

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO XII - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1.

(1.1) **Trasformazione rigida.** Calcoliamo innanzitutto il valore di $\rho(t)$. Sappiamo che, essendo $\mathbf{r}_{O'}$ una parametrizzazione di \mathcal{E} , dovrà valere

$$\frac{\rho^2(t) \cos^2 t}{4} + \rho^2(t) \sin^2 t = 1$$

e quindi troviamo

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{4}{4 - 3 \cos^2 t}}$$

Si osservi che abbiamo scelto la determinazione positiva della radice essendo $\rho(t)$ la distanza di O' da O , e quindi è una quantità positiva. La rotazione, trattandosi di una rotazione in senso orario, può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) & 0 \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\dot{\theta} = \omega_0$ perciò $\theta(t) = \omega_0 t$ e quindi la trasformazione rigida è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho(t) \cos t \\ \rho(t) \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1.2) **Legge del moto.** Poiché P si muove in K lungo una circonferenza, la legge del moto in K sarà semplicemente $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (\cos 2t, 0, \sin 2t)$. Per ottenere la legge del moto in k basterà applicare la trasformazione D a \mathbf{Q} , ottenendo quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 0 \\ \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho(t) \cos t \\ \rho(t) \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t \cos \omega_0 t \\ -\cos 2t \sin \omega_0 t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho(t) \cos t \\ \rho(t) \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t \cos \omega_0 t + \rho(t) \cos t \\ \rho(t) \sin t - \cos 2t \sin \omega_0 t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1.3) **Velocità assoluta.** Sappiamo che la velocità assoluta è $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, e quindi basta semplicemente derivare il vettore che individua P nel sistema k ottenendo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \cos \omega_0 t - \omega_0 \cos 2t \sin \omega_0 t + \dot{\rho} \cos t - \rho \sin t \\ \dot{\rho} \sin t + \rho \cos t + 2 \sin 2t \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos 2t \cos \omega_0 t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$$

dove chiaramente

$$\dot{\rho} = -3 \sqrt{\frac{1}{(4 - 3 \cos^2 t)^3}} \sin 2t$$

Velocità relativa. Derivando il vettore che individua P nel sistema K , otteniamo $\dot{\mathbf{Q}} = (-2 \sin 2t, 0, 2 \cos 2t)$ perciò la velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B \dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \cos \omega_0 t \\ 2 \sin 2t \sin \omega_0 t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$$

(1.4) **Componente traslatoria.** Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (\dot{\rho} \cos t - \rho \sin t, \dot{\rho} \sin t + \rho \cos t, 0)$.

(1.5) **Componente rotatoria.** Sappiamo che $\mathbf{v}_T = [\omega, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$, con $|\omega| = \theta$. D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k , avremo $\omega(t) = (0, 0, \omega_0)$. Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = (\omega_0 \cos 2t \sin \omega_0 t, \omega_0 \cos 2t \cos \omega_0 t, 0)$$

(1.6) **Forza centrifuga.** Sappiamo che $F_{\text{cf}} = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ dove $\boldsymbol{\Omega} = B\omega$ e quindi, nel nostro caso, $\boldsymbol{\Omega} = \omega$. Perciò otteniamo $F_{\text{cf}} = (2\omega_0^2 \cos 2t, 0, 0)$

Forza di Coriolis. Da $F_{\text{COR}} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo $F_{\text{COR}} = (0, -8\omega_0 \sin 2t, 0)$.

ESERCIZIO 2.

(2.1) **Equazione di Newton.** Essendo $m = 1$, il potenziale efficace è dato da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \rho + \frac{1}{\rho^2} + \frac{L^2}{2\rho^2} \quad L^2 \neq 0$$

che riscriviamo in forma più compatta come

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \rho + \frac{\alpha}{2\rho^2} \quad \alpha = 2 + L^2$$

e quindi l'equazione di Newton del sistema è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = -1 + \frac{\alpha}{\rho^3}$$

Sistema dinamico associato. Avendo posto $y = \dot{\rho}$, otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -1 + \frac{\alpha}{\rho^3} \end{cases}$$

(2.2) **Punti d'equilibrio e stabilità.** In generale i punti d'equilibrio sono tutti e soli della forma $(\rho_0, 0)$ con ρ_0 punto critico del potenziale. Perciò dobbiamo risolvere l'equazione

$$1 - \frac{\alpha}{\rho^3} = 0$$

la quale ha soluzione per $\rho_0 = \sqrt[3]{\alpha}$. Notiamo che essendo $\alpha = 2 + L^2 > 0$, tale soluzione esiste per ogni valore di α . Inoltre si vede facilmente che la derivata seconda del potenziale è sempre positiva, infatti

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} = \frac{3\alpha}{\rho^4}$$

quindi in particolare lo sarà in ρ_0 . Perciò ρ_0 risulta essere un punto d'equilibrio stabile per il sistema.

(2.3) **Andamento all'infinito.**

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

indipendentemente dal valore di α

Grafico del potenziale.

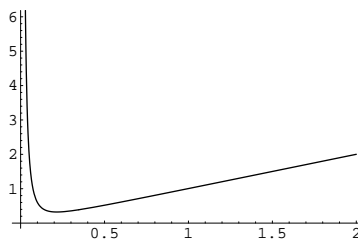


Figura 1: Potenziale efficace.

(2.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$ otteniamo $y = \pm \sqrt{2(E - V_{\text{eff}}(\rho))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse ρ . Inoltre, poiché il potenziale efficace è limitato dal basso, il moto sarà possibile per valori di energia maggiori di $V(\rho_0)$.

- Per $E = V_{\text{eff}}(\rho_0)$ il solo punto stabile $P_0 = (\rho_0, 0)$.
- Per $E > V_{\text{eff}}(\rho_0)$ una traiettoria chiusa intorno al punto stabile P_0

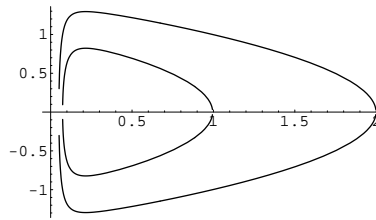


Figura 2: Piano delle fasi.

(2.5) **Traiettorie periodiche.** Osserviamo che il potenziale è di tipo armonico, quindi ogni orbita è limitata. In più il teorema di Bertrand ci assicura che ogni orbita limitata è chiusa.

(2.6) **Moto complessivo.** Avremo moto complessivo periodico in accordo con le condizioni date al punto precedente, e per $\rho = \rho_0$. Inoltre, essendo

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2L^{-2} (E - V_{\text{eff}}(\rho))}} \quad \{\rho_1, \rho_2\} \subset V_{\text{eff}}^{-1}(E)$$

dovrà valere anche $\Delta\theta = 2\pi q$ per qualche $q \in \mathbb{Q}$.

ESERCIZIO 3. Cominciamo intanto col determinare il potenziale $V(x)$. Da

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} = (x^5 + 3x^4 - 8x^3)e^x$$

troviamo

$$\frac{dV}{dx} = -m(x^5 + 3x^4 - 8x^3)e^x$$

e quindi

$$V(x) = -mx^4(x - 2)e^x$$

(3.1) **Sistema dinamico associato.** Ponendo $y = \dot{x}$ otteniamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx} = (x^5 + 3x^4 - 8x^3)e^x \end{cases}$$

(3.2) **Punti critici.** $\frac{dV}{dx} = 0$ per $x = 0$ e $x_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$. Inoltre $\frac{dV}{dx} > 0$ per $x < x_-$ e per $0 < x < x_+$, quindi $x = 0$ è un punto di minimo mentre x_{\pm} sono punti di massimo del potenziale.

Grafico del potenziale.

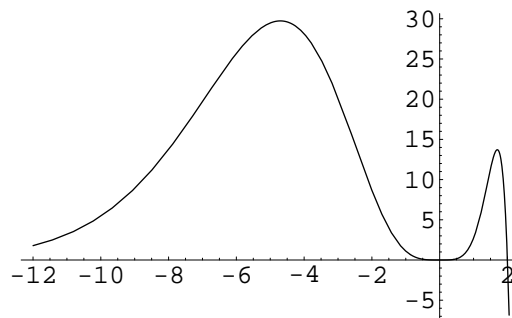


Figura 3: Grafico del potenziale $V(x)$

(3.3) **Punti d'equilibrio e stabilità.** Poiché si ha equilibrio per i punti $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico di $V(x)$, per quanto visto al punto precedente, i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato saranno

$$P_0 = (0, 0) \quad P_+ = \left(\frac{-3 + \sqrt{41}}{2}, 0 \right), \quad P_- = \left(\frac{-3 - \sqrt{41}}{2}, 0 \right)$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Perciò avremo che P_0 è stabile mentre P_{\pm} sono instabili. Notiamo inoltre che $V''(x_{\pm}) \neq 0$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

(3.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x . Inoltre osserviamo che $\inf_{x \in \mathbb{R}} V(x) = -\infty$ quindi il moto nel piano delle fasi è possibile per ogni valore dell'energia. In particolare avremo

- Per $E < V(0)$ una traiettoria aperta.
- Per $E = V(0)$ una traiettoria aperte e il punto d'equilibrio stabile P_0 .
- Per $V(0) < E < V(x_+)$ una traiettoria periodica intorno a P_0 due traiettorie aperte di cui una con $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $E = V(x_+)$ una traiettoria omoclina e due aperte che s'intersecano con tangenza obliqua nel punto instabile P_+ ed una traiettoria aperta con $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $V(x_+) < E < V(x_-)$ due traiettorie aperte di cui una con $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \pm\sqrt{2E}$.
- Per $E = V(x_-)$ quattro traiettorie aperte che s'intersecano con tangenza obliqua nel punto instabile P_- .
- Per $E > V(x_-)$ due traiettorie aperte, una simmetrica dell'altra rispetto all'asse x .

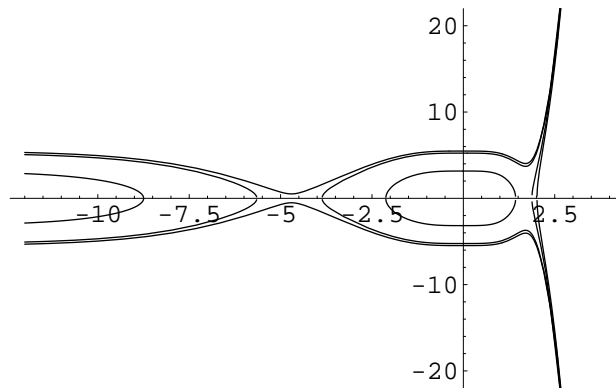


Figura 4: Grafico del piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$, sappiamo che il verso di percorrenza, nella direzione x sarà positivo nel semipiano in cui $y > 0$.

(3.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente abbiamo traiettorie periodiche per

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_+, V(0) < \frac{y^2}{2} + V(x) < V(x_-) \right\}$$