Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
Tutorato III - Livia Corsi (Soluzioni degli esercizi)

<u>Esercizio 1.</u> Osserviamo immediatamente che la matrice A può facilmente essere scritta come somma di una matrice diagonale S e una nilpotente N. Infatti

$$A = S + N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

m si vede che $[S, N] \neq 0$. pertanto questa decomposizione di A non è utile per calcolarne l'esponenziale. Cerchiamo pertanto gli autospazi dell'operatore. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = -(1 + \lambda)(3 - \lambda)$$

e quindi lo spettro di A sarà $\Sigma(A) = \{3, -1\}$. $E^*(3) = Ker(A - 3\mathbb{1})$ è dato da

$$\left\{ -4x_1 + x_2 = 0 \right.$$

e quindi avremo

$$E^*(3) = \{(4t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

mentre $E^*(-1) = Ker(A + \mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

dunque sarà

$$E^*(-1) = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

Pertanto, una basse di autovettori è data, ad esempio, da

$$v_1 = (4, 1) \qquad v_2 = (1, 0)$$

da cui

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 3 & \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo immediatamente che $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$ quindi A è semisemplice e il suo esponenziale è

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1} \exp \widetilde{S}tQ \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 4(e^{3t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

quindi la soluxione del sistema è

$$\begin{cases} x_1(t) = 4e^{3t} - 2e^{-t} \\ x_2(t) = e^{3t} \end{cases}$$

<u>Esercizio 2.</u> Il sistema lineare associato al problema di Cauchy è:

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (0, 2, -1) \end{cases} y \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi lo spettro della matrice A. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)$$

e dunque

$$P(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -1 \;\; \lambda = i \;\; \lambda = -i$$

Pertanto lo spettro della matrice A sarà l'insieme $\Sigma(A) = \{-1, i, -i\}$. Calcoliamo quindi gli autospazi (generalizzati). $E^*(-1) = Ker\,(A + \mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

e quindi risulterà essere

$$E^*(-1) = \{(t\,,\, -t\,,\, t) \in \mathbb{R}^3 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$$

mentre $E^*(i) = Ker(A - i\mathbb{1})^2$ che è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -ix_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - (1+i)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_2 = ix_1 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}$$

perciò avremo

$$E^*(i) = \{(t\,,\, it\,,\, -t) \in \mathbb{R}^3 \;:\; t \in \mathbb{R}\}$$

e quindi avremo i due vettori coniugati $(1, 0, -1) \pm i(0, 1, 0)$. Pertanto una base di autovettori (generalizzati) sarà data, ad esempio dai vettori

$$v_1 = (1, -1, 1) \qquad v = (0, 1, 0) \qquad u = (1, 0, -1)$$

da cui

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si verifica immediatamente che $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$, pertanto l'esponenziale di A si calcola facilmente come

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1} \exp(\widetilde{S}t) Q \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t + \sin t) & \sin t & \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t) \\ \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t - \sin t) & \cos t & \frac{1}{2}(\cos t + \sin t - e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t - \sin t) & -\sin t & \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t - \sin t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi la soluzione del sistema lineare associato è data da

$$y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos t + 3\sin t - e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^{-t} + 3\cos t - \sin t) \\ -\frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t + e\sin t) \end{pmatrix}$$

perciò la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \frac{1}{2}(\cos t + 3\sin t - e^{-t})$$

<u>Esercizio 3.</u> Per prima cosa calcoliamo lo spettro della matrice A. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = (2-\lambda)[\lambda(\lambda-2)-3] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

perciò avremo

$$P(\lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = 2, \quad \lambda = 3, \quad \lambda = -1$$

e quindi $\Sigma(A) = \{2\,,\,3\,,\,-1\}$. Calcoliamo ora gli autospazi (generalizzati). $E^*(2) = Ker(A - 2\mathbb{1})$ è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$$

quindi otteniamo

$$E^*(2) = \{(2t, -3t, t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

D'altra parte abbiamo $E^*(3) = Ker(A - 3\mathbb{1})$ che è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$E^*(3) = \{(3t\,,\,0\,,\,t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

Infine $E^*(-1) = Ker(A + \mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$E^*(-1) = \{(-t\,,\,0\,,\,t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

Pertanto una base di autovettori sarà data da

$$v_1 = (2, -3, 1) \qquad v_2 = (3, 0, 1) \qquad v_3 = (-1, 0, 1)$$

da cui

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$, quindi A è semisemplice e il suo esponenziale è

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1}\exp(\widetilde{S}t)Q \\ &= Q^{-1}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(e^{-t} + 3e^{3t}) & -\frac{1}{12}(e^{-t} + 8e^{2t} - 9e^{3t}) & \frac{3}{4}(e^{3t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}) & \frac{1}{12}(e^{-t} - 4e^{2t} + 3e^{3t}) & \frac{1}{4}(3e^{-t} + e^{3t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pertanto la soluzione del sistema per $x(0) = (1, 1, 1)$ sarà data da

$$
\begin{cases}
x_1(t) = \dfrac{1}{12}\left(-7e^{-t} - 8e^{2t} + 27e^{3t}\right) \\
x_2(t) = e^{2t} \\
x_3(t) = \dfrac{1}{12}\left(7e^{-t} - 4e^{2t} + 9e^{3t}\right)
\end{cases}
$$

per $x(0) = (-2, 0, 2)$ avremo

$$
\begin{cases}
x_1(t) = -2e^{-t} \\
x_2(t) = 0 \\
x_3(t) = 2e^{-t}
\end{cases}
$$

e infine, per $x(0) = (5, -3, 2)$ avremo

$$
\begin{cases}
x_1(t) = 2e^{2t} + 3e^{3t} \\
x_2(t) = -3e^{2t} \\
x_3(t) = e^{2t} + e^{3t}
\end{cases}
$$

Per quanto riguarda la soluzione con dato iniziale $x(0) = (-2, 0, 2)$ osserviamo che si tratta di una riparametrizzazione dell'autospazio $E^*(-1)$. Infatti, ponendo $2e^{-t} = s$ nelle equazioni della soluzione, otteniamo esattamente i vettori di $E^*(-1)$. Per quanto riguarda, invece la soluzione con dato iniziale $x(0) = (5, -3, 2)$, osserviamo che è la somma degli autospazi $E^*(2)$ e $E^*(e)$. Infatti

$$
\begin{aligned}
E^*(2) + E^*(3) &= \{v + w \ : \ v \in E^*(2) \ , \ w \in E^*(3)\} \\
&= \{(2t + 3s, -3t, t + s) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t, \ s \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

cioè una riparametrizzazione della soluzione.

<u>Esercizio 4.</u> Considerata la sostituzione $y = \dot{x}$, l'equazione diventa

$$
\begin{cases}
e^t \dot{y} + (1 - e^t) y^2 = 0 \\
y(0) = 1
\end{cases}
$$

Risolvendo per separazione di variabili otteniamo quindi

$$
-\frac{\dot{y}}{y^2} = \frac{1 - e^t}{e^t}
$$

che integrata ambo i membri da

$$
\int_1^y \mathrm{d}z \left(-\frac{1}{z^2}\right) = \int_0^t \mathrm{d}s \, \frac{1 - e^s}{e^s}
$$

da cui otteniamo

$$
\frac{1}{y} - 1 = 1 - t - e^{-t} \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = \frac{1}{2 - t - e^{-t}}
$$

ovvero il seguente sistema

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = \dfrac{1}{2 - t - e^{-t}} \\
x(0) = 0
\end{cases}
$$

Integrando quindi il problema differenziale otteniamo la soluzione del problema iniziale, i.e.

$$
x(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{2 - s - e^{-s}}
$$

<u>Esercizio 5.</u> Risolviamo per separazione di variabili. Scrivendo in altro modo l'equazione differenziale avremo

$$\dot{x} = \frac{x(t\cos t - 1)}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\dot{x}}{x} = \cos t - \frac{1}{t}$$

Integrando ambo i membri, quindi, otteniamo

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_\pi^t \mathrm{d}s \left(\cos s - \frac{1}{s}\right)$$

e quindi

$$\ln x - \ln 2 = \sin t - \ln t + \ln \pi$$

da questa troviamo

$$\ln x = \sin t + \ln\left(\frac{2\pi}{t}\right)$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \frac{2\pi}{t} e^{\sin t}$$

<u>Esercizio 6.</u> Il sistema lineare associato è

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + B(t) \\ z(0) = (-1, 0) \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Consideriamo intanto il sistema omogeneo associato, i.e.

$$\begin{cases} \dot{z} = Az \\ z(0) = (-1, 0) \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda(\lambda - 6) + 10 = \lambda^2 - 6\lambda + 10$$

quindi lo spettro di A è $\Sigma(A) = \{3 + i\,,\, 3 - i\}$. Calcoliamo ora gli autospazi (generalizzati). $E^*(3+i) = Ker\,(A - (3+i)\mathbb{1})$ è dato da

$$\begin{cases} -(3+i)x_1 + x_2 = 0 \\ -10x_1 + (3-i)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \{x_2 = (3+i)x_1$$

e quindi avremo che $E^*(3+i) = \{(t, (3+i)t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. Da questo ricaviamo i due vettori coniugati $(1,3) \pm i(0,1)$. Perciò una base di autovettori (generalizzati) è, ad esempio,

$$v = (0, 1) \qquad u = (1, 3)$$

da cui

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica immediatamente che $S = Q^{-1}\widetilde{S}Q = A$ e quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \exp(At) &= Q^{-1} \exp(\widetilde{S}t) Q \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{3t}\cos t & -e^{3t}\sin t \\ e^{3t}\sin t & e^{3t}\cos t \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t}(3\sin t - \cos t) & -e^{3t}\sin t \\ 10e^{3t}\sin t & -e^{3t}(\cos t + 3\sin t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La soluzione del sistema non-omogeneo è quindi

$$z(t) = \exp(At)\,[c(t) + z(0)]$$

con $c(t)$ tale che

$$\begin{aligned}
\dot{c}(t) &= [\exp(At)]^{-1} B(t) = \exp(-At)B(t) \\
&= \begin{pmatrix} -e^{-3t}(3\sin t + \cos t) & e^{-3t}\sin t \\ -10e^{-3t}\sin t & e^{-3t}(3\sin t - \cos t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ 3\sin t\cos t - \cos^2 t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} c_1(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{d}s \sin s \cos s \\ c_2(t) = -\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}s \cos^2 s \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1(t) = \dfrac{1}{2}\sin^2 t \\ c_2(t) = \dfrac{-\sin t\cos t - t}{2} \end{cases}$$

quindi la soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}e^{3t}(3\sin^3 t - 6\sin t + 2\cos t - t\sin t) \\ y(t) = \dfrac{1}{2}e^{3t}(10\sin^3 t - 20\sin t + \sin t\cos^3 t - 3\sin^2 t\cos t - t\cos t + 3t\sin t) \end{cases}$$

da cui otteniamo la soluzione del problema di Cauchy, i.e.

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{3t}(3\sin^3 t - 6\sin t + 2\cos t - t\sin t)$$

<u>E</u>SERCIZIO 7. Riscriviamo l'equazione differenziale come

$$2t\dot{x} + x = e^t + 2(2tx)$$

Da $y = 2tx$ otteniamo $\dot{y} = 2t\dot{x} + x$ quindi avremo

$$\begin{cases} \dot{y} = e^t + 2y \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

Cerchiamo la soluzione generale del problema omogeneo associato procedendo per separazione di variabili:

$$\dot{y} = 2y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\dot{y}}{y} = 2$$

e, integrando ambo i membri, otteniamo

$$\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}z\, \frac{1}{z} = 2\int_1^t \mathrm{d}s \qquad \Longrightarrow \qquad \ln y = 2t - 2 + \ln y_0 \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = y_0 e^{2t-2}$$

Cerchiamoora una soluzione particolare del sistema non-omogeneo conilmetodo della variazione delle costanti.

Sia $\underline{y}(t) = c(t)e^{2t-2}$ una soluzione particolare del sistema non-omogeneo con $c(t)$ ancora da determinare.

$$\underline{\dot{y}} = \dot{c}e^{2t-2} + 2ce^{2t-2}$$

e d'altra parte, affinché $\underline{y}$ sia soluzione, deve valere $\underline{\dot{y}} = e^t + 2y$, quindi

$$\dot{c}e^{2t-2} + 2ce^{2t-2} = e^t + 2ce^{2t-2} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{c}e^{2t-2} = e^t \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{c} = e^{2-t}$$

Integrando,quindi,otteniamo

$$c(t) = \int_0^t \mathrm{d}s\, e^{2-t} = -e^{2-s}$$

perciò una soluzione particolare del problema non-omogeneo è data da $\underline{y}(t) = e^t$. La soluzione generale del problema non-omogeneo è quindi

$$y(t) = y_0 e^{2t-2} + e^t$$

e sostituendo il dato iniziale avremo

$$y(t) = 4e^{2t-2} + e^t$$

Riportando infine la soluzione nella variabile x otteniamo quindi la soluzione del problema iniziale, i.e.

$$x(t) = \frac{4e^{2t-2} + e^t}{2t}$$