componente traslatoria, mentre la seconda corrisponde a una rotazione intorno all'asse di moto, poiché risulta ortogonale al piano contenente i due

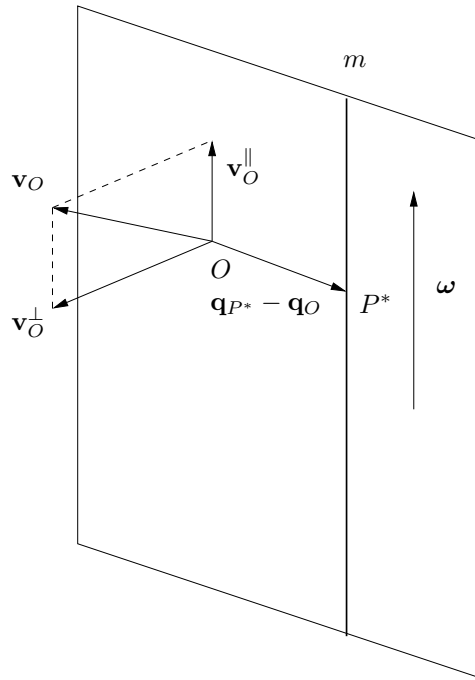


FIGURA 36.4. Rappresentazione dell'asse di moto m . Tutti i punti P di m hanno coordinate $\mathbf{q}_P = \mathbf{q}_{P^*} + c'\boldsymbol{\omega}$, al variare di $c' \in \mathbb{R}$, dove \mathbf{q}_{P^*} individua un punto P^* tale che $[\mathbf{q}_{P^*} - \mathbf{q}_O, \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{v}_O^\perp$.

vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O$; cfr. la figura 36.6

36.19. LEMMA. *Sia \mathbf{w} un qualsiasi vettore solidale con il sistema rigido (i.e. fisso nel sistema di riferimento K solidale con il sistema rigido); si ha allora*

$$\dot{\mathbf{w}} \equiv \frac{d\mathbf{w}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}] \quad (36.7)$$

in ogni istante. Più in generale, se \mathbf{w} non è fisso nel sistema solidale K , si ha

$$\dot{\mathbf{w}} = B\dot{\mathbf{W}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}], \quad (36.8)$$

se \mathbf{W} indica il vettore rappresentativo di \mathbf{w} nel sistema mobile, i.e. $\mathbf{w} = B\mathbf{W}$ (così che $B\dot{\mathbf{W}}$ denota la velocità di variazione del vettore \mathbf{w} nel sistema mobile).

36.20. Dimostrazione del lemma 36.19. Dato un vettore \mathbf{w} solidale con il sistema rigido, siano P_1 e P_2 i punti individuati dai due vettori \mathbf{q}_{P_1} e \mathbf{q}_{P_2} tali che $\mathbf{w} = \mathbf{q}_{P_1} - \mathbf{q}_{P_2}$. Dalla (36.5) si ottiene

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_{P_1} - \mathbf{q}_O) = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_{P_1} - \mathbf{q}_O], \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{q}_{P_2} - \mathbf{q}_O) = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_{P_2} - \mathbf{q}_O], \quad (36.9)$$

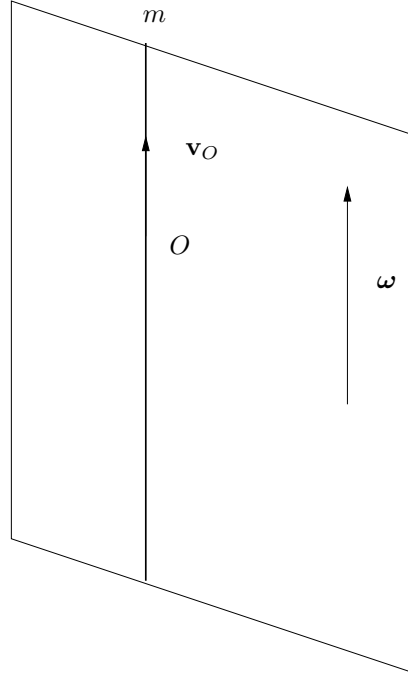


FIGURA 36.5. Rappresentazione dell'asse di moto m nel caso in cui si abbia \mathbf{v}_O parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ (così che $\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_O^{\parallel}$ e $\mathbf{v}_O^{\perp} = \mathbf{0}$). Si ha allora $\mathbf{q}_{P^*} = \mathbf{q}_O$ e l'asse di moto coincide con l'asse istantaneo di rotazione rispetto al punto O : i punti di m hanno tutti velocità parallela al vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$.

e quindi, sottraendo membro a membro le due equazioni (36.9), otteniamo

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{q}_{P_1} - \mathbf{q}_{P_2}) = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_{P_1} - \mathbf{q}_{P_2}], \quad (36.10)$$

da cui segue la (36.7).

Se \mathbf{w} non è fisso nel sistema di riferimento K , occorre estendere la formula (36.7) al caso di vettori che non siano fissi nel sistema mobile. Questo significa che occorre utilizzare la formula (33.46) del capitolo 8 senza porre $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$; si trova allora, ragionando come per la dimostrazione della (36.7), che la derivata temporale di un vettore \mathbf{w} nel sistema fisso differisce dalla derivata temporale nel sistema mobile per il vettore $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}]$, *i.e.* si ottiene la (36.8). ■

36.21. Osservazione. La (36.7), nel caso particolare in cui si scelga come vettore \mathbf{w} uno dei tre versori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ del sistema di riferimento K , dà le formule

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_1], \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_2], \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_3], \quad (36.11)$$

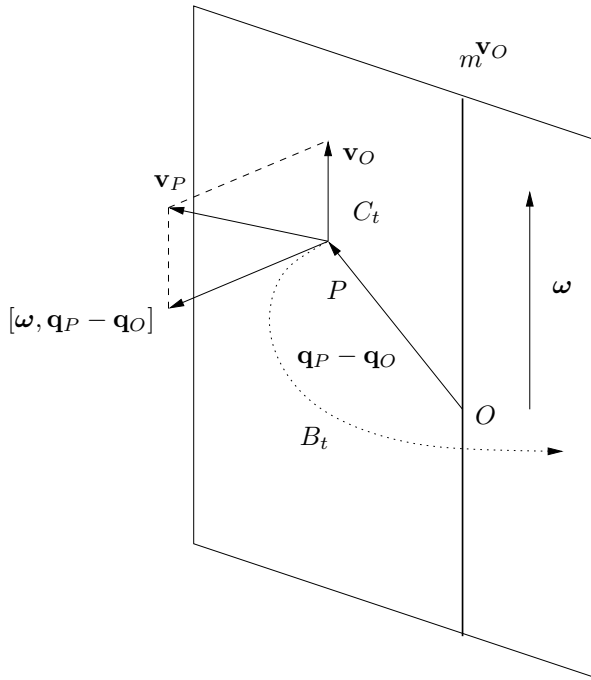


FIGURA 36.6. Caratterizzazione dell'asse di moto m . Se O è un punto di m per ogni punto P la velocità \mathbf{v}_P ha una componente \mathbf{v}_O parallela all'asse m e una componente ortogonale al piano individuato dall'asse m e dal vettore $\mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O$.

che sono note come *formule di Poisson*.

36.22. COROLLARIO. *Se durante il moto di un sistema rigido l'asse di moto ha direzione fissa entro il sistema di riferimento K solidale con esso, allora ha direzione fissa anche nel sistema di riferimento fisso, e viceversa. Più in generale la velocità angolare ha la stessa derivata temporale sia nel sistema di riferimento fisso sia nel sistema di riferimento solidale.*

36.23. Dimostrazione del corollario 36.22. Segue dal lemma 36.19 considerando $\mathbf{w} = \boldsymbol{\omega}$ e notando che $[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{0}$. In particolare se $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ allora $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$ e viceversa, se $\boldsymbol{\omega} = B\boldsymbol{\Omega}$. ■

36.24. TEOREMA. *Durante il moto di un sistema rigido, l'asse di moto negli istanti in cui è definito descrive una striscia di superficie rigata sia nel sistema fisso (rigata fissa) sia nel sistema solidale con il sistema rigido (rigata mobile); le due rigate*

rotolano l'una sull'altra toccandosi istante per istante lungo l'asse di moto.

36.25. *Dimostrazione del teorema 36.24.* Ricordiamo che si dice *rigata* una superficie che viene ottenuta facendo muovere una retta nello spazio (cfr. la nota bibliografica). Se il moto non è puramente traslatorio, l'asse di moto varia la sua posizione nel tempo sia nel sistema fisso sia nel sistema mobile, descrivendo quindi due superfici rigate (che degenerano in una retta se l'asse di moto si mantiene fisso).

Indichiamo con Λ la rigata nel sistema fisso (che chiameremo rigata fissa) e con L la rigata nel sistema mobile (che chiameremo rigata mobile). In ogni istante le due rigate hanno in comune la generatrice che costituisce l'asse di moto.

Indichiamo con l una curva tracciata sulla rigata mobile L , che intersechi in un solo punto le generatrici che istante per istante sono occupate dall'asse di moto, e consideriamo il moto di un punto P che, durante il moto del sistema rigido, si trovi in ogni istante sull'intersezione di l con l'asse di moto: P si muove per costruzione lungo l e in ogni istante appartiene all'asse di moto, quindi descriverà anche una curva λ sulla rigata fissa Λ (e ne interseca le generatrici in un solo punto). Indichiamo con \mathbf{u}_P la velocità con cui si muove P lungo la curva λ nel sistema fisso e con \mathbf{u}'_P la velocità con cui si muove lungo la curva l nel sistema mobile: tali velocità sono tangenti alle due curve λ e l , e quindi alle due rigate Λ e L . Cfr. la figura 36.7.

Il punto P è ovviamente fisso nel sistema di riferimento mobile (*i.e.* $\mathbf{v}'_P = \mathbf{0}$), mentre la sua velocità è diretta lungo la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ o nulla nel sistema fisso (*i.e.* $\mathbf{v}_P = c\boldsymbol{\omega}$, per qualche $c \in \mathbb{R}$), poiché P appartiene all'asse di moto (cfr. la definizione 36.16 e l'osservazione 36.18). Quindi risulta

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}'_P + c\boldsymbol{\omega}, \quad (36.12)$$

dove $c\boldsymbol{\omega}$ è ovviamente diretta in ogni istante lungo la direzione della generatrice comune alle due rigate. In particolare il piano delle due velocità $c\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{v}'_P , tangente in P alla rigata mobile L , coincide con il piano delle due velocità $c\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{v}_P , tangente in P alla rigata fissa Λ . In conclusione le due rigate si raccordano lungo la generatrice comune, *i.e.* hanno in ciascun istante lo stesso piano tangente. ■

36.26. In generale il rotolamento delle due rigate nel moto di un sistema rigido è accompagnato da uno strisciamento lungo la generatrice di contatto (in ogni istante i punti appartenenti all'asse di moto hanno velocità parallela a $\boldsymbol{\omega}$; cfr. la definizione 36.16 di asse di moto). Tale strisciamento viene a mancare solo e sempre quando

$$\langle \mathbf{v}_O, \boldsymbol{\omega} \rangle = 0, \quad (36.13)$$

così che $c = 0$ in (36.12), senza che si riduca a zero la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Questo in particolare avviene nei moti di sistemi rigidi intorno a un punto fisso O , così che $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$. In tali condizioni, inoltre, le due rigate, dovendo le loro generatrici sempre

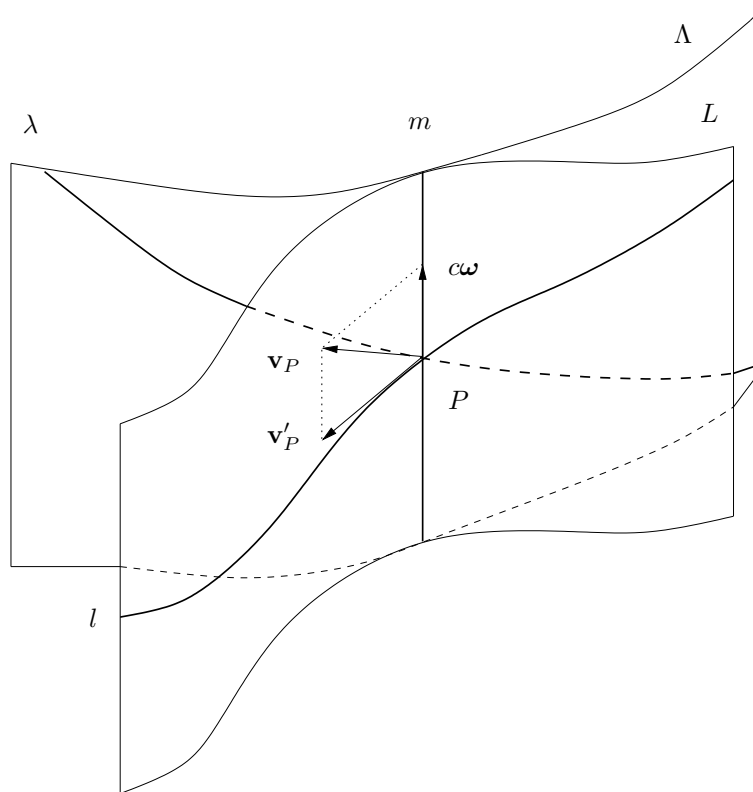


FIGURA 36.7. Rigata fissa e rigata mobile (solo porzioni finite delle rigate, e quindi tratti finiti delle curve l e λ , sono rappresentati). I vettori \mathbf{v}_P , \mathbf{v}'_P e ω giacciono nello stesso piano. Se $\lambda = 0$ in (36.12) si ha $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}'_P$ e le due rigate rotolano senza strisciare l'una sull'altra.

contenere il punto O (poiché l'asse di moto passa per O), sono in realtà due coni. Cfr. la figura 36.8.

36.27. DEFINIZIONE (CONI DI POINSOT). *Nel moto di un sistema rigido con un punto fisso, le due rigate, fissa e mobile, descritte dall'asse di moto si riducono a due coni di vertice il punto fisso O , che prendono il nome di coni di Poinsot, i quali rotolano senza strisciare l'uno sull'altro.*

37. Caratteristiche cinematiche dei sistemi rigidi

37.1. Introduzione. Ricordiamo che, dato un punto materiale di massa m e po-

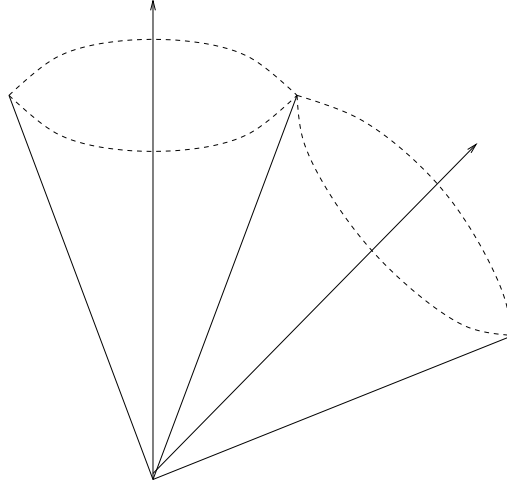


FIGURA 36.8. Coni di Poincaré.

sizione \mathbf{q} (in un fissato sistema di riferimento), se indichiamo con $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ la sua velocità, allora possiamo associare a esso l'energia cinetica T , la quantità di moto \mathbf{p} e il momento della quantità di moto (o momento angolare) \mathbf{l} rispetto a un punto O , dati, rispettivamente, da

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \mathbf{l} = [\mathbf{q} - \mathbf{q}_O, m\mathbf{v}]. \quad (37.1)$$

Vogliamo vedere come si estendono le definizioni di tali quantità nel caso di più punti materiali che costituiscano un sistema rigido.

37.2. Teorema. Dato un sistema rigido costituito da N punti P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N e di coordinate $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$, la sua energia cinetica è

$$T = T' + T'' + T''', \quad (37.2)$$

con

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_O|^2, & m &= \sum_{i=1}^N m_i, \\ T'' &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \langle \boldsymbol{\omega}, [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O]] \rangle, \\ T''' &= \sum_{i=1}^N m_i \langle \mathbf{v}_O, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O] \rangle, \end{aligned} \quad (37.3)$$

dove O è un punto qualsiasi solidale con il sistema rigido, \mathbf{v}_O è la sua velocità e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare (istantanea).

37.3. *Dimostrazione del teorema 37.2.* Per definizione di energia cinetica si ha

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2, \quad (37.4)$$

dove ciascuna velocità $\dot{\mathbf{q}}_i$ può essere espressa attraverso la formula (36.5), con $P = P_i$ e, conseguentemente, $\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{q}}_i$. Esplicitando il quadrato del modulo dei vettori

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O], \quad (37.5)$$

e usando l'identità

$$\langle [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O], [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O] \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O]] \rangle, \quad (37.6)$$

i.e. l'identità (cfr. l'esercizio 2)

$$\langle \mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}] \rangle = \langle \mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}] \rangle, \quad (37.7)$$

con $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O]$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{z} = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O$, segue allora la (37.2), con le definizioni (37.3). ■

37.4. **TEOREMA (KÖNIG).** *Sotto le stesse condizioni del teorema 37.2, se O è il centro d'inerzia del sistema rigido, l'energia cinetica assume la forma*

$$T = T' + T'' = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_O^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \langle \boldsymbol{\omega}, [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O]] \rangle, \quad (37.8)$$

dove \mathbf{q}_O è dato dalla (36.2); il termine T' è l'energia cinetica che competerebbe a un punto materiale di massa m che si trovasse nella posizione occupata dal centro d'inerzia del sistema.

37.5. *Dimostrazione del teorema 37.4.* Segue dal teorema 37.2, notando che se O è il centro d'inerzia del sistema rigido allora T''' si annulla identicamente. ■

37.6. **COROLLARIO.** *Sotto le stesse condizioni del teorema 37.2, se O è un punto fisso per il sistema rigido, l'energia cinetica assume la forma*

$$T = T'' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \langle \boldsymbol{\omega}, [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O]] \rangle, \quad (37.9)$$

dove \mathbf{q}_O è il vettore posizione del punto O ; in particolare se si sceglie il sistema di riferimento fisso κ con l'origine in O si ha $\mathbf{q}_O = \mathbf{0}$.

37.7. *Dimostrazione del corollario 37.6.* Discende immediatamente del teorema 37.2, notando che se O è un punto fisso allora $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$. ■

37.8. *Osservazione.* In un sistema di riferimento solidale con il sistema rigido si ha $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$; poiché il prodotto scalare e il prodotto vettoriale conservano la metrica, possiamo dunque interpretare il termine T'' dicendo che rappresenta l'energia cinetica del sistema rigido nel sistema di riferimento solidale con esso (se O è il centro d'inerzia chiameremo T'' l'energia cinetica nel "sistema di riferimento del centro d'inerzia").

37.9. **TEOREMA.** *La quantità di moto di un sistema rigido costituito da N punti P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N e di coordinate $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$, è data da*

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'', \quad (37.10)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= m\mathbf{v}_O, & m &= \sum_{i=1}^N m_i, \\ \mathbf{p}'' &= \sum_{i=1}^N m_i[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O], \end{aligned} \quad (37.11)$$

dove O è un punto qualsiasi solidale con il sistema rigido, \mathbf{v}_O è la sua velocità e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare (istantanea).

37.10. *Dimostrazione del teorema 37.9.* Per definizione di quantità di moto si ha

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (37.12)$$

dove ciascuna velocità $\dot{\mathbf{q}}_i$ può essere espressa attraverso la formula (36.5), con $P = P_i$ e, conseguentemente, $\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{q}}_i$: si ottiene quindi la (37.10). ■

37.11. **COROLLARIO.** *La quantità di moto di un sistema rigido è uguale alla quantità di moto che spetterebbe a un punto materiale di massa m che si trovasse nella posizione occupata dal centro d'inerzia del sistema rigido.*

37.12. *Dimostrazione del corollario 37.11.* Dalla (37.10), scegliendo come punto O il centro d'inerzia del sistema rigido, si ottiene $\mathbf{p}'' \equiv \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_O$, con \mathbf{v}_O velocità del centro d'inerzia. ■

37.13. **TEOREMA.** *Dato un sistema rigido costituito da N punti P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N e di coordinate $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$, il suo momento angolare rispetto a un qualsiasi punto O (fisso o solidale con il sistema rigido) è*

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}' + \mathbf{l}'', \quad (37.13)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{l}' &= \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, \mathbf{v}_O], \\ \mathbf{l}'' &= \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O]], \end{aligned} \quad (37.14)$$

dove \mathbf{v}_O è la velocità del punto O e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare (istantanea).

37.14. *Dimostrazione del teorema 37.13.* Per definizione di momento angolare (rispetto al punto O) si ha

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, \dot{\mathbf{q}}_i], \quad (37.15)$$

dove ciascuna velocità $\dot{\mathbf{q}}_i$ può essere espressa attraverso la formula (36.5), con $P = P_i$ e, conseguentemente, $\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{q}}_i$: si ottiene quindi la (37.13). ■

37.15. *COROLLARIO.* Sotto le stesse condizioni del teorema 37.13, se O è il centro d'inerzia del sistema, si ottiene

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}'' = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O]], \quad (37.16)$$

dove \mathbf{q}_O è dato dalla (36.2).

37.16. *Dimostrazione del corollario 37.15.* Segue dal teorema 37.13 e dalla definizione di centro d'inerzia. ■

37.17. *Osservazione.* Se O è un punto fisso per il sistema rigido, così che $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$, si ha allora

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}'' = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{q}_i, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i]], \quad (37.17)$$

purché si scelga l'origine del sistema fisso coincidente con O (i.e. $\mathbf{q}_O = \mathbf{0}$).

37.18. *LEMMA.* Dato un sistema rigido costituito da N punti P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N e di coordinate $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$, la derivata temporale del suo momento angolare è

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, \ddot{\mathbf{q}}_i] - [\mathbf{v}_O, \mathbf{p}], \quad (37.18)$$

dove O è un punto qualsiasi del sistema rigido, \mathbf{v}_O è la sua velocità e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare (istantanea).

37.19. *Dimostrazione del lemma 37.18.* Segue dalla (37.15), per derivazione esplicita rispetto al tempo, tenendo conto che $[\dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_i]$ è identicamente nullo e utilizzando la definizione (37.12) di quantità di moto. ■

38. Caratteristiche dinamiche dei sistemi rigidi

38.1. Introduzione. Nel presente paragrafo continueremo l'analisi iniziata nel paragrafo precedente sui sistemi rigidi, analizzandone le proprietà dinamiche: in altre parole studieremo come le forze che agiscono su un sistema rigido ne determinano il moto. Nel prossimo capitolo considereremo il caso di un sistema rigido (con o senza un punto fisso) non soggetto a forze: anche se molto semplice tale caso è già interessante dal punto di vista sia fisico sia matematico.

Ovviamente sarebbe interessante anche studiare casi più difficili, in cui il sistema rigido sia soggetto a forze esterne, quali la gravità. In questo caso le equazioni del moto in generale non sono più risolubili, a meno che non si impongano ulteriori condizioni: tuttavia noi non considereremo esplicitamente tali casi, poiché la loro discussione risulta particolarmente agevole nell'ambito del formalismo lagrangiano, che però esula dal presente testo; rimandiamo quindi i lettori interessati ai testi citati nella nota bibliografica.

38.2. Notazioni. Dato un sistema rigido costituito di N punti materiali P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N e di coordinate $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$, se \mathbf{f}_i denota la forza che agisce sul punto P_i (data dalla somma della forza attiva applicata e della reazione vincolare), abbiamo

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{f}_i, \quad (38.1)$$

e quindi, sommando sui punti,

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \equiv \mathbf{f}_{\text{TOT}}, \quad (38.2)$$

dove \mathbf{f}_{TOT} indica la risultante di tutte le forze che agiscono sul sistema.

Come detto sopra la forza \mathbf{f}_{TOT} è dovuta sia alle forze attive applicate sui punti materiali che costituiscono il sistema rigido ("forze esterne") sia alle reazioni vincolari ("forze interne"). Mentre le prime sono quantità note (determinate volta per volta dal problema che si sta studiando), in generale nulla possiamo dire delle reazioni vincolari che dipendono fortemente dalla struttura interna del sistema rigido, non necessariamente accessibile agli esperimenti. Sarebbe quindi auspicabile avere delle equazioni in cui non compaiano che le forze attive applicate: questo sarà possibile, come vedremo nel paragrafo §40, se si postula il principio di d'Alembert che verrà enunciato nel paragrafo §39.

38.3. TEOREMA. *La derivata temporale della quantità di moto di un sistema di punti materiali è data da*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}_{\text{TOT}}, \quad (38.3)$$

se \mathbf{f}_{TOT} è la risultante di tutte le forze.

38.4. *Dimostrazione del teorema 38.3.* Segue dalla definizione di quantità di moto,

$$\mathbf{p} \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (38.4)$$

e dalla (38.2). ■

38.5. **TEOREMA.** *La derivata temporale del momento angolare (rispetto a un punto O) di un sistema di punti materiali è legata al risultante dei momenti delle forze totali che agiscono sul sistema (rispetto allo stesso punto) dalla relazione*

$$\dot{\mathbf{l}} + [\mathbf{v}_O, \mathbf{p}] = \mathbf{n}_{\text{TOT}}, \quad (38.5)$$

dove \mathbf{v}_O è la velocità del punto O e

$$\mathbf{n}_{\text{TOT}} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, \mathbf{f}_i] \quad (38.6)$$

è il risultante dei momenti di tutte le forze che agiscono sul sistema rispetto al punto O .

38.6. *Dimostrazione del teorema 38.5.* Dalla definizione di momento angolare si ha

$$\mathbf{l} \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, \dot{\mathbf{q}}_i], \quad (38.7)$$

così che, derivando la (38.7) rispetto al tempo, otteniamo

$$\dot{\mathbf{l}} = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_O, \ddot{\mathbf{q}}_i] - \sum_{i=1}^N m_i [\dot{\mathbf{q}}_O, \dot{\mathbf{q}}_i], \quad (38.8)$$

dove il primo termine nel membro di destra non è altro che la somma dei momenti delle forze (cfr. la (38.1)), mentre il secondo è uguale a $-[\mathbf{v}_O, \mathbf{p}]$ se $\mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{q}}_O$ e \mathbf{p} è la quantità di moto (definita in (38.4)). ■

38.7. **COROLLARIO.** *Sotto le stesse condizioni del teorema 38.5, se O è il centro d'inerzia del sistema di punti materiali o è fisso, allora la derivata temporale del momento angolare è data da*

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{n}_{\text{TOT}}, \quad (38.9)$$

con le stesse notazioni del teorema 38.5.

38.8. *Dimostrazione del corollario 38.7.* Segue dal teorema 38.5 notando che \mathbf{v}_O è parallelo a \mathbf{p} se O è il centro d'inerzia e $\mathbf{v}_O \equiv \mathbf{0}$ se O è fisso. ■

39. Principio di d'Alembert

39.1. Introduzione. Nel paragrafo §35 abbiamo definito le traiettorie virtuali solo per vincoli olonomi bilateri; in realtà esse possono essere definite anche per vincoli olonomi più generali della forma (35.5). Vedremo, nel paragrafo §41, come definire le traiettorie virtuali nel caso di vincoli anolonomi bilateri (della forma (35.3)), purché essi siano lineari nelle velocità; cfr. la (41.1). Intenderemo quindi che il principio 39.2 vale anche per tali vincoli (41.1).

39.2. PRINCIPIO DI D'ALEMBERT (O DEI LAVORI VIRTUALI). *Dato un sistema meccanico soggetto a vincoli, le forze vincolari non compiono lavoro lungo le traiettorie virtuali.*

39.3. DEFINIZIONE (VINCOLI PERFETTI). *Chiameremo vincoli perfetti (o vincoli ideali) i vincoli per i quali valga il principio di d'Alembert.*

39.4. LEMMA. *Dato un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi bilateri, che soddisfi il principio di d'Alembert, se $\Sigma(t_0)$ è la superficie di vincolo e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare in \mathbb{R}^{3N} , allora si deve avere*

$$\langle f_V(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0), \xi \rangle = 0. \quad (39.1)$$

per ogni vettore ξ tangente in $x(t_0)$ alla superficie di vincolo $\Sigma(t_0)$.

39.5. Dimostrazione del lemma 39.4. Consideriamo una traiettoria virtuale (35.10); allora per ogni $\alpha_0 \in (0, 1)$, per il principio di d'Alembert e per definizione di lavoro (cfr. l'esercizio 3), si deve avere

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left\langle f_V(x, \dot{x}, t_0), \frac{dx}{d\alpha} \right\rangle d\alpha = 0, \quad (39.2)$$

dove $x = x(\alpha; t_0)$ e il prodotto scalare è in \mathbb{R}^{3N} . Da qui segue la (39.1). Supponiamo infatti per assurdo che la (39.1) non sia verificata per qualche istante t_0 e per qualche vettore ξ ; possiamo supporre per concretezza che il membro di sinistra di (39.1) sia strettamente positivo. Allora considerando una qualsiasi traiettoria virtuale che arrivi in $x(t_0)$ lungo la direzione ξ , i.e. tale che $[dx(\alpha; t_0)/d\alpha](0, t_0) = \xi$, si deve avere, per $\alpha \rightarrow 0$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\langle f_V(x, \dot{x}, t_0), \frac{dx}{d\alpha} \right\rangle = \langle f_V(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0), \xi \rangle, \quad (39.3)$$

che dunque è positiva per ipotesi. Quindi per continuità esisterà un intorno $(-\alpha_0, \alpha_0)$ di $\alpha = 0$ in cui il prodotto scalare in (39.2) rimane strettamente positivo: l'integrale in (39.2) è perciò strettamente positivo. Questo contraddice la condizione (39.2) postulata dal principio di d'Alembert. ■

39.6. Osservazione. Il principio di d'Alembert ammette una semplice interpretazione geometrica nel caso dei vincoli olonomi bilateri che stiamo considerando. Infatti la

condizione (39.1) implica che le forze vincolari sono in ogni istante perpendicolari alla superficie di vincolo. Se $N = 1$ allora questo accade non solo nello spazio delle configurazioni ma anche nello spazio euclideo (poiché i due coincidono per $N = 1$; cfr. l'osservazione 35.16).

39.7. PROPOSIZIONE. *Nel caso di vincoli olonomi bilateri, la forza vincolare f_V che agisce nel punto $x \in \Sigma(t_0)$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $\nabla G_m(x, t_0)$, i.e. esistono m funzioni*

$$\lambda_m(t) \equiv \tilde{\lambda}_m(x(t), \dot{x}(t), t), \quad m = 1, \dots, M, \quad (39.4)$$

tali che

$$f_V(x(t), \dot{x}(t), t) = \sum_{m=1}^M \lambda_m(t) \nabla G_m(x(t), t), \quad (39.5)$$

se $t \rightarrow x(t)$ rappresenta il moto del sistema vincolato con dati iniziali $(x(0), \dot{x}(0))$.

39.8. Dimostrazione della proposizione 39.7. Segue immediatamente dal fatto che, per ogni $x \in \Sigma(t_0)$, il vettore f_V in x deve essere perpendicolare alla superficie di vincolo in x . Poiché le forze vincolari in generale dipendono dalle velocità, mentre le funzioni G che esprimono la condizione di vincolo dipendono solo dalle posizioni (nel caso di vincoli olonomi), segue che le funzioni (39.4) devono dipendere anche dalle velocità. Se il vincolo dipende dal tempo, le funzioni in (39.4) dipenderanno esplicitamente dal tempo. ■

39.9. DEFINIZIONE (MULTIPLICATORI DI LAGRANGE). *Le funzioni (39.4) sono chiamate moltiplicatori di Lagrange; se il vincolo è indipendente dal tempo, i moltiplicatori di Lagrange dipendono solo da $(x(t), \dot{x}(t))$.*

39.10. Osservazione. Le equazioni (39.5) permettono di esprimere le forze vincolari in termini delle M incognite λ , dove $\lambda \equiv \lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_M(t))$; se quindi, in (35.8) esprimiamo le forze vincolari f_V utilizzando le (39.5), otteniamo un sistema di $3N + M$ equazioni (in parte differenziali e in parte algebriche) nelle $3N + M$ incognite x e λ .

39.11. Un metodo che si può seguire per dimostrare esistenza e unicità delle soluzioni del sistema dato dalle (35.7), (35.5) e (39.5), che qui riscriviamo per comodità,

$$\begin{aligned} G_m(x, t) &= 0, & m &= 1, \dots, M, \\ m_n \ddot{\mathbf{x}}^{(n)} &= \mathbf{f}^{(n)} + \mathbf{f}_V^{(n)}, & n &= 1, \dots, N, \\ f_V(x(t), \dot{x}(t), t) &= \sum_{m=1}^M \lambda_m(t) \nabla G_m(x(t), t), \end{aligned} \quad (39.6)$$

è il seguente.

Fissato un dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0))$, per ogni scelta di $\lambda: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^M$ di classe C^1 , con $T > 0$, si ha, supponendo che le forze applicate siano sufficientemente regolari, che il sistema (35.7), (39.5) ammette un'unica soluzione $t \rightarrow x_\lambda(t)$ dipendente dalla funzione $\lambda \in C^1([0, T], \mathbb{R}^M)$ che è stata scelta (e ovviamente dal dato iniziale): questo segue semplicemente dal teorema 10.39 (teorema di esistenza e unicità).

In corrispondenza di tale soluzione si ha un'applicazione $\lambda \rightarrow \Phi(\lambda)$ da $C^1([0, T], \mathbb{R}^M)$ in sé, data da

$$\Phi_m(\lambda(t)) = G_m(x_\lambda(t), t), \quad m = 1, \dots, M. \quad (39.7)$$

Se l'equazione $\Phi_m(\lambda(t)) = 0$ ha soluzione unica $\lambda_0(t)$, allora l'unica soluzione di (35.7), (39.5) che soddisfi le relazioni di vincolo (35.5) è quella che si ottiene con la scelta $\lambda = \lambda_0$, *i.e.* introducendo λ_0 in (39.5), sostituendo le (39.5) in (35.7) e quindi risolvendo (35.7). Si noti che la funzione $\lambda_0(t)$ dipenderà dai dati iniziali, e poiché ogni istante t può essere scelto come istante iniziale, segue che la funzione $\lambda_0(t)$ dipenderà dalle posizioni e dalle velocità, in accordo con il paragrafo §39.8.

Il problema è quindi ricondotto a quello di verificare che l'equazione $\Phi_m(\lambda(t)) = 0$ abbia una soluzione unica.

Alternativamente, poiché il moto si svolge sulla superficie di vincolo, si può seguire un secondo metodo che consiste nel lavorare direttamente nel sistema di coordinate adattato a tale superficie, così che si eliminano le forze vincolari dalle equazioni del moto; una volta risolte le equazioni in tali coordinate si possono, almeno in linea di principio, calcolare le reazioni vincolari attraverso le (35.8), esprimendo x in termini delle coordinate del sistema adattato alla superficie (la cui evoluzione è nota) e scrivendo $f_V = m\ddot{x} - f(x)$.

Se i vincoli sono indipendenti, allora individuata la forza vincolare f_V , dall'ultima delle (39.6) si determina la funzione $\lambda_0(t) = (\lambda_{01}(t), \dots, \lambda_{0m}(t))$. A tal fine basta osservare che possiamo considerare le prime M componenti dell'ultima delle (39.6), ovvero della (39.5), che è una relazione tra vettori in \mathbb{R}^{3N} , con $3N > M$,

$$\begin{pmatrix} f_{V1} \\ \dots \\ f_{VM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial G_1/\partial x_1 & \dots & \partial G_M/\partial x_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial G_1/\partial x_M & \dots & \partial G_M/\partial x_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_M \end{pmatrix} \equiv \mathcal{M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_M \end{pmatrix}, \quad (39.8)$$

e notare che, se i vincoli sono indipendenti, allora la matrice $\partial G_m/\partial x_{m'}$ è invertibile ed è di conseguenza effettivamente possibile invertire la relazione (39.5) ed esprimere $\lambda(t)$ in termini di quantità note:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_M \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} f_{V1} \\ \dots \\ f_{VM} \end{pmatrix}. \quad (39.9)$$

Questo in particolare mostra che la scelta di $\lambda(t) = \lambda_0(t)$ è unica.

Infine un terzo metodo consiste nell'approssimare l'azione del vincolo con un'energia potenziale di grande intensità λ (da non confondersi con i moltiplicatori di Lagrange), che tende a confinare il moto su una superficie data (corrispondente appunto alla superficie di vincolo), risolvere le equazioni del moto a λ finito (utilizzando quindi il teorema 10.39 di esistenza e unicità per sistemi dinamici regolari) e quindi passare al limite $\lambda \rightarrow \infty$, mostrando che tale limite è ben definito; cfr. l'introduzione §35.1 e la nota bibliografica. Resta anche in questo caso il problema di determinare poi le reazioni vincolari, che si può risolvere come discusso precedentemente.

39.12. Osservazione. Se i vincoli dipendono dal tempo, in generale le forze di vincolo compiono lavoro lungo le traiettorie reali del sistema (poiché esse non coincidono con quelle virtuali; cfr. l'osservazione 35.18). Nel caso di vincoli indipendenti dal tempo, il principio di d'Alembert si può formulare dicendo che le forze vincolari non compiono lavoro.

39.13. ESEMPIO. Consideriamo due punti materiali P_1 e P_2 di massa, rispettivamente m_1 e m_2 che interagiscano attraverso una forza che soddisfi il terzo principio della dinamica e siano soggetti al vincolo di restare su un piano orizzontale, la cui quota sia tuttavia una funzione regolare $a(t)$ del tempo; cfr. la figura 39.1.

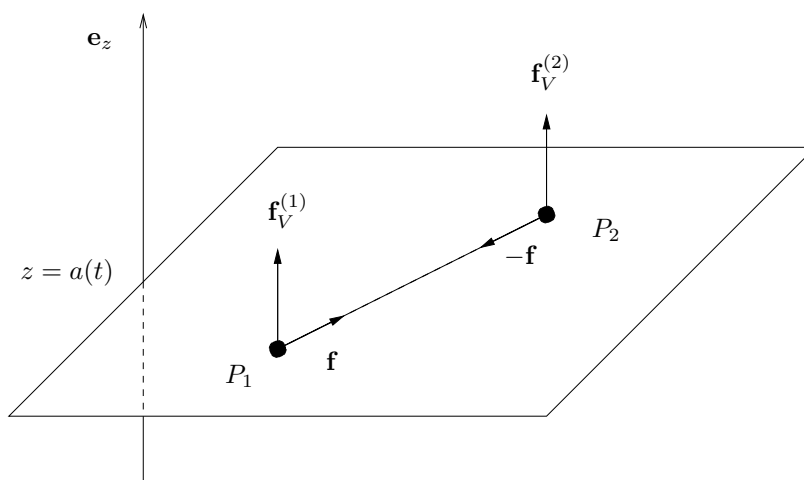


FIGURA 39.1. Discussione dell'esempio 39.13.

Se $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (x_2, y_2, z_2)$ sono le coordinate dei due punti, possiamo allora esprimere i vincoli come

$$G_1(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, t) \equiv z_1 - a(t) = 0, \quad G_2(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, t) \equiv z_2 - a(t) = 0, \quad (39.10)$$

Poiché inoltre $\nabla G_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ e $\nabla G_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ i due vincoli sono indipendenti, e poiché $\nabla G_1 \neq 0$ e $\nabla G_2 \neq 0$ essi sono regolari. Possiamo quindi applicare i risultati dei paragrafi precedenti.

Il sistema è allora descritto dalle equazioni

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_V^{(1)}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}^{(2)} = -\mathbf{f} + \mathbf{f}_V^{(2)}; \quad (39.11)$$

le forze di interazione soddisfano il terzo principio della dinamica e le forze vincolari devono essere perpendicolari al piano (cfr. il lemma 39.4), così che

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= f_x, & m_1 \ddot{y}_1 &= f_y, & m_1 \ddot{z}_1 &= f_V^{(1)}, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -f_x, & m_2 \ddot{y}_2 &= -f_y, & m_2 \ddot{z}_2 &= f_V^{(2)}, \end{aligned} \quad (39.12)$$

avendo tenuto conto che $\mathbf{f} = (f_x, f_y, 0)$ e $\mathbf{f}_V^{(n)} = (0, 0, f_V^{(n)})$ per $n = 1, 2$. Quindi per la (39.10) si ha

$$f_V^{(1)} = m_1 \ddot{a}(t), \quad f_V^{(2)} = m_2 \ddot{a}(t); \quad (39.13)$$

scrivendo le forze vincolari come combinazioni lineari dei gradienti delle funzioni (39.10) che definiscono il vincolo, conformemente alla (39.5), si ottiene quindi $\lambda_1(t) = m_1 \ddot{a}(t)$ e $\lambda_2(t) = m_2 \ddot{a}(t)$.

Il lavoro compiuto dalle forze vincolari lungo una traiettoria qualsiasi del sistema, nell'intervallo di tempo $[0, T]$, è dato da

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\langle \mathbf{f}_V^{(1)}, \dot{\mathbf{x}}^{(1)} \rangle + \langle \mathbf{f}_V^{(2)}, \dot{\mathbf{x}}^{(2)} \rangle \right] dt &= (m_1 + m_2) \int_0^T \ddot{a}(t) \dot{a}(t) dt \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} [\dot{a}^2(T) - \dot{a}^2(0)], \end{aligned} \quad (39.14)$$

indipendentemente dalla traiettoria, *i.e.* indipendentemente da come i punti si muovano sul piano orizzontale. Tale lavoro non è altro che la variazione di energia del sistema dal tempo 0 al tempo T . In particolare se $a(t) = a = \text{costante}$, il lavoro (39.14) è nullo. Si noti anche che se i vincoli non dipendono dal tempo, l'energia totale del sistema, *i.e.* la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale corrispondente alle forze esterne agenti sul sistema, è una costante del moto: in tal caso il lavoro compiuto dalle forze di vincolo è nullo (per l'osservazione 39.12).

40. Principio di d'Alembert e vincoli rigidi

40.1. Introduzione. Abbiamo definito nel paragrafo §36 i sistemi rigidi come quei sistemi meccanici costituiti da N punti materiali soggetti ai vincoli che le mutue distanze dei punti siano costanti (vincoli rigidi). Vogliamo mostrare (cfr. il teorema

40.8 più avanti) che se tale vincolo è un vincolo perfetto, *i.e.* se è un vincolo per cui vale il principio di d'Alembert, allora segue che per i sistemi rigidi rimangono valide le leggi della dinamica

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{n}, \quad (40.1)$$

se \mathbf{p} e \mathbf{l} rappresentano, rispettivamente, la quantità di moto totale e il momento angolare totale del sistema (rispetto a un punto dato), e, analogamente, \mathbf{f} è la risultante delle forze attive applicate al sistema e \mathbf{n} è il risultante dei loro momenti (rispetto allo stesso punto). Le (40.1) sono note come *leggi cardinali della dinamica per sistemi rigidi*. Come si vede sono una semplice estensione delle leggi che valgono per punti materiali non vincolati: concettualmente non si tratta però un'estensione banale, dal momento che necessita di un principio (il principio di d'Alembert) che ne giustifichi la correttezza.

Imponiamo quindi il vincolo che, dati N punti materiali, si abbia

$$|\mathbf{x}^{(n)}(t) - \mathbf{x}^{(n')}(t)| = r_{nn'}(t), \quad (40.2)$$

dove $r_{nn'}(t)$ indipendente dal tempo sarà un caso particolare e corrisponderà al caso di sistemi rigidi; cfr. la (36.1).

Se $\alpha \rightarrow x(\alpha; t_0)$ è una traiettoria virtuale all'istante t_0 , si ha

$$|\mathbf{x}^{(n)}(\alpha; t_0) - \mathbf{x}^{(n')}(\alpha; t_0)| = r_{nn'}(t_0), \quad (40.3)$$

per la definizione 35.17 (cfr. la (35.11)). Per il principio di d'Alembert si deve anche avere

$$\sum_{n=1}^N \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left\langle \mathbf{f}_V^{(n)}, \frac{d\mathbf{x}^{(n)}}{d\alpha} \right\rangle d\alpha = 0, \quad (40.4)$$

dove il prodotto scalare è scritto in \mathbb{R}^3 .

40.2. LEMMA. *Dato un sistema meccanico di N punti materiali soggetto ai vincoli (40.2), le traiettorie virtuali possono essere parametrizzate con 6 parametri.*

40.3. Dimostrazione del lemma 40.2. I vincoli (40.2) definiscono una superficie a 6 dimensioni, per quanto visto nel teorema 36.4. ■

40.4. LEMMA. *Dato un sistema meccanico di N punti materiali soggetto ai vincoli (40.2), le forze vincolari devono avere risultante nulla.*

40.5. Dimostrazione del lemma 40.4. Tre dei 6 parametri in termini dei quali si possono descrivere le traiettorie virtuali, come enunciato nel lemma 40.2, possono essere fatti corrispondere alle traslazioni rigide, che ovviamente preservano la struttura dei vincoli. Quindi dalla (40.4) si trova che le forze vincolari devono soddisfare le relazioni (cfr. l'esercizio 4)

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{f}_V^{(n)} = \mathbf{0}, \quad (40.5)$$

(sottointendendo che la somma dei vettori deve essere effettuata dopo averli applicati, per trasporto parallelo, allo stesso punto). Da qui segue l'asserto. ■

40.6. LEMMA. *Dato un sistema meccanico di N punti materiali soggetto ai vincoli (40.2), le forze vincolari devono avere momento risultante nullo.*

40.7. Dimostrazione del lemma 40.6. I restanti tre parametri delle traiettorie virtuali possono essere scelti corrispondenti alle rotazioni intorno a tre assi ortogonali (arbitrari) passanti per un punto di \mathbb{R}^3 , per esempio intorno ai tre assi cartesiani che costituiscono il sistema di riferimento con centro nell'origine al tempo t_0 . Le rotazioni intorno all'asse \mathbf{e}_x all'istante t_0 sono date dalla matrice

$$S^1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (40.6)$$

(cfr. il lemma §33.27 e l'esercizio 3 del capitolo 8) e analoghe formule valgono per le rotazioni intorno agli altri due assi cartesiani. Utilizzando la (40.4) si ottiene quindi (cfr. l'esercizio 5)

$$\sum_{n=1}^N [\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{f}_V^{(n)}] = \mathbf{0}, \quad (40.7)$$

per ogni t_0 . ■

40.8. TEOREMA. *Per un sistema rigido sono soddisfatte le leggi cardinali della dinamica (40.1), dove \mathbf{f} indica la risultante delle forze attive applicate e \mathbf{n} il risultante dei loro momenti (rispetto a un punto dato).*

40.9. Dimostrazione. Il sistema rigido è definito dalle condizioni di vincolo (40.2): tali condizioni implicano che deve essere nulla la risultante delle forze vincolari (per il lemma 40.4) e deve essere nullo il risultante dei loro momenti (per il lemma 40.6).

Poiché in generale possiamo scrivere, in virtù delle (38.3) e (38.9),

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}_{\text{TOT}} \equiv \mathbf{f} + \mathbf{f}_V, \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{n}_{\text{TOT}} = \mathbf{n} + \mathbf{n}_V, \quad (40.8)$$

dove \mathbf{f}_V è la somma delle forze vincolari, come definita nel membro di sinistra della (40.5) e \mathbf{n}_V è la somma dei loro momenti, come definita dal membro di sinistra della (40.7), segue quindi che valgono le (40.1). ■

40.10. Osservazione. Per le forze applicate l'annullarsi della risultante è conseguenza del terzo principio della dinamica e del fatto che le forze sono additive. Nel caso di vincoli rigidi, le forze non sono in generale additive: non è possibile scrivere in modo non ambiguo la forza vincolare che si esercita sul punto P_n come somma di $N - 1$ forze $F_V^{(n,n')}$ dipendenti ciascuna solo dai punti P_n e $P_{n'}$. Questo segue dal fatto che

non è possibile costruire traiettorie virtuali in cui vari solo la posizione di due dei punti materiali.

Se i vincoli (40.2) sono scritti nella forma

$$G_{n,n'}(x, t) = |\mathbf{x}^{(n)}(t) - \mathbf{x}^{(n')}(t)| - r_{nn'} = 0, \quad (40.9)$$

possiamo scrivere le forze vincolari come

$$f_V(x, \dot{x}, t) = \sum_{n,n'=1}^N \lambda_{nn'}(t) \nabla G_{n,n'}(x, t), \quad (40.10)$$

ma, per $N > 2$, i vettori $\nabla G_{n,n'}(x, t)$ non sono linearmente indipendenti e i coefficienti $\lambda_{nn'}(t)$ non possono essere determinati univocamente, quindi l'additività insita in (40.10) è solo formale.

40.11. COROLLARIO. *Il centro d'inerzia di un sistema rigido che si muove di moto libero compie un moto rettilineo uniforme.*

40.12. Dimostrazione del corollario 40.11. Dalla prima delle (40.1) segue che se $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ si ha $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ e, poiché $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_O$, se \mathbf{v}_O è la velocità del centro d'inerzia O e m è la somma delle masse dei punti costituenti il sistema, segue l'asserto. ■

40.13. Osservazione. La discussione precedente si applica al caso di un sistema rigido che non abbia altri vincoli che quello di rigidità, espresso dalle condizioni (40.2). Se il sistema rigido ha anche un punto fisso allora le sole traiettorie virtuali possibili sono le rotazioni intorno al punto fisso. Quindi si applica il lemma 40.6, ma non il lemma 40.4, e possiamo concludere che, in tal caso, si annulla il momento risultante delle forze vincolari, ma non la loro risultante. In altre parole le equazioni (40.8), nel caso di un sistema rigido con un punto fisso, si semplificano in

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_V, \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{n}, \quad (40.11)$$

dove \mathbf{f}_V deriva dalla forza vincolare che si applica nel punto fisso.

40.14. COROLLARIO. *Un sistema rigido libero ruota intorno al suo centro d'inerzia O , come se questo fosse vincolato a un punto fisso O .*

40.15. Dimostrazione del corollario 40.14. Basta considerare il sistema di riferimento inerziale in cui il centro d'inerzia è fisso (che esiste per il corollario 38.5). In particolare, in tale sistema di riferimento, si ha, per ogni punto, $\mathbf{l}_i = m_i[\mathbf{q}_i, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i]]$ in (38.7), poiché $\mathbf{q}_O = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{q}}_i = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i]$. ■

40.16. TEOREMA. *Nel problema del moto di un sistema rigido intorno a un punto fisso O , in assenza di forze esterne, si hanno quattro integrali primi: le tre componenti del vettore momento angolare \mathbf{l} e l'energia E .*

40.17. Dimostrazione del teorema 40.16. Si può verificare per calcolo esplicito a partire dalle definizioni, tenendo conto che il sistema è conservativo e il risultante dei

momenti delle forze esterne è nullo. Infatti la (40.10) dà $\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$ e, se $T = E$ indica l'energia (cinetica) del sistema rigido, si ha (tenendo conto che $\mathbf{q}_O = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$)

$$\begin{aligned} \dot{T} &\equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \|\mathbf{v}_i\|^2 \right) = \sum_{i=1}^N m_i \langle \mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \langle [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i], [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i]] \rangle = 0, \end{aligned} \quad (40.12)$$

poiché i vettori $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i]$ e $[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_i]]$ sono ortogonali. ■

41. Vincoli anolonomi

41.1. Introduzione. Vedremo nel presente paragrafo che l'applicazione del principio di d'Alembert si può estendere anche al caso di vincoli anolonomi bilateri, purché essi siano lineari nelle variabili velocità (cfr. l'osservazione 41.10 più avanti), *i.e.* purché i vincoli abbiano la forma

$$\langle c_m, \dot{x} \rangle \equiv \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 c_{mk}^{(n)}(x, t) \dot{x}_k^{(n)} = b_m(x, t), \quad m = 1, \dots, M \leq 3N, \quad (41.1)$$

con le funzioni $c_{mk}^{(n)}$ e b_m di classe C^1 , per $m = 1, \dots, M$. Chiameremo *vincoli di mobilità* i vincoli definiti dalla (41.1). Diremo che tali vincoli sono indipendenti se i vettori c_m sono linearmente indipendenti (cfr. la definizione 35.9 nel caso di vincoli olonomi bilateri).

41.2. DEFINIZIONE (TRAIETTORIA VIRTUALE PER VINCOLI DI MOBILITÀ). *Dato un sistema meccanico sottoposto a vincoli anolonomi bilateri della forma (41.1), definiremo traiettoria virtuale all'istante t_0 ogni parametrizzazione di classe C^2*

$$\alpha \rightarrow x(\alpha; t_0), \quad -1 < \alpha < 1, \quad (41.2)$$

tale che le relazioni

$$\left\langle c_m, \frac{dx}{d\alpha}(\alpha; t_0) \right\rangle \equiv 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (41.3)$$

sia soddisfatta per ogni $|\alpha| < 1$.

41.3. Osservazione. Le traiettorie virtuali sono quindi, analogamente al caso dei vincoli olonomi bilateri, le traiettorie che, a istante fissato, sono compatibili con le

condizioni di vincolo. Possiamo allora riscrivere le (41.1) come $\langle c_m, dx \rangle = b_m dt$ e considerare variazioni più generali $dx \equiv dx(\alpha; t)$, con

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial t} dt. \quad (41.4)$$

A istante fissato (*i.e.* $t = t_0$ costante) il secondo termine dà contributo nullo e si ottiene la (41.3).

41.4. LEMMA. *La forza vincolare f_V determinata dalle condizioni (41.1) non compie lavoro lungo le traiettorie virtuali (41.3) se e solo se si può scrivere nella forma*

$$f_V(x(t), \dot{x}(t), t) = \sum_{m=1}^M \lambda_m(t) c_m(x(t), t), \quad (41.5)$$

per opportune funzioni $\lambda_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m = 1, \dots, M$.

41.5. Dimostrazione del lemma 41.4. Il lavoro delle forze vincolari lungo le traiettorie virtuali si può scrivere come il membro di sinistra della (39.2). Il principio di d'Alembert implica allora l'uguaglianza in (39.2), per ogni traiettoria virtuale $x(\alpha; t_0)$ lungo la quale sia soddisfatta la (41.3). Quindi, data l'arbitrarietà della traiettoria virtuale, il vettore f_V deve essere una combinazione lineare dei vettori c_m a coefficienti che possono variare istante per istante (visto che il vincolo dipende dal tempo): da qui segue la (41.5). ■

41.6. Nel caso di un sistema meccanico soggetto a vincoli (indipendenti) anolonomi bilateri lineari nelle velocità, le corrispondenti equazioni di Newton supplementate dal principio di d'Alembert costituiscono un sistema di equazioni che ammette un'unica soluzione (locale). Per dimostrare tale asserzione, procediamo nel modo seguente.

Se $G(x, t) = 0$ (*i.e.* $G_m(x, t) = 0$, $m = 1, \dots, M$) rappresenta un vincolo olonomo bilatero (eventualmente dipendente dal tempo), derivando rispetto al tempo l'identità $G(x, t) = 0$, otteniamo

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial G}{\partial x_k^{(n)}} \dot{x}_k^{(n)} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad (41.6)$$

che è un caso particolare della (41.1), ottenuta con la scelta $c_{mk}^{(n)} = \partial G_m / \partial x_k^{(n)}$ e $b_m = -\partial G_m / \partial t$. D'altra parte nelle equazioni di Newton non compare la funzione G che rappresenta il vincolo, ma solo il suo gradiente (cfr. le (35.8) e (39.5)).

È quindi naturale generalizzare il principio di d'Alembert al caso in cui il vincolo sia dato dalla (41.1).

Si assuma, per il principio di d'Alembert, che le equazioni del moto siano date (cfr. la (41.5)) da

$$m_n \ddot{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)} + \sum_{m=1}^M \lambda_m \mathbf{c}_m^{(n)}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (41.7)$$

dove $\mathbf{c}_m^{(n)} = (c_{m1}^{(n)}, c_{m2}^{(n)}, c_{m3}^{(n)})$ e $\lambda_m = \lambda_m(t)$ sono funzioni $\lambda_m: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, per qualche $T > 0$.

Le (41.7) sono $3N$ equazioni differenziali del secondo ordine, che, fissati i dati iniziali e sotto opportune condizioni di regolarità, insieme alla relazione (41.1), determinano univocamente, le funzioni $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_M(t))$ e $x(t)$: basta seguire il metodo schematicamente descritto nel paragrafo §39.11.

41.7. Osservazione. Un vincolo anolonomo del tipo (41.1), per il quale esista una funzione $G = (G_1, \dots, G_m)$ tale che

$$c_k^{(n)}(x, t) = \frac{\partial G(x, t)}{\partial x_k^{(n)}}, \quad (41.8)$$

è quindi *integrabile*, nel senso che, per ogni scelta di dati iniziali $(x(0), \dot{x}(0))$ esiste un vincolo olonomo bilatero equivalente, *i.e.* che dà le stesse equazioni del moto attraverso il principio di d'Alembert: tale vincolo è dato da $G(x(t), t) - G(x(0), 0) = 0$.

Supponiamo che la funzione G sia di classe C^2 . È allora noto che una funzione $G(x)$ per cui le relazioni (41.8) siano soddisfatte esiste (localmente) se e solo se vale

$$\frac{\partial c_k^{(n)}}{\partial x_{k'}^{(n')}} = \frac{\partial c_{k'}^{(n')}}{\partial x_k^{(n)}}. \quad (41.9)$$

Infatti consideriamo la forma differenziale (cfr. la nota bibliografica)

$$\omega = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 c_k^{(n)} dx_k^{(n)}, \quad (41.10)$$

di classe C^1 , *i.e.* con $c_k^{(n)}$ di classe C^1 per ogni $n = 1, \dots, N$ e $k = 1, 2, 3$. Se esiste una funzione G tale che valga la (41.8) la forma differenziale ω si dice esatta; se le identità (41.9) sono soddisfatte, la forma differenziale ω si dice chiusa. Si ha da un teorema di analisi che tutte le forme differenziali chiuse in un aperto stellato (o più in generale in un insieme semplicemente connesso) sono esatte: quindi localmente una forma è chiusa se e solo se è esatta.

Notiamo, in particolare, che la (41.10) è soddisfatta se le funzioni $c_k^{(n)}$ sono in realtà costanti.

41.8. DEFINIZIONE (VINCOLI PROPRIAMENTE ANOLONOMI). *Un vincolo anolonomo si dice propriamente anolonomo se non esiste alcun vincolo olonomo da cui esso possa essere ottenuto per differenziazione; se il vincolo è lineare, della forma (41.1), esso è quindi (localmente) integrabile se e solo se la forma differenziale (41.10) è chiusa.*

41.9. Osservazione. Un esempio di vincoli anolonomi bilateri per i quali si può applicare il principio di d'Alembert è costituito dalla condizione di rotolamento senza

strisciamento definita nel paragrafo §35.8: infatti tale condizione esprime un vincolo lineare tra le velocità (cfr. più avanti).

41.10. Osservazione. Come ulteriore generalizzazione di vincoli si potrebbero considerare relazioni funzionali della forma (35.3) non lineari nelle \dot{x} , o anche vincoli dipendenti da derivate rispetto al tempo di ordine superiore al primo delle posizioni x . Tuttavia non si conoscono sistemi materiali realizzabili concretamente soggetti a vincoli di tale natura. Quindi una tale generalizzazione, oltre a non prestarsi a una trattazione matematica, appare anche priva di interesse da un punto di vista fisico.

41.11. In generale potremo considerare sistemi soggetti sia a vincoli olonomi bilateri sia a vincoli di mobilità, *i.e.* sistemi descritti dalle equazioni

$$\begin{aligned} m_n \ddot{\mathbf{x}}^{(n)} &= \mathbf{f}^{(n)} + \mathbf{f}_V^{(n)}, & n &= 1, \dots, N, \\ G_m(x, t) &= 0, & m &= 1, \dots, M_1, \\ \langle c_m(x, t), \dot{x} \rangle &= b_m(x, t), & m &= 1, \dots, M_2, \end{aligned} \quad (41.11)$$

con $M \equiv M_1 + M_2 \leq 3N$. In tal caso il principio di d'Alembert porta a scrivere le forze vincolari nella forma

$$f_V = \sum_{m_1=1}^{M_1} \lambda_{m_1} \nabla G_{m_1} + \sum_{m_2=1}^{M_2} \lambda_{m_2} c_{m_2}, \quad (41.12)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ sono M moltiplicatori di Lagrange, e si può quindi procedere unificando le trattazioni nei paragrafi §39.11 e §41.6, per discutere la risolubilità delle equazioni (41.11) supplementate dal principio di d'Alembert attraverso la (41.12).

41.12. Consideriamo nel seguito del presente paragrafo il moto di sistemi rigidi che *rotolano senza strisciare*. In base alla definizione 35.8, il sistema rigido rotola quindi su una superficie in modo tale che la velocità del punto di contatto visto come punto del sistema rigido è in ogni istante uguale alla velocità che esso ha visto come punto della superficie.

Se un sistema rigido rotola su un piano (fisso) senza strisciare, allora esso ruota intorno a un asse istantaneo passante per il punto di contatto: in ogni istante il punto di contatto è fermo (quindi si tratta di un caso particolare della definizione 35.8, in cui la velocità del punto di contatto è nulla), ma il punto di contatto cambia istante per istante.

41.13. ESEMPIO. Consideriamo un disco di massa m e raggio r , che rotoli senza strisciare su un piano, mantenendosi sempre ortogonale al piano. Se P è il punto di contatto del disco con il piano e O è il centro d'inerzia del disco, le condizioni di moto di rotolamento senza strisciamento si esprimono (si tenga conto che la velocità di P è nulla nel sistema solidale con il disco, perché P è il punto intorno a cui il disco ruota) attraverso la formula

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O] = \mathbf{0}, \quad (41.13)$$

dove $\mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O$ è il vettore dato dalla differenza dei raggi vettori che individuano i punti P e O in un sistema di riferimento fisso κ , dotato di una terna $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare istantanea.

Introduciamo le coordinate (x, y, z) per determinare la posizione del centro d'inerzia del disco, θ per indicare l'angolo di rotazione del disco rispetto alla verticale \mathbf{e}_z (misurato in senso orario) e φ per indicare l'angolo che il piano del disco forma con l'asse \mathbf{e}_x (misurato in senso antiorario); cfr. la figura 41.1.

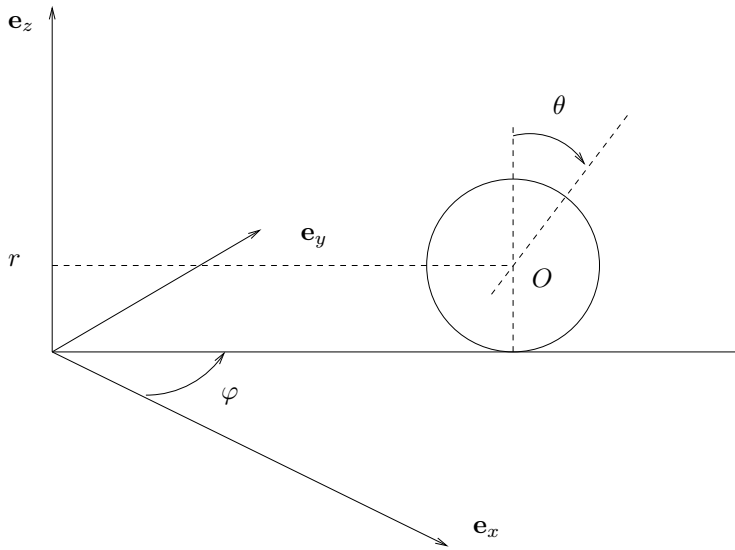


FIGURA 41.1. Disco che rotola senza strisciare su un piano.

Quindi, in termini di tali coordinate,

$$\mathbf{q}_O = (x, y, r), \quad \mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O = (0, 0, -r), \quad \boldsymbol{\omega} = (-\dot{\theta} \sin \varphi, \dot{\theta} \cos \varphi, 0). \quad (41.14)$$

e l'equazione (41.13) diventa

$$\begin{cases} \dot{x} - r\dot{\theta} \cos \varphi = 0, \\ \dot{y} - r\dot{\theta} \sin \varphi = 0, \\ \dot{z} = 0. \end{cases} \quad (41.15)$$

Le equazioni (41.15) non sono integrabili in generale; cfr. l'esercizio 6. Lo sono tuttavia se φ è costante. In tal caso infatti, scegliendo l'asse \mathbf{e}_x in modo tale che sia $\varphi = 0$, le (41.15) diventano

$$\begin{cases} \dot{x} = r\dot{\theta}, \\ \dot{y} = \dot{z} = 0, \end{cases} \quad (41.16)$$

e quindi, per una scelta opportuna dell'origine del sistema fisso ($\mathbf{q}_O = (0, 0, r)$ e $\theta = 0$ all'istante iniziale), otteniamo

$$x = r\theta, \quad y \equiv 0, \quad z \equiv r, \quad (41.17)$$

che poteva essere ottenuta direttamente da semplici considerazioni geometriche, notando che, in seguito a una rotazione di θ del disco, il suo centro avanza di un tratto $r\theta$.

41.14. ESEMPIO. Si descriva il moto di un cilindro omogeneo di massa m e raggio r che rotoli senza strisciare (1) su un piano orizzontale π , e (2) all'interno di una superficie cilindrica di raggio $R > r$; cfr. la figura 41.2

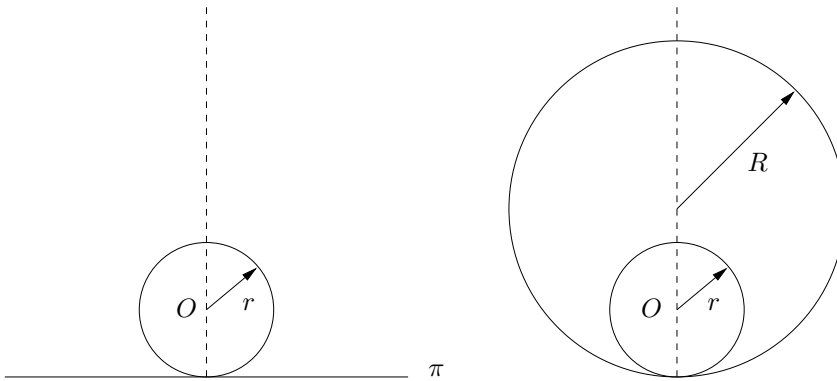


FIGURA 41.2. Cilindro che rotola senza strisciare su un piano (a sinistra) e all'interno di una superficie cilindrica (a destra): entrambe le figure sono in sezione laterale.

41.15. Discussione dell'esempio 41.14. Consideriamo prima il caso (1). Scegliamo un sistema di riferimento in cui il piano (x, y) coincida con il piano π e l'asse y sia parallelo all'asse del cilindro (poiché il moto è di rotolamento senza strisciamento se i due assi sono paralleli all'istante iniziale t_0 restano tali per ogni tempo t). Sia θ l'angolo tra la verticale al piano e un diametro prefissato del cilindro (tale che $\theta = 0$ per $t = 0$). Il centro d'inerzia del cilindro ha velocità parallela al piano, data da

$$\dot{x} = r\dot{\theta}, \quad (41.18)$$

mentre le coordinate y e z si mantengono costanti.

Nel caso (2), sia φ l'angolo tra la verticale e la linea che unisce i centri dei due cilindri. Il centro d'inerzia O del cilindro che rotola si muove con velocità di modulo

$v_O = (R-r)\dot{\varphi}$. La velocità angolare $\dot{\theta}$ di una rotazione pura intorno all'asse istantaneo che coincide con la retta di contatto dei due cilindri è data da

$$\dot{\theta} = \frac{v_O}{r} = \frac{R-r}{r} \dot{\varphi}. \quad (41.19)$$

41.16. Osservazione. Si noti che i vincoli dell'esempio 41.14 si possono ottenere anche attraverso una costruzione geometrica. Nel caso (1), se il centro d'inerzia si è spostato di un tratto x , allora il cilindro deve aver ruotato di un angolo θ tale che

$$x = r\theta, \quad (41.20)$$

mentre, nel caso (2), se il centro d'inerzia ha ruotato di un angolo φ rispetto alla verticale, allora il cilindro che rotola deve aver ruotato di un angolo θ tale che

$$R\varphi = r(\theta + \varphi), \quad (41.21)$$

i.e.

$$(R-r)\varphi = r\theta. \quad (41.22)$$

Si noti che i vincoli (41.20) e (41.22) si ottengono per integrazione diretta, rispettivamente, dei vincoli (41.18) e (41.20). Questo è in accordo con il fatto che un vincolo anolonomo (lineare) integrabile è equivalente a un vincolo olonomo (cfr. l'osservazione 41.7).

Nota bibliografica

Nel presente capitolo abbiamo seguito essenzialmente [Arnol'd 2], Capp. IV e VI, e [Dell'Antonio], Capp. IV÷VI, facendo riferimento però anche a [Gallavotti], Capp. 4 e 5.

Per il paragrafo §36 abbiamo seguito prevalentemente [Levi-Civita-Amaldi], Vol. 1, Capp. III e IV.

Per i paragrafi §37 e §38 abbiamo principalmente avuto in mente [Levi-Civita], Vol. 2, Cap. IV.

In particolare per un approccio ai vincoli quali limiti di sistemi sottoposti a forze di energia potenziale molto intensa, quale quello al quale si è brevemente accennato nel paragrafo §35.1, rimandiamo a [Gallavotti], Capp. 3 e 4.

Per una discussione del moto di alcuni sistemi rigidi semplici sottoposti a forze attive non nulle (quali la trottola di Lagrange), nell'ambito del formalismo lagrangiano, rimandiamo a [Arnol'd2], Cap. VI, [Dell'Antonio], Cap. VIII, e [Levi-Civita-Amaldi], Vol. 2, Cap. VIII.

L'esempio 39.13 è tratto da [Dell'Antonio].

Per definizioni e proprietà delle rigate cfr. *e.g.* [Martinelli], Cap. 8.

Per una discussione delle superfici nello spazio \mathbb{R}^3 cfr. *e.g.* [Giusti2], Cap. 7; più in generale per le superfici in \mathbb{R}^n cfr. *e.g.* [do Campo] o [Dubrovin-Novikov-Fomenko].

Per un'introduzione alle forma differenziali cfr. *e.g.* [Giusti2], Cap. 8, dove sono anche enunciate e dimostrate le proprietà che si sono usate nel testo.

Esercizi

Esercizio 1. Dimostrare le relazioni (35.5) definiscono una superficie regolare in \mathbb{R}^n , utilizzando il teorema della funzione implicita.

Esercizio 2. Dimostrare l'identità (37.7)

Esercizio 3. Dimostrare che il lavoro lungo una traiettoria virtuale $\alpha \rightarrow x(\alpha; t_0)$, con $|\alpha| < \alpha_0$, è dato dalla (39.2). [*Suggerimento.* Data una curva parametrizzata da $s \rightarrow x(s)$, il lavoro compiuto dalla forza f dal punto $x(s_1)$ al punto $x(s_2)$ è dato dall'integrale da s_1 a s_2 di $(f(x(s)), dx(s)/ds)$.]

Esercizio 4. Dimostrare che il principio di d'Alembert implica la (40.5) quando si considerino traiettorie virtuali che corrispondono a traslazioni. [*Suggerimento.* Ogni traslazione si può scrivere come combinazione di rotazioni lungo gli assi coordinati. La traslazione di α lungo l'asse \mathbf{e}_x è data da $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}(\alpha; t_0) = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{e}_x$, quindi $d\mathbf{x}(\alpha; t_0)/d\alpha = \mathbf{e}_x$. Analogamente si discutono le traslazioni lungo gli assi \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z .]

Esercizio 5. Dimostrare che il principio di d'Alembert implica la (40.7) quando si considerino traiettorie virtuali che corrispondono a rotazioni. [*Suggerimento.* Ogni rotazione si può scrivere come combinazione di rotazioni lungo gli assi coordinati. La rotazione di un angolo α intorno all'asse \mathbf{e}_x è data da $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}(\alpha; t_0) = S^{(1)}(\alpha)\mathbf{x}$, quindi $(d\mathbf{x}(\alpha; t_0)/d\alpha)|_{\alpha=0} = (0, x_3, -x_2)$, così che $\langle \mathbf{f}_V^{(n)}, d\mathbf{x}/d\alpha \rangle = f_{V2}^{(n)} x_3 - f_{V3}^{(n)} x_2$ è la prima componente del vettore $[\mathbf{f}_V^{(n)}, \mathbf{x}]$. Analogamente si discutono le rotazioni intorno agli assi \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z .]

Esercizio 6. Si verifichi che il vincolo definito dalle (41.15) non è integrabile.

Esercizio 7. Si consideri un cilindro (circolare retto) che rotoli senza strisciare su un piano orizzontale π come nell'esempio 41.14: in ogni istante il cilindro tocca π lungo una delle sue generatrici g . Sia Q un punto di contatto lungo tale generatrice. Determinare l'asse istantaneo di rotazione rispetto al punto Q e l'asse di moto. Determinare la rigata fissa e la rigata mobile descritte dall'asse di moto. [*Soluzione.* L'asse istantaneo di rotazione e l'asse di moto coincidono entrambi con la generatrice g . La rigata fissa e la rigata mobile coincidono entrambe con il piano π .]

Esercizio 8. Si consideri un cilindro (circolare retto) che rotoli senza strisciare su un piano orizzontale π che si muova in direzione verticale con velocità costante \mathbf{v} . Determinare l'asse istantaneo di rotazione rispetto a un punto Q appartenente alla generatrice di contatto tra il cilindro e il piano (cfr. l'esercizio 7) e l'asse di moto. Determinare la rigata fissa e la rigata mobile descritte dall'asse di moto. [*Soluzione.* L'asse istantaneo di rotazione è dato dalla generatrice g , l'asse di moto è individuato dalla retta parallela a g passante per il punto P^* situato sul piano π a distanza $d=|\mathbf{v}|/|\boldsymbol{\omega}|$ da Q nel verso di avanzamento del cilindro se \mathbf{v} è diretta verso l'alto e nel verso opposto se \mathbf{v} è diretta verso il basso. La rigata fissa è il piano inclinato descritto dall'asse di moto, mentre la rigata mobile è il cilindro circolare retto di cui l'asse coincide con l'asse del cilindro e la cui base ha raggio $\sqrt{d^2 + r^2}$, se r è il raggio della base del cilindro: tale cilindro rotola senza strisciare sulla rigata fissa.]

Esercizio 9. Si consideri un cilindro (circolare retto) che rotoli senza strisciare su un piano orizzontale π che si muova in direzione orizzontale con velocità costante \mathbf{v} . Determinare l'asse istantaneo di rotazione rispetto a un punto Q appartenente alla generatrice di contatto tra il cilindro e il piano

346 CAPITOLO 9. VINCOLI E SISTEMI RIGIDI

(cfr. l'esercizio 7) e l'asse di moto. Determinare la rigata fissa e la rigata mobile descritte dall'asse di moto.

Esercizio 10. Discutere come si modificano la definizione 36.16 e il teorema 36.24 nel caso in cui il moto avvenga in \mathbb{R}^2 anziché in \mathbb{R}^3 (moto rigido piano). [*Soluzione.* In \mathbb{R}^2 , in luogo della (33.46), si può scrivere $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}'_P + \mathbf{v}_O + A(\mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O)$, dove A è la matrice 2×2 di elementi $A_{11} = A_{22} + 0$, $A_{12} = -A_{21} = -\omega$ e gli altri simboli si interpretano nel modo ovvio. Si definisce *centro di rotazione* il punto P^* tale che $\mathbf{v}_O + A(\mathbf{q}_{P^*} - \mathbf{q}_O) = 0$; quindi $\mathbf{q}_{P^*} = \mathbf{q}_O - A^{-1}\mathbf{v}_O$, che è ben definito poiché A è invertibile. Il centro di rotazione è l'equivalente in \mathbb{R}^2 dell'asse di moto in \mathbb{R}^3 . Il centro di rotazione descrive nel sistema fisso una curva detta *base* e nel sistema mobile una curva detta *rulletta*. Base e rulletta sono gli equivalenti in \mathbb{R}^2 della rigata fissa e della rigata mobile in \mathbb{R}^3 , rispettivamente.]