Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO II - LIVIA CORSI (SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI)

ESERCIZIO 1. Per prima cosa calcoliamo lo spettro della matrice A. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda)+1] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9)$$

e dunque

$$P(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \;\; \lambda = 3$$

Pertanto lo spettro della matrice A sarà l'insieme $\Sigma(A) = \{1, 3\}$. Calcoliamo quindi gli autospazi (generalizzati). $E^*(1) = Ker\,(A - \mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} -x_2 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi risulterà essere

$$E^*(1) = \{(t\,,\,0\,,\,0) \in \mathbb{R}^3 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$$

mentre $E^*(3) = Ker(A - 3\mathbb{1})^2$ che è dato dalle equazioni

$$\{4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \implies \{x_3 = -3x_2 - 4x_1$$

perciò avremo

$$E^*(3) = \{(t\,,\,s\,,\,-4t-3s) \in \mathbb{R}^3 \;:\; t, s \in \mathbb{R}\}$$

Pertanto una base di autovettori (generalizzati) sarà data, ad esempio dai vettori

$$v_1 = (1,0,0) \qquad v_2 = (1,0,-4) \qquad v_3 = (0,1,-3)$$

da cui

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \implies Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definite le matrici

$$S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N = A - S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si vede facilmente che N è una matrice nilpotente, infatti $N^3 = (0)_{ij}$. Possiamo quindi calcolare l'esponenziale di A come il prodotto degli esponenziali di S e N, i.e.

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= Q^{-1}\exp(St)Q\left(\mathbb{1} + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2\right) \\
&= \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t - \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1-t & -t \\ 0 & t & 1+t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t & \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)e^t - (1-t)e^{3t} & -\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)e^t + te^{3t} \\ 0 & (1-t)e^{3t} & -te^{3t} \\ 0 & te^{3t} & (1+t)e^{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e quindi la soluzione del sistema è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2}t(4+3t)e^t + (3t-1)e^{3t} \\ x_2(t) = (1-3t)e^{3t} \\ x_3(t) = (2+3t)e^{3t} \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 2.</u> Osserviamo immediatamente che la matrice A può facilmente essere scritta come somma di una matrice diagonale S e una nilpotente N. Infatti

$$A = S + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e si vede immediatamente che $[S, N] = 0$. Perciò l'esponenziale di A si calcola immediatamente come il prodotto degli esponenziali di S e N, i.e.

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \exp(St)\,(\mathbb{1} + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ -te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi la soluzione del sistema sarà

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t} \\ x_2(t) = -(2+t)e^{2t} \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 3.</u> Per prima cosa calcoliamo lo spettro della matrice A. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{1}) = -(2+\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)+5] = -(2+\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 8)$$

perciò avremo

$$P(\lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = -2, \;\; \lambda = 2+2i, \;\; \lambda = 2-2i$$

e quindi $\Sigma(A) = \{-2\,,\, 2+2i\,,\, 2-2i\}$. Calcoliamo ora gli autospazi (generalizzati). $E^*(-2) = Ker(A + 2\mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_3 = -10x_2 \end{cases}$$

quindi otteniamo

$$E^*(-2) = \{(-3t, t, -10t) \in \mathbb{R}^3 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$$

D'altra parte abbiamo $E^*(2+2i) = Ker(A - (2+2i)\mathbb{1})$ che è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} -(1+2i)x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + (1-2i)x_2 - x_3 = 0 \\ -2(2+i)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_2 = -(1+2i)x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$E^*(2+2i) = \{(t\,,\, -(1+2i)t\,,\, 0) \in \mathbb{R}^3 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$$

da cui ricaviamo i due vettori coniugati $(1,-1,0) \pm i(0,-2,0)$. Pertanto una base di autovettori (generalizzati) sarà data da

$$v_1 = (-3, 1, -10) \qquad v = (0, -2, 0) \qquad u = (1, -1, 0)$$

da cui

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$, quindi A è semisemplice e il suo esponenziale è

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= Q^{-1}\exp(\widetilde{S}t)Q \\
&= Q^{-1}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos(2t) & -e^{2t}\sin(2t) \\ 0 & e^{2t}\sin(2t) & e^{2t}\cos(2t) \end{pmatrix} Q \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t}(2\cos(2t)-\sin(2t)) & -\frac{1}{2}e^{2t}\sin(2t) & \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{2t}(\sin(2t)-3\cos(2t)) \\ \frac{5}{2}e^{2t}\sin(2t) & \frac{1}{2}e^{2t}(2\cos(2t)+\sin(2t)) & -\frac{1}{10}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{2t}(\cos(2t)-7\sin(2t)) \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

pertanto la soluzione del sistema sarà data da

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{10}e^{-2t}\left(9 - e^{4t}(19\cos(2t) - 8\sin(2t))\right) \\ x_2(t) = \dfrac{1}{10}e^{-2t}\left(-3 + e^{4t}(3\cos(2t) - 46\sin(2t))\right) \\ x_3(t) = 3e^{-2t} \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 4.</u> Il sistema lineare associato al problema di Cauchy è

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + B(t) \\ z(0) = (2,0) \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4te^t \end{pmatrix}$$

Consideriamo intanto il sistema omogeneo associato i.e.

$$\begin{cases} \dot{z} = Az \\ z(0) = (2,0) \end{cases}$$

il cui polinomio cartatteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

Pertanto avremo $\Sigma(A) = \{1, -1\}$. Calcoliamo ora gli autospazi. $E^*(1) = Ker(A - \mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \{x_1 = x_2$$

e quindi $E^*(1) = \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. Analogamente $E^*(-1) = Ker(A + \mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \{x_1 = -x_2$$

e quindi $E^*(-1) = \{(t,-t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. In questo modo otteniamo

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si vede immediatamente che $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$ quindi l'esponenziale di A si calcola facilemte come

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= Q^{-1}\exp(\widetilde{S}t)Q \\
&= Q^{-1}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Q \\
&= \begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{2} & \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{e^t+e^{-t}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

quindi la soluzione del sistema non-omogeneo sarà del tipo

$$z(t) = \exp(At)\,[c(t) + z(0)]$$

con $c(t)$ tale che

$$\begin{aligned}\dot{c}(t) &= [\exp(At)]^{-1}\,B(t) = \exp(-At)B(t)\\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{2} & \frac{e^{-t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{-t}-e^t}{2} & \frac{e^t+e^{-t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4te^t \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2t\left(e^{2t}-1\right) \\ -2t\left(e^{2t}+1\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} c_1(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{d}s\,\left(e^{2s}-1\right)2s \\ c_2(t) = -\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}s\,\left(e^{2s}+1\right)2s \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1(t) = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)e^{2t} \\ c_2(t) = \left(\dfrac{1}{2} - t\right)e^{2t} - t^2 \end{cases}$$

quindi la soluzione del sistema lineare associato è

$$\begin{aligned}z(t) &= \exp(At)\,[c(t) + z(0)]\\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{2} & \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{e^t+e^{-t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(t-\frac{1}{2}\right)e^{2t}+2 \\ \left(\frac{1}{2}-t\right)e^{2t}-t^2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+t-t^2\right)e^t + e^{-t} \\ \\ \left(\frac{3}{2}-t-t^2\right)e^t - e^{-t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La soluzione del problema di Cauchy sarà quindi

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} + t - t^2\right)e^t + e^{-t}$$

<u>Esercizio 5.</u> Cerchiamo le radici del polinomio caratteristico dell'equazione differenziale:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 2\alpha = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 2 \pm \sqrt{4-2\alpha}$$

caso 1: $(\alpha < 2)$ In questo caso il polinomio caratteristico avrà due radici reali, $\lambda_1 = 2 + \sqrt{4-2\alpha}$ e $\lambda_2 = 2 - \sqrt{4-2\alpha}$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$x(t) = c_1 e^{(2+\sqrt{4-2\alpha})t} + c_2 e^{(2-\sqrt{4-2\alpha})t}$$

dove c_1, c_2 sono costanti che dipenderanno dai dati iniziali. Imponendo le condizioni al bordo vediamo che dovranno valere le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{(2+\sqrt{4-2\alpha})\pi} + c_2 e^{(2-\sqrt{4-2\alpha})\pi} = 0 \end{cases}$$

Ma ciò può accadere se e solo se $c_1 = c_2 = 0$ e dunque in questo caso $x(t)$ è la soluzione nulla del problema.

caso 2: $(\alpha = 2)$ In questo caso il polinomio caratteristico ha una sola radice con molteplicità due. Perciò la soluzione dell'equazione è

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$$

dove c_1, c_2 sono costanti che dipendono dai dati iniziali. Imponendo le condizioni al bordo vediamo che dovranno valere

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ (c_1 + \pi c_2)e^{2\pi} = 0 \end{cases}$$

e, anche in questo caso, ciò accade solo se $c_1 = c_2 = 0$ ossia se $x(t)$ è la soluzione nulla del problema.

caso 3: $(\alpha > 2)$ Sia $\omega = \sqrt{2\alpha - 4}$. In questo caso $P(\lambda)$ ha due radici complesse $\lambda_1 = 2 + i\omega$ e $\lambda_2 = 2 - i\omega$, quindi la soluzione generale dell'equazione è della forma

$$x(t) = e^{2t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

dove c_1, c_2 sono costanti che dipendono dai dati iniziali. Imponendo le condizioni al bordo vediamo che dovranno valere

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ (c_1 \cos \omega\pi + c_2 \sin \omega\pi)e^{2\pi} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 \sin \omega\pi = 0$$

Ciò significa che sarà possibile avere una soluzione non nulla del problema. Infatti basta imporre $\omega \in \mathbb{Z}$ i.e. per $\alpha = (\omega^2 - 4)/2 > 2$, $\omega \in \mathbb{Z}$ la soluzione non nulla del problema è data da

$$x(t) = c_2 e^t \sin \omega t$$

<u>Esercizio 6.</u> Il sistema è del tipo

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + B(t) \\ z(0) = (0,0) \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin^2 t \end{pmatrix}$$

Consideriamo intanto il sistema omogeneo associato i.e.

$$\begin{cases} \dot{z} = Az \\ z(0) = (0,0) \end{cases}$$

e osserviamo immediatamente che A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

quindi possiamo calcolare immediatamente il suo esponenziale ottenendo

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Inoltre riconosciamo in $\exp(At)$ una matrice di rotazione e quindi la sua inversa è

$$[\exp(At)]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

La solizione del sistema non-omogeneo sarà quinidi

$$z(t) = \exp(At)\,[c(t) + z(0)]$$

con $c(t)$ tale che

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= [\exp(At)]^{-1}\,B(t) = \exp(-At)B(t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ovvero

$$
\begin{cases} c_1(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{d}s \sin s \\ c_2(t) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1(t) = 1 - \cos t \\ c_2(t) = 0 \end{cases}
$$

Quindi la soluzione del sistema è

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \exp(At)\,[c(t) + z(0)] \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t(1 - \cos t) \\ \sin t(1 - \cos t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
\begin{cases} x(t) = \cos t(1 - \cos t) \\ y(t) = \sin t(1 - \cos t) \end{cases}
$$

Si vede immediatamente che $x^2 + y^2 = (1 - \cos t)^2$ e, d'altra parte

$$
x^2(t) + y^2(t) + x(t) = (1 - \cos t)^2 + \cos t - \cos^2 t = 1 - \cos t
$$

quindi l'equazione cartesiana della curva è

$$
(x^2 + y^2 + x)^2 = x^2 + y^2
$$

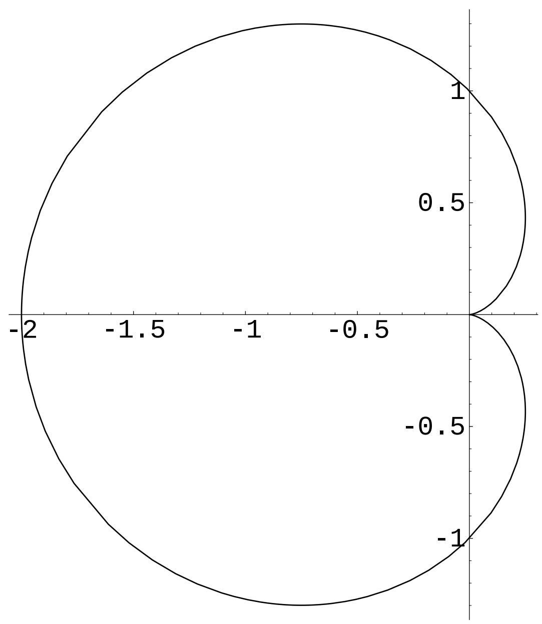

Figura 1: Grafico della curva γ, soluzione del sistema. Tale curva è detta *cardioide* ed è la curva percorsa da un punto fissato su una circonferenza che ruoti, senza strisciare, lungo una circonferenza più piccola