Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO XI - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

(1.1) **Trasformazione rigida.** Il vettore che individua O' nel sistema k è dato da $\mathbf{r}(t) = (t, t^2(t+1)(t+2), 0)$, mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\text{tg}\theta(t) = \dot{y}_{O'}$. Poiché $y_{O'}(t) = t^2(t+1)(t+2)$ avremo $\dot{y}_{O'} = 4t^3 + 9t^2 + 4t$ perciò

$$\theta(t) = \text{arctg}(4t^3 + 9t^2 + 4)$$

e quindi la trasformazione rigida è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1.2) **Legge del moto.** Poiché P si muove in K lungo una circonferenza, la legge del moto in K sarà semplicemente $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$. Per ottenere la legge del moto in k basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}$, ottenendo quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t \cos\theta(t) - \sin 2t \sin\theta(t) \\ \cos 2t \sin\theta(t) + \sin 2t \cos\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t + \cos 2t \cos\theta(t) - \sin 2t \sin\theta(t) \\ t^2(t+1)(t+2) + \cos 2t \sin\theta(t) + \sin 2t \cos\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t + \cos(2t + \theta(t)) \\ t^2(t+1)(t+2) + \sin(2t + \theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1.3) **Velocità assoluta.** Sappiamo che la velocità assoluta è $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, e quindi basta semplicemente derivare il vettore che individua P nel sistema k ottendendo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 - (2 + \dot\theta(t))(\sin 2t \cos\theta(t) + \cos 2t \sin\theta(t)) \\ 4t^3 + 9t^2 + 4t + (2 + \dot\theta(t))(\cos 2t \cos\theta(t) - \sin 2t \sin\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (2 + \dot\theta(t)) \sin(2t + \theta(t)) \\ \text{tg}\theta(t) + (2 + \dot\theta(t)) \cos(2t + \theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove chiaramente

$$\dot\theta(t) = \frac{12t^2 + 18t + 4}{1 + (4t^3 + 9t^2 + 4t)^2}$$

Velocità relativa. Derivando il vettore che individua P nel sistema K, otteniamo $\dot{\mathbf{Q}} = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, 0)$ perciò la velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \cos\theta(t) - 2\cos 2t \sin\theta(t) \\ -2\sin 2t \sin\theta(t) + 2\cos 2t \cos\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin(2t + \theta(t)) \\ 2\cos(2t + \theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1.4) **Componente traslatoria.** Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (1, 4t^3 + 9t^2 + 4t, 0) = (1, \mathrm{tg}\theta(t), 0)$.
(1.5) **Componente rotatoria.** Sappiamo che $\mathbf{v}_T = [\omega, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$, con $|\omega| = \dot{\theta}$. D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k, avremo $\omega(t) = (0, 0, \dot{\theta}(t))$. Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = (-\dot{\theta}(t) \sin(2t + \theta(t)), \dot{\theta}(t) \cos(2t + \theta(t)), 0)$$

(1.6) **Forza centrifuga.** Sappiamo che $F_{\mathrm{cf}} = -[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ dove $\mathbf{\Omega} = B\omega$ e quindi, nel nostro caso, $\mathbf{\Omega} = \omega$. Perciò otteniamo $F_{\mathrm{cf}} = (\dot{\theta}^2(t) \cos 2t, \dot{\theta}^2(t) \sin 2t, 0) = \dot{\theta}^2(t)\mathbf{Q}(t)$
(1.7) **Forza di Coriolis.** Da $F_{\mathrm{cor}} = -2[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo $F_{\mathrm{cor}} = (4\dot{\theta}(t) \cos 2t, 4\dot{\theta}(t) \sin 2t, 0) = 4\dot{\theta}(t)\mathbf{Q}(t)$.

<u>Esercizio 2.</u>
(2.1)**Trasformazione rigida.** Cerchiamo intanto la legge del moto di O'. Per individuare la curva lungo cui si muove O' notiamo che le sue componenti sono soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az \\ z(0) = (1, 0) \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R}^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$$

e tale sistema, come sappiamo, ha per soluzione

$$z(t) = z(0) \exp(At) \qquad \exp(At) = \begin{pmatrix} e^t \cos \omega t & -e^t \sin \omega t \\ e^t \sin \omega t & e^t \cos \omega t \end{pmatrix}$$

e quindi $\mathbf{r}(t) = \gamma(t) = (e^t \cos \omega t, e^t \sin \omega t, 0)$ se vista come curva immersa in $\mathbb{R}^3$. L'angolo di rotazione è dato da

$$\mathrm{tg}\theta(t) = \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1} = \frac{\cos \omega t - \omega \sin \omega t}{\sin \omega t + \omega \cos \omega t}$$

e quindi

$$\theta(t) = \mathrm{arctg} \left(\frac{\cos \omega t - \omega \sin \omega t}{\sin \omega t + \omega \cos \omega t} \right)$$

Pertanto possiamo scrivere la trasformazione rigida come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cos \omega t \\ e^t \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.2)**Legge del moto in K.** Poiché P si muove lungo l'asse ξ, la legge del moto in K sarà del tipo $\mathbf{Q} = (\xi(t), 0, 0)$ con $\xi(t)$ che verifica l'equazione $\ddot{\xi} + \lambda\xi = 0$ e quindi $\xi(t) = \xi_0 \cos \sqrt{\lambda}t + \dot{\xi}_0 \sin \sqrt{\lambda}t$ dove ξ_0 è la coordinata lungo l'asse ξ della posizione iniziale di P e $\dot{\xi}_0$ è la sua velocità iniziale. Indichiamo $\alpha = \sqrt{\lambda}$.
Legge del moto in k. Per determinare la legge del moto nel sistema assoluto basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}(t)$. Pertanto vale

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= B \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cos \omega t \\ e^t \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi(t) \cos \theta(t) \\ \xi(t) \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cos \omega t \\ e^t \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi(t) \cos \theta(t) + e^t \cos \omega t \\ \xi(t) \sin \theta(t) + e^t \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2.3) **Velocità assoluta.** Derivando il vettore $\mathbf{q}(t)$ troviamo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \cos \theta(t) - \xi(t)\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + e^t(\cos \omega t - \omega \sin \omega t) \\ \dot{\xi}(t) \sin \theta(t) + \xi(t)\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) + e^t(\sin \omega t + \omega \cos \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_0\alpha\cos\alpha t - \xi_0\alpha\sin\alpha t$ e

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\omega(1+\omega)}{1+\omega+\omega^2-\omega(1+\omega)\cos(2\omega t)-\omega\sin(2\omega t)}$$

Velocità relativa Derivando il vettore che individua P nel sistema K troviamo $\dot{\mathbf{Q}} = (\dot{\xi}(t), 0, 0)$ perciò la velocità relativa è

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t)\cos\theta(t) \\ \dot{\xi}(t)\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2.4) **Componente traslatoria.** Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (e^t(\cos\omega t - \sin\omega t), e^t(\sin\omega t + \cos\omega t), 0)$.
(2.5) **Componente rotatoria.** Poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k, abbiamo $\omega(t) = (0, 0, \dot{\theta}(t))$. Da ciò otteniamo quindi $\mathbf{v}_T = [\omega, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-\dot{\theta}(t)\xi(t)\sin\theta(t), \dot{\theta}(t)\xi(t)\cos\theta(t), 0)$.
(2.6) **Forza centrifuga.** Sappiamo che $F_{\text{cf}} = -[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ dove $\mathbf{\Omega} = B\omega$ e quindi, nel nostro caso avremo $\mathbf{\Omega}(t) = \omega(t)$. Perciò otteniamo $F_{\text{cf}} = (\dot{\theta}^2(t)\xi(t), 0, 0)$
(2.7) **Forza di Coriolis.** Da $F_{\text{cor}} = -2[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo $F_{\text{cor}} = (0, -2\dot{\xi}(t)\dot{\theta}(t), 0)$.

<u>Esercizio 3.</u>
(3.1) **Trasformazione rigida.** Il vettore che individua O' nel sistema k è dato da $\mathbf{r}(t) = (2\cos\omega_1 t, 2\sin\omega_1 t, 0)$, mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è l'angolo di rotazione. Notiamo che il versore $\hat{\xi}$, essendo ortogonale alla circonferenza, è diretto come $\mathbf{r}(t)$ e quindi $\theta(t) = \omega_1 t$ perciò la trasformazione rigida è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos\omega_1 t \\ 2\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.2) **Legge del moto.** Poiché P si muove in K lungo l'asse ξ, la legge del moto in K sarà semplicemente $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), 0, 0) = (\cos t, 0, 0)$. Per ottenere la legge del moto in k basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}$, ottenendo quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos\omega_1 t \\ 2\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t\cos\omega_1 t \\ \cos t\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos\omega_1 t \\ 2\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos\omega_1 t \\ (2+\cos t)\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3.3) **Velocità assoluta.** Sappiamo che la velocità assoluta è $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, e quindi basta semplicemente derivare il vettore che individua P nel sistema k ottendendo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\sin t\cos\omega_1 t - \omega_1(2+\cos t)\sin\omega_1 t \\ -\sin t\sin\omega_1 t + \omega_1(2+\cos t)\cos\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Velocità relativa. Derivando il vettore che individua P nel sistema K, otteniamo $\dot{\mathbf{Q}} = (-\sin t, 0, 0)$ perciò la velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -\sin t\cos\omega_1 t \\ -\sin t\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.4) **Componente traslatoria.** Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (-\omega_1\sin\omega_1 t, \omega_1\cos\omega_1 t, 0)$.

(3.5) **Componente rotatoria.** Sappiamo che $\mathbf{v}_T = [\omega, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$, con $|\omega| = \omega_1$. D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k, avremo $\omega(t) = (0, 0, \omega_1)$. Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = (-\omega_1 \cos t \sin \omega_1 t,\ \omega_1 \cos t \cos \omega_1 t,\ 0)$$

(3.6) **Forza centrifuga.** Sappiamo che $F_{\text{cf}} = -[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ dove $\mathbf{\Omega} = B\omega$ e quindi, nel nostro caso, $\mathbf{\Omega} = \omega$. Perciò otteniamo $F_{\text{cf}} = (\omega_1^2 \cos t, 0) = \omega_1^2 \mathbf{Q}(t)$

(3.7) **Forza di Coriolis.** Da $F_{\text{cor}} = -2[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo $F_{\text{cor}} = (0, 2\omega_1 \sin t, 0)$.