

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006  
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO X - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

(1.1) **Equazioni di Newton.** Poiché  $m = 1$ , il potenziale efficace è dato da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{\alpha}{6\rho^6} - \frac{1}{4\rho^4} + \frac{L^2}{2\rho^2}, \quad L \neq 0$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \frac{\alpha}{\rho^7} - \frac{1}{\rho^5} + \frac{L^2}{\rho^3}$$

**Sistema dinamico associato.**

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = \frac{\alpha}{\rho^7} - \frac{1}{\rho^5} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

(1.2) **Punti d'equilibrio.** Considerato il sistema dinamico associato, i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale efficace; pertanto dobbiamo risolvere l'equazione

$$-\frac{\alpha}{\rho^7} + \frac{1}{\rho^5} - \frac{L^2}{\rho^3} = 0$$

e questa ha soluzione se e solo se

$$L^2\rho^4 - \rho^2 + \alpha = 0$$

Suddividiamo pertanto il problema in tre casi.

**caso 1.**  $\alpha > 0$ . In questo caso l'equazione ha soluzione per  $4\alpha L^2 < 1$ . Avremo quindi

- per  $4\alpha L^2 > 1$  nessun punto d'equilibrio.
- per  $4\alpha L^2 = 1$  un solo punto d'equilibrio in  $(1/\sqrt{2L^2}, 0)$ .
- per  $4\alpha L^2 < 1$  due punti d'equilibrio:

$$P_1 = (\rho_1, 0) = \left( \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha L^2}}{2L^2}}, 0 \right) \quad P_2 = (\rho_2, 0) = \left( \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha L^2}}{2L^2}}, 0 \right)$$

**caso 2.**  $\alpha = 0$ . In questo caso l'equazione ammette una soluzione per ogni valore di  $L$ , perciò il sistema avrà come unico punto d'equilibrio il punto

$$P_0 = (\rho_0, 0) = \left( \frac{1}{|L|}, 0 \right)$$

**caso 3.**  $\alpha < 0$ . Ponendo  $\beta = -\alpha > 0$  avremo che l'equazione ha soluzione per

$$\rho_+ = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta L^2}}{2L^2}}$$

e quindi il sistema ammette un punto d'equilibrio  $P_+ = (\rho_+, 0)$ .

**Stabilità dei punti d'equilibrio.** Derivando ulteriormente il potenziale otteniamo

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} = \frac{7\alpha}{\rho^8} - \frac{5}{\rho^6} + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

**caso 1.** Se  $4\alpha L^2 = 1$  si verifica immediatamente che  $[d^2V_{\text{eff}}/d\rho^2](1/\sqrt{2L^2}) = 0$ . D'altra parte, si vede facilmente che  $[dV_{\text{eff}}/d\rho] \leq 0$  quindi in  $\rho = 1/\sqrt{2L^2}$  avremo un punto di sella per il potenziale efficace, perciò il punto  $(1/\sqrt{2L^2}, 0)$  è instabile. Se invece  $4\alpha L^2 < 1$  avremo

$$\left. \frac{de^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} \right|_{\rho_1} = \frac{7\alpha - 5\rho_1^2 + 3L^2\rho_1^2}{\rho_1^8}$$

e studiando solo il segno del numeratore di tale espressione vediamo che

$$\begin{aligned} 7\alpha - 5 \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha L^2}}{2L^2} \right) + \frac{3}{4L^2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\alpha L^2} \right)^2 &= 4\alpha - \frac{1}{L^2} + \frac{\sqrt{1 - 4\alpha L^2}}{L^2} \\ &> 4\alpha - \frac{1}{L^2} + \frac{1 - 4\alpha L^2}{L^2} = 0 \end{aligned}$$

dove per la maggiorazione abbiamo usato il fatto che  $1 - 4\alpha L^2 < 1$ . Analogamente studiando solo il numeratore di  $[d^2V/d\rho^2](\rho_2)$  abbiamo

$$\begin{aligned} 7\alpha - 5 \left( \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha L^2}}{2L^2} \right) + \frac{3}{4L^2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4\alpha L^2} \right)^2 &= 4\alpha - \frac{1}{L^2} - \frac{\sqrt{1 - 4\alpha L^2}}{L^2} \\ &< 4\alpha - \frac{1}{L^2} - \frac{1 - 4\alpha L^2}{L^2} \\ &= 8\alpha - \frac{2}{L^2} < 0 \end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che  $1 - 4\alpha L^2 < 1$ , e nella seconda il fatto che  $4\alpha < 1/L^2$ . Perciò avremo che  $P_1$  è un punto d'equilibrio stabile mentre  $P_2$  è instabile.

**caso 2.** Si verifica immediatamente che  $[d^2V/d\rho^2](\rho_0) = -2L^2 < 0$  e quindi il punto  $P_0$  è instabile.

**caso 3.** Guardando solo al denominatore di  $[d^2V/d\rho^2](\rho_+)$  vediamo che

$$-7\beta - 5 \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta L^2}}{2L^2} \right) + \frac{3}{4L^2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4\beta L^2} \right)^2 = - \left( 4\beta + \frac{1}{L^2} + \frac{\sqrt{1 + 4\beta L^2}}{L^2} \right) < 0$$

perciò il punto  $P_+$  è instabile.

(1.3) **Andamento all'infinito.**

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0$$

Inoltre se  $\alpha > 0$  avremo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

mentre se  $\alpha \leq 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$$

**Grafico del potenziale.**

**caso 1.**

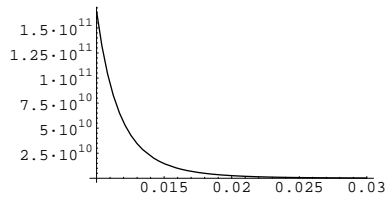


Figura 1: Grafico del potenziale per  $4\alpha L^2 > 1$

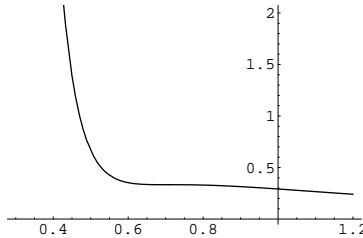


Figura 2: Grafico del potenziale per  $4\alpha L^2 = 1$

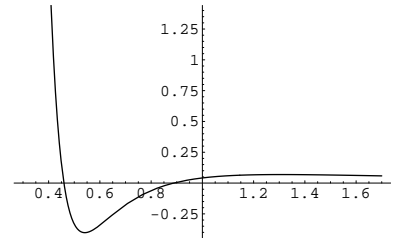


Figura 3: Grafico del potenziale per  $4\alpha L^2 < 1$

**caso 2.**

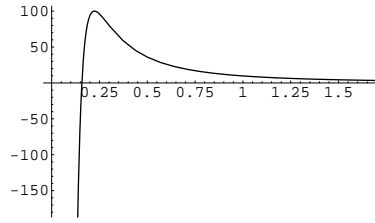


Figura 4: Grafico del potenziale efficace per  $\alpha = 0$ .

**caso 3.**

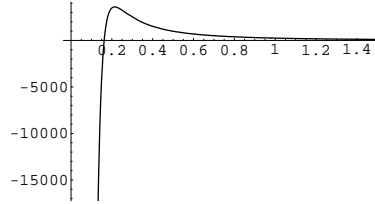


Figura 5: Grafico del potenziale efficace per  $\alpha < 0$ .

(1.4) **Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ . Suddividiamo dunque il problema nei tre casi.

**caso 1.** In questo caso il potenziale efficace è limitato dal basso. In particolare se  $4\alpha L^2 > 1$  ad ogni valore di energia avremo una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ . Se invece  $4\alpha L^2 = 1$  avremo

- Per  $0 < E < V_{\text{eff}}(1/\sqrt{2L^2})$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ .
- Per  $E = V_{\text{eff}}(1/\sqrt{2L^2})$  due traiettorie aperte simmetriche rispetto all'asse  $\rho$
- Per  $E > V_{\text{eff}}(1/\sqrt{2L^2})$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ .

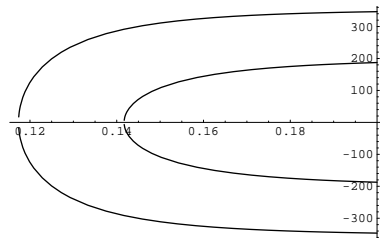


Figura 6: Piano delle fasi,  $4\alpha L^2 > 1$

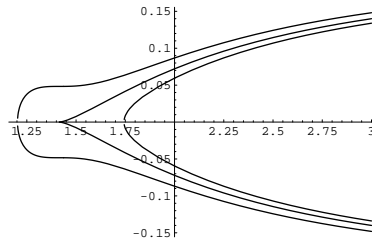


Figura 7: Piano delle fasi,  $4\alpha L^2 = 1$

Se infine  $4\alpha L^2 < 1$  è necessario suddividere ancora in tre casi. Infatti, guardando al solo numeratore dell'espressione di  $V_{\text{eff}}(\rho_1)$  abbiamo

$$2\alpha - 3 \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha L^2}}{2L^2} \right) + \frac{3}{2L^2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\alpha L^2} \right)^2 = -4\alpha + \frac{3}{2L^2} - \frac{3}{2L^2} \sqrt{1 - 4\alpha L^2}$$

e studiando il segno di quest'espressione si verifica facilmente che è positivo per  $\alpha L^2 < 3/16$ . Pertanto, nel caso in cui  $\alpha L^2 < 3/16$ , il potenziale è limitato dal basso dall'asse  $\rho$  e quindi nel piano delle fasi avremo

- per  $0 < E < V_{\text{eff}}(\rho_1)$  una sola traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ .
- per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_1)$  una traiettoria aperta e il punto stabile  $P_1$ .
- per  $V_{\text{eff}}(\rho_1) < E < V_{\text{eff}}(\rho_2)$  una traiettoria aperta ed una periodica intorno al punto stabile.
- per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_2)$  una traiettoria omoclina e due aperte che si intersecano con tangenza obliqua nel punto instabile  $P_2$ .
- per  $E > V_{\text{eff}}(\rho_2)$  una traiettoria aperta.

Nel caso in cui  $\alpha L^2 = 3/16$  avremo invece

- per  $E = 0$  il solo punto stabile  $P_1$ .
- per  $0 < E < V_{\text{eff}}(\rho_2)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \sqrt{2E}$  ed una periodica intorno al punto stabile.
- per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_2)$  una traiettoria omoclina e due aperte che si intersecano con tangenza obliqua nel punto instabile  $P_2$ .
- per  $E > V_{\text{eff}}(\rho_2)$  una traiettoria aperta.

Infine, nel caso in cui  $\alpha L^2 > 3/16$  avremo

- per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_1)$  il solo punto stabile  $P_1$ .
- per  $V_{\text{eff}}(\rho_1) < E \leq 0$  una traiettoria periodica intorno a  $P_1$ .
- per  $0 < E < V_{\text{eff}}(\rho_2)$  una traiettoria periodica ed una aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ .
- per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_2)$  una traiettoria omoclina e due aperte che si intersecano con tangenza obliqua nel punto instabile  $P_2$ .
- per  $E > V_{\text{eff}}(\rho_2)$  una traiettoria aperta.

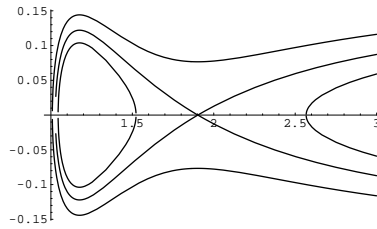


Figura 8: Piano delle fasi nei casi  $4\alpha L^2 < 1$ . Notare che l'unica cosa che cambia nei tre sottocasi è il valore di energia per cui compaiono traiettorie periodiche.

**casi 2 e 3.** Trattiamo unitamente i casi  $\alpha \leq 0$  perché presentano qualitativamente la stessa situazione nel piano delle fasi. Osserviamo immediatamente che, poiché il potenziale efficace non è limitato dal basso, il moto sarà possibile ad ogni valore di energia. Indicando con  $\rho_0$  il valore di  $\rho$  per cui, in entrambi i casi, il potenziale efficace assume massimo (e quindi con  $P_0$  il corrispondente punto instabile), in particolare avremo

- per  $E \leq 0$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow 0} y(\rho) = \pm\infty$ .
- per  $0 < E < V_{\text{eff}}(\rho_0)$  due traiettorie aperte, una simile a quella trovata al punto precedente ed una con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ .
- per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_0)$  quattro traiettorie aperte che s'intersecano con tangenza obliqua nel punto instabile  $P_0$ .

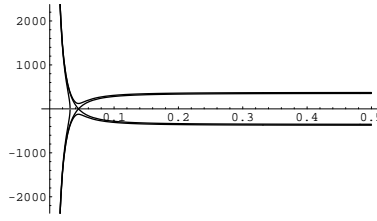


Figura 9: Piano delle fasi nei casi 2 e 3.

- per  $E > V_{\text{eff}}(\rho_0)$  due traiettorie aperte, simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ .

(1.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente, avremo traiettorie periodiche solo nel caso  $4\alpha L^2 < 1$ . In particolare ciò avverrà per  $V_{\text{eff}}(\rho_1) < E < V_{\text{eff}}(\rho_2)$  e  $\rho < \rho_2$ .

ESERCIZIO 2.

(2.1) **Equazione di Newton.** Essendo  $m = 1$ , il potenziale efficace è dato da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{\alpha}{2(\rho^2 + 1)} + \frac{L^2}{2\rho^2} \quad L^2 \neq 0$$

e quindi l'equazione di newton del sistema è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \frac{\alpha\rho}{(\rho^2 + 1)^2} + \frac{L^2}{\rho^3}$$

**Sistema dinamico associato.** Avendo posto  $y = \dot{\rho}$ , otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = \frac{\alpha\rho}{(\rho^2 + 1)^2} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

(2.2) **Andamento all'infinito.**

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

indipendentemente dai valori di  $\alpha$  e  $L$

**Punti critici.** Si tratta di risolvere l'equazione

$$-\frac{\alpha\rho}{(\rho^2 + 1)^2} - \frac{L^2}{\rho^3} = 0$$

che ha soluzione se e solo se

$$(L^2 + \alpha)\rho^4 + 2L^2\rho^2 + L^2 = 0$$

Innanzitutto se  $\alpha = -L^2$  l'equazione si riduce a

$$2L^2\rho^2 + L^2 = 0$$

che non ammette soluzioni. Se  $\alpha > -L^2$  di nuovo l'equazione non ammette soluzioni. Infatti, ponendo  $t = \rho^2$ , troviamo che deve essere

$$t_{\pm} = \frac{-L^2 \pm \sqrt{-\alpha L^2}}{L^2 + \alpha}$$

perciò deve valere  $-L^2 < \alpha < 0$ . D'altra parte in questo caso, si vede immediatamente che  $t_{\pm} < 0$  e quindi l'equazione in  $\rho$  non ammette soluzioni. Infine se  $\alpha < -L^2$  notiamo che  $t_+ < 0$  mentre  $t_- > 0$ . Quindi avremo che  $[dV_{\text{eff}}/d\rho] = 0$  se e solo se  $\alpha < -L^2$  e in questo caso avremo un'unica soluzione data da

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{-L^2 - \sqrt{-\alpha L^2}}{L^2 + \alpha}}$$

Inoltre in questo caso vediamo che  $[dV_{\text{eff}}/d\rho] > 0$  per  $\rho > \rho_0$  ed è negativo per  $\rho < \rho_0$  quindi  $V_{\text{eff}}(\rho)$  ha un minimo in  $\rho_0$ .

**Grafico del potenziale.**

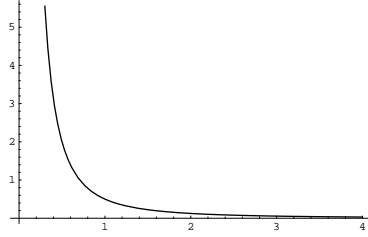


Figura 10: Potenziale per  $\alpha \geq -L^2$

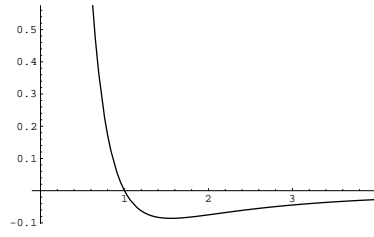


Figura 11: Potenziale per  $\alpha < -L^2$

(2.3) **Punti d'equilibrio e stabilità.** In generale i punti d'equilibrio sono tutti e soli della forma  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale, quindi se  $\alpha \geq -L^2$  il sistema non ammette punti d'equilibrio, mentre se  $\alpha < -L^2$  il sistema ammette un solo punto d'equilibrio stabile e cioè

$$P_0 = (\rho_0, 0) = \left( \sqrt{\frac{-L^2 - \sqrt{-\alpha L^2}}{L^2 + \alpha}}, 0 \right)$$

(2.4) **Piano delle fasi.** Da  $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$  otteniamo  $y = \pm \sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$ . Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ . Sott dividiamo quindi nei due casi

**Caso 1.**  $\alpha > -L^2$ . In questo caso notiamo che  $V_{\text{eff}}(\rho) > 0$  per ogni valore di  $\rho$  e quindi per ogni valore di  $E > 0$  avremo una curva aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .

**Caso 2.**  $\alpha < -L^2$ .

- Per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_0)$  il solo punto stabile  $P_0$ .
- Per  $V_{\text{eff}}(\rho_0) < E < 0$  una traiettoria periodica intorno a  $P_0$ .
- Per  $E > 0$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\infty$ .

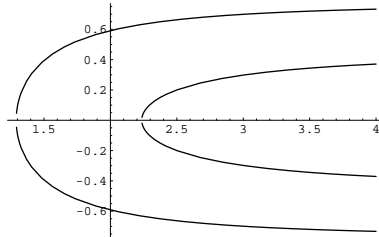


Figura 12: Piano delle fasi,  $\alpha > -L^2$

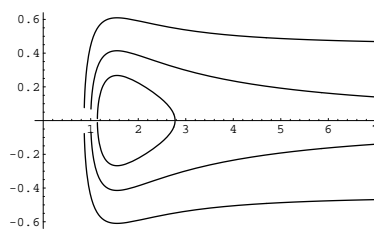


Figura 13: Piano delle fasi,  $\alpha < -L^2$

(2.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente, avremo traiettorie periodiche solo nel caso  $\alpha < -L^2$ . In particolare ciò avverrà per  $V_{\text{eff}}(\rho_0) < E < 0$ .

(2.6) **Moto complessivo.** Avremo moto complessivo periodico in accordo con le condizioni date al punto precedente, e per  $\rho = \rho_0$ . Inoltre, essendo

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2L^{-2}(E - V_{\text{eff}}(\rho))}} \quad \{\rho_1, \rho_2\} \subset V_{\text{eff}}^{-1}(E)$$

dovrà valere anche  $\Delta\theta = 2\pi q$  per qualche  $q \in \mathbb{Q}$ .

### ESERCIZIO 3.

(3.1) **Descrizione del moto.** Ricordiamo che nel sistema del centro di massa, il sistema si disaccoppia, in coordinate polari, nei due problemi

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} \quad \dot{\theta} = \frac{L}{2\mu\rho^2}$$

che nel nostro caso particolare, essendo  $\mu = 1$ , diventa

$$\ddot{\rho} = 6\rho^5 - 2\rho + \frac{L^2}{\rho^3} \quad \dot{\theta} = \frac{L}{2\rho^2}$$

Poiché la parte angolare dipende esclusivamente dalla parte radiale ci concentreremo solo sulla prima equazione, il cui sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = 6\rho^5 - 2\rho + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

(3.2) **Punti d'equilibrio.** Sappiamo che i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato sono tutti e soli i punti della forma  $(\rho_0, 0)$  con  $\rho_0$  punto critico del potenziale efficace, pertanto dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = 2\rho - 6\rho^5 - \frac{L^2}{\rho^3} = 0$$

che ha soluzione se e solo se

$$6\rho^8 - 2\rho^4 + L^2 = 0$$

e questa ha soluzione per  $6L^2 \leq 1$ . In particolare avremo che, se  $6L^2 > 1$ , il sistema non ammette punti d'equilibrio; se  $6L^2 = 1$  il sistema ammette un solo punto d'equilibrio dato da  $P_0 = (1/\sqrt[4]{6}, 0)$

Infine per  $6L^2 < 1$  troviamo due punti d'equilibrio:

$$P_- = (\rho_-, 0) = \left( \sqrt[4]{\frac{1 - \sqrt{1 - 6L^2}}{6}}, 0 \right) \quad P_+ = (\rho_+, 0) = \left( \sqrt[4]{\frac{1 + \sqrt{1 - 6L^2}}{6}}, 0 \right)$$

**Stabilità dei punti d'equilibrio** Se  $6L^2 = 1$  notiamo che  $[dV_{\text{eff}}/d\rho] \leq 0$  per ogni valore di  $\rho$ , perciò  $\rho_0$  è un punto di flesso per il potenziale efficace. Quindi  $P_0$  è un punto instabile. Se invece  $6L^2 < 1$  si vede altrettanto facilmente che  $[dV_{\text{eff}}/d\rho] \geq 0$  per valori di  $\rho$  nell'intervallo  $[\rho_-, \rho_+]$  e negativo altrimenti, quindi  $\rho_-$  è un punto di minimo del potenziale mentre  $\rho_+$  è un punto di massimo perciò  $P_-$  è un punto stabile mentre  $P_+$  è un punto instabile.

(3.3) Poiché l'energia è una costante del moto, possiamo scrivere  $y = \pm\sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$  per studiare il moto nella parte radiale. Cominciamo quindi con una analisi qualitativa del potenziale.

#### Studio del potenziale efficace

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

indipendentemente dal valore di  $L$

#### Grafico del potenziale.

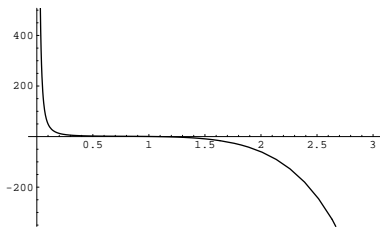


Figura 14: Grafico del potenziale per  $L^2 > 1/6$

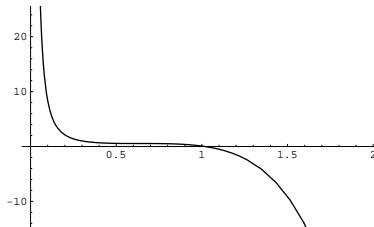


Figura 15: Grafico del potenziale per  $L^2 = 1/6$

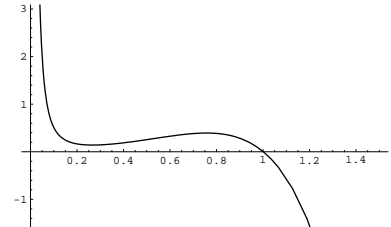


Figura 16: Grafico del potenziale per  $L^2 < 1/6$

**Piano delle fasi.** Nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse  $\rho$ . Inoltre, poiché il potenziale efficace non è limitato dal basso, il moto sarà possibile per ogni valore di energia. In particolare, suddividendo nei tre casi

**Caso 1.**  $6L^2 > 1$ . In questo caso avremo una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$  per ogni valore di energia.

**Caso 2.**  $6L^2 = 1$ . In questo caso avremo

- per  $E < V_{\text{eff}}(1/\sqrt[4]{6})$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ .
- per  $E = V_{\text{eff}}(1/\sqrt[4]{6})$  due traiettorie aperte che si intersecano con tangenza orizzontale nel punto instabile  $P_0$ .
- per  $E > V_{\text{eff}}(1/\sqrt[4]{6})$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ .

**Caso 3.**  $6L^2 < 1$ . In questo caso avremo

- per  $E < V_{\text{eff}}(\rho_-)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ .
- per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_-)$  una traiettoria aperta e il punto stabile  $P_-$ .
- per  $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta ed una periodica intorno a  $P_-$ .
- per  $E = V_{\text{eff}}(\rho_+)$  due traiettorie aperte ed una omoclina che si intersecano con tangenza obliqua nel punto instabile  $P_+$ .
- per  $E > V_{\text{eff}}(\rho_+)$  una traiettoria aperta con  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} y(\rho) = \pm\sqrt{2E}$ .

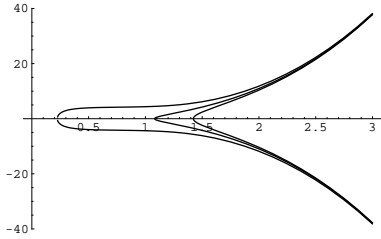


Figura 17: Piano delle fasi per  $L^2 > 1/6$

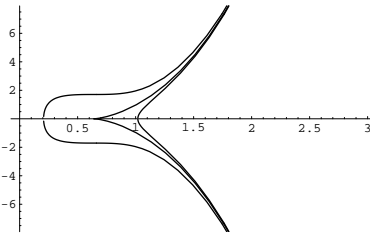


Figura 18: Piano delle fasi per  $L^2 = 1/6$

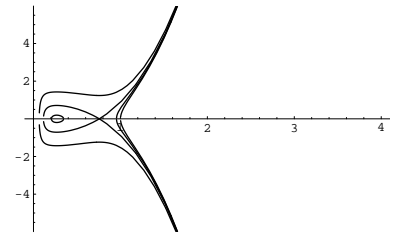


Figura 19: Piano delle fasi per  $L^2 < 1/6$

(3.4) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente, il sistema ammette traiettorie periodiche solo per  $6L^2 < 1$ , e in particolare per  $V_{\text{eff}}(\rho_-) < E < V_{\text{eff}}(\rho_+)$  e  $\rho < \rho_+$ .

(3.5) **Moto complessivo.** Intanto sappiamo che

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2L^{-2} (E - V_{\text{eff}}(\rho))}} \quad \{\rho_1, \rho_2\} \subset V_{\text{eff}}^{-1}(E)$$

Il sistema complessivo risulta essere periodico in accordo con le condizioni viste al punto precedente e nel punto stabile  $P_-$ . In più dovrà valere  $\Delta\theta = q\pi$  per qualche  $q \in \mathbb{Q}$ .