**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006**

# FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO I - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Per prima cosa calcoliamo lo spettro della matrice $A$. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = (-1-\lambda)(2-\lambda) + \frac{9}{4} = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}$$

e dunque

$$P(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Pertanto lo spettro della matrice $A$ sarà l'insieme $\Sigma(A) = \{\frac{1}{2}\}$. Avremo dunque il solo autospazio generalizzato $E^* = E^*\left(\frac{1}{2}\right) = Ker\left(A - \frac{1}{2}\mathbb{1}\right)^2$ e si osserva immediatamente che $\left(A - \frac{1}{2}\mathbb{1}\right)^2$ è la matrice nulla. Perciò avremo che $E^* = \mathbb{R}^2$ e quindi possiamo scegliere come autovettori generalizzati, i vettori della base standard di $\mathbb{R}^2$, i.e.

$$v_1 = (1\,,\,0) \qquad\qquad v_2 = (0\,,\,1)$$

da cui otteniamo

$$Q^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e quindi $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = \widetilde{S}$. Sia $N$ la matrice

$$N = A - S = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che $N$ è una matrice nilpotente, infatti $N^2 = (0)_{ij}$. Possiamo dunque calcolare l'esponenziale di $A$ come il prodotto degli esponenziali di $S$ e $N$, i.e.

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= Q^{-1}\exp\left(\widetilde{S}t\right)Q\left(\mathbb{1} + Nt\right) \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}t & -t \\ \frac{9}{4}t & 1 + \frac{3}{2}t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{3}{2}t\right) & -te^{\frac{t}{2}} \\ \frac{9}{4}te^{\frac{t}{2}} & e^{\frac{t}{2}}\left(1 + \frac{3}{2}t\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e quindi la soluzione del sistema risulta essere $x(t) = \exp(At)x_0$ i.e.

$$\begin{cases} x_1(t) = (2-4t)e^{\frac{t}{2}} \\ x_2(t) = (1+6t)e^{\frac{t}{2}} \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 2.</u> Per prima cosa calcoliamo lo spettro della matrice $A$. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{1}) = -\lambda(\alpha - \lambda) + \alpha - 1 = \lambda^2 - \alpha\lambda + \alpha - 1$$

e dunque

$$P(\lambda) = 0 \iff \lambda = \alpha - 1, \;\; \lambda = 1$$

Pertanto lo spettro di $A$ risulterà essere $\Sigma(A) = \{\alpha - 1\,,\, 1\}$. Dovremo quindi suddividere nei due casi, $\alpha \neq 2$ e $\alpha = 2$. Consideriamo per primo il caso $\alpha \neq 2$ e calcoliamo gli autospazi (generalizzati). $E^*(1) = Ker(A - \mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} -x_1 + (\alpha - 1)x_2 = 0 \\ -x_1 + (\alpha - 1)x_2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \{x_1 = (\alpha - 1)x_2$$

e quindi risulterà essere

$$E^*(1) = \{((\alpha - 1)t\,,\, t) \in \mathbb{R}^2 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$$

mentre $E^*(\alpha - 1) = Ker(A - (\alpha - 1)\mathbb{1})$ che è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} -(\alpha - 1)x_1 + (\alpha - 1)x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \{x_1 = x_2$$

perciò avremo

$$E^*(\alpha - 1) = \{(t\,,\, t) \in \mathbb{R}^2 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$$

Pertanto una base di autovettori (generalizzati) sarà data, ad esempio, dai vettori

$$v_1 = (\alpha - 1\,, 1) \qquad v_2 = (1\,, 1)$$

da cui

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-2} & -\frac{1}{\alpha-2} \\ -\frac{1}{\alpha-2} & \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$, quindi $A$ è semisemplice e il suo esponenziale è

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1} \exp(\widetilde{S}t) Q \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-1)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-2} & -\frac{1}{\alpha-2} \\ -\frac{1}{\alpha-2} & \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(\alpha-1)e^t - e^{(\alpha-1)t}}{\alpha-2} & \frac{(\alpha-1)(e^{(\alpha-1)t} - e^t)}{\alpha-2} \\ \frac{e^t - e^{(\alpha-1)t}}{\alpha-2} & \frac{(\alpha-1)e^t - e^{(\alpha-1)t}}{\alpha-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi la soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{(\alpha - 1)e^t - e^{(\alpha-1)t}}{\alpha - 2}\, x_{01} + \dfrac{(\alpha - 1)(e^{(\alpha-1)t} - e^t)}{\alpha - 2}\, x_{02} \\[2ex] x_2(t) = \dfrac{e^t - e^{(\alpha-1)t}}{\alpha - 2}\, x_{01} + \dfrac{(\alpha - 1)e^t - e^{(\alpha-1)t}}{\alpha - 2}\, x_{02} \end{cases}$$

Analizziamo ora il caso $\alpha = 2$. Il solo autospazio generalizzato è $E^*(1) = Ker(A - \mathbb{1})^2$ e la matrice $(A - \mathbb{1})^2$ è la matrice nulla; pertanto $E^*(1) = \mathbb{R}^2$ e quindi scegliamo come autovettori generalizzati, i vettori della base standard di $\mathbb{R}^2$ i.e.

$$v_1 = (1\,,\,0) \qquad\qquad v_2 = (0\,,\,1)$$

da cui otteniamo

$$Q^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = \widetilde{S}$. Sia $N$ la matrice

$$N = A - S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che $N$ è una matrice nilpotente, infatti $N^2 = (0)_{ij}$. Possiamo dunque calcolare l'esponenziale di $A$ come il prodotto degli esponenziali di $S$ e $N$, i.e.

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp\left(\widetilde{S}t\right)Q\,(\mathbb{1} + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t\,(1-t) & te^t \\ -te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi la soluzione del sistema è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = (1-t)e^t x_{01} + te^t x_{02} \\ x_2(t) = -te^t x_{01} + (1+t)e^t x_{02} \end{cases}$$

<u>Esercizio 3.</u> Per prima cosa calcoliamo lo spettro della matrice $A$. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)[(6-\lambda)(-2-\lambda) + 17] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$$

perciò avremo

$$P(\lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = 1,\ \ \lambda = 2+i,\ \ \lambda = 2-i$$

e quindi $\Sigma(A) = \{1\,,\,2+i\,,\,2-i\}$. Calcoliamo ora gli autospazi (generalizzati). $E^*(1) = Ker(A - \mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 17x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = -7x_1 \\ x_2 = 23x_1 \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$E^*(1) = \{(t\,,\,23t\,,\,-7t) \in \mathbb{R}^3\ :\ t \in \mathbb{R}\}$$

Calcoliamo ora $E^*(2+i) = Ker(A - (2+i)\mathbb{1})$ che è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} -(1+i)x_1 = 0 \\ 4x_1 + (4-i)x_2 + 17x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - (4+i)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -(4+i)x_3 \end{cases}$$

e quindi

$$E^*(2+i) = \{(0, -(4+i)t, t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

da cui troviamo i due vettori coniugati

$$\varphi = (0, -4-i, 1) \qquad \text{e} \qquad \overline{\varphi} = (0, -4+i, 1)$$

che, scritti come somma di parte reale e parte immaginaria, sono $(0,-4,1) \pm i(0,-1,0)$. Quindi possiamo considerare i due vettori reali

$$u = (0, -4, 1) \qquad \text{e} \qquad v = (0, -1, 0)$$

Pertanto una base di autovettori generalizzati risulta essere $u$, $v$ e $w = (1, 23, -7)$. In questo modo avremo

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 23 & -1 & -4 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & -4 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che $Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$, quindi A è una matrice semisemplice e il suo esponenziale è

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= Q^{-1}\exp(\widetilde{S})Q \\
&= Q^{-1}\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ 0 & e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix} Q \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 23e^t + e^{2t}(27\sin t - 23\cos t) & e^{2t}(\cos t + 4\sin t) & 17e^{2t}\sin t \\ -7e^t + e^{2t}(7\cos t - 5\sin t) & -e^{2t}\sin t & e^{2t}(\cos t - 4\sin t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

perciò la soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x_1(t) = -e^t \\ x_2(t) = -23e^t + (23\cos t - 10\sin t)e^{2t} \\ x_3(t) = 7e^t + (\sin t - 6\cos t)e^{2t} \end{cases}$$

<u>Esercizio 4.</u> Per prima cosa calcoliamo lo spettro della matrice $A$. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{1}) = -\lambda(2-\lambda) - \alpha = \lambda^2 - 2\lambda - \alpha$$

perciò dovremo distinguere i tre casi, $\alpha = -1$, $\alpha > -1$ e $\alpha < -1$. Cominciamo con il caso $\alpha > -1$; in questo caso il polinomio caratteristico ha due radici reali e lo spettro della matrice $A$ è dato dall'insieme $\Sigma(A) = \{1 + \sqrt{1+\alpha}\,, 1 - \sqrt{1+\alpha}\,\}$. Avremo quindi $E^*(1+\sqrt{1+\alpha}) = Ker(A - (1+\sqrt{1+\alpha})\mathbb{1})$ che è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} (1-\sqrt{1+\alpha})x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ x_1 - (1+\sqrt{1+\alpha})x_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \{x_1 = (1+\sqrt{1+\alpha})x_2$$

pertanto

$$E^*(1+\sqrt{1+\alpha}) = \{((1+\sqrt{1+\alpha})t\,, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

Analogamente $E^*(1-\sqrt{1+\alpha}) = Ker(A - (1-\sqrt{1+\alpha})\mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} (1+\sqrt{1+\alpha})x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ x_1 - (1-\sqrt{1+\alpha})x_2 = 0 \end{cases} \implies \left\{ x_1 = (1-\sqrt{1+\alpha})x_2 \right.$$

da cui otteniamo

$$E^*(1-\sqrt{1+\alpha}) = \{((1-\sqrt{1+\alpha})t\,, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

Scegliamo come base di autovettori (generalizzati), ad esempio, i vettori

$$v_1 = (1+\sqrt{1+\alpha}\,, 1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = (1-\sqrt{1+\alpha}\,, 1)$$

In questo modo avremo

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{1+\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{1+\alpha} & 1-\sqrt{1+\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha}} & \frac{-1+\sqrt{1+\alpha}}{2\sqrt{1+\alpha}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{1+\alpha}} & \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2\sqrt{1+\alpha}} \end{pmatrix}$$

e si verifica immediatamente che $Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$ il che significa che $A$ è semisemplice e il suo esponenziale è

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp(\widetilde{S}t)Q \\ &= Q^{-1}\begin{pmatrix} e^{(1+\sqrt{1+\alpha})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-\sqrt{1+\alpha})t} \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{1+\alpha})e^{(1+\sqrt{1+\alpha})t} - (1-\sqrt{1+\alpha})e^{(1-\sqrt{1+\alpha})t}}{2\sqrt{1+\alpha}} & \frac{\alpha(e^{(1+\sqrt{1+\alpha})t} - e^{(1-\sqrt{1+\alpha})t})}{2\sqrt{1+\alpha}} \\ \frac{e^{(1+\sqrt{1+\alpha})t} - e^{(1-\sqrt{1+\alpha})t}}{2\sqrt{1+\alpha}} & \frac{(-1+\sqrt{1+\alpha})e^{(1+\sqrt{1+\alpha})t} + (1+\sqrt{1+\alpha})e^{(1-\sqrt{1+\alpha})t}}{2\sqrt{1+\alpha}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

perciò la soluzione è

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{(1+\alpha+\sqrt{1+\alpha})e^{(1+\sqrt{1+\alpha})t} - (1+\alpha-\sqrt{1+\alpha})e^{(1-\sqrt{1+\alpha})t}}{2\sqrt{1+\alpha}} \\ x_2(t) = \dfrac{e^{(1+\sqrt{1+\alpha})t} + e^{(1-\sqrt{1+\alpha})t}}{2} \end{cases}$$

Se invece $\alpha < -1$ lo spettro di $A$ è $\Sigma(A) = \{1+i\sqrt{|1+\alpha|}\,, 1-i\sqrt{|1+\alpha|}\}$. Calcoliamo gli autospazi generalizzati. $E^*(1+i\sqrt{|1+\alpha|}) = Ker(A-(1+i\sqrt{|1+\alpha|})\mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} (1-i\sqrt{|1+\alpha|})x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ x_1 - (1+i\sqrt{|1+\alpha|})x_2 = 0 \end{cases} \implies \left\{ x_1 = (1+i\sqrt{|1+\alpha|})x_2 \right.$$

e quindi avremo

$$E^*(1+i\sqrt{|1+\alpha|}) = \{((1+i\sqrt{|1+\alpha|})t\,, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

da cui troviamo i due vettori coniugati $(1,1) \pm i(\sqrt{|1+\alpha|}, 0)$ e quindi possiamo considerare i due vettori reali

$$u = (1,1) \qquad \text{e} \qquad v = (\sqrt{|1+\alpha|}, 0)$$

come autovettori generalizzati. In questo modo troviamo

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{|1+\alpha|} \\ \sqrt{|1+\alpha|} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{|1+\alpha|} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|1+\alpha|}} & -\frac{1}{\sqrt{|1+\alpha|}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che $Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$ e quindi l'esponenziale di $A$ risulterà essere

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp(\widetilde{S}t)Q = A \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} e^t\cos(t\sqrt{|1+\alpha|}) & -e^t\sin(t\sqrt{|1+\alpha|}) \\ e^t\sin(t\sqrt{|1+\alpha|}) & e^t\cos(t\sqrt{|1+\alpha|}) \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^t(\sqrt{|1+\alpha|}\cos(t\sqrt{|1+\alpha|})+\sin(t\sqrt{|1+\alpha|}))}{\sqrt{|1+\alpha|}} & -\frac{e^t(\sin(t\sqrt{|1+\alpha|}))}{\sqrt{|1+\alpha|}} - e^t\sqrt{|1+\alpha|}\sin(t\sqrt{|1+\alpha|})) \\ \frac{e^t\sin(t\sqrt{|1+\alpha|})}{\sqrt{|1+\alpha|}} & -\frac{e^t\sin(t\sqrt{|1+\alpha|})}{\sqrt{|1+\alpha|}} + e^t\cos(t\sqrt{|1+\alpha|}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

perciò la soluzione del problema sarà

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t(\cos(t\sqrt{|1+\alpha|}) - \sqrt{|1+\alpha|}\sin(t\sqrt{|1+\alpha|}) \\ x_2(t) = e^t\cos(t\sqrt{|1+\alpha|}) \end{cases}$$

Infine se $\alpha = -1$ lo spettro di $A$ sarà $\Sigma(A) = \{1\}$. In questo caso, l'unico autospazio generalizzato sarà $E^* = E^*(1) = Ker(A - \mathbb{1})^2$ e si verifica immediatamente che $(A - \mathbb{1})^2 = (0)_{ij}$. Pertanto risulterà $E^* = \mathbb{R}^2$ e potremo scegliere, come autovettori generalizzati, la base standard di $\mathbb{R}^2$, i.e.

$$v_1 = (1,0) \qquad \text{e} \qquad v_2 = (0,2)$$

da cui otteniamo $Q^{-1} = Q = \widetilde{S} = \mathbb{1}$. Definendo $N$ la matrice

$$N = A - \widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

si vede immediatamente che $N^2$ à la matrice nulla, e quindi

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp(\widetilde{S})(\mathbb{1} + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t(1+t) & -te^t \\ te^t & (1-t)e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi la soluzione del sistema sarà

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t \\ x_2(t) = e^t \end{cases}$$